



תיק משימטיקה

משוואות כמודל מתמטי

לקשר בין גדלים

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
7	משימה 1: שתי כיתות ט
8	משימה 2: חוגים ומתנות
10	משימה 3: משוואה ומילים
11	הערכת תוצרי תלמידים
13	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
13	פעילות 1: מזהים ובונים משוואות
14	עבודה על דף פעילות 1: מזהים ובונים משוואות
15	דיון
16	פעילות 2: תיאור מילולי של יחסים בין גדלים
17	עבודה על דף פעילות 2: תיאור מילולי של יחסים בין גדלים
17	דיון



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשור בין בעיה המתארת בשפה טבעית יחסים בין גדלים (בעיות מילוליות) ובין משוואות המתאימות לשמש לה מודל מתמטי, ולתת מענה לקשיים המתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לזהות משוואות המתאימות לשמש מודל מתמטי לבעיה המתארת בשפה טבעית יחסים בין גדלים.
- ❖ לבנות משוואות המתאימות לשמש מודל מתמטי לבעיה המתארת בשפה טבעית יחסים בין גדלים.
- ❖ לתאר בשפה טבעית יחסים בין גדלים המופיעים בשני אגפי משוואה.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת הערכה: 30-45 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [שתי כיתות י.](#)
- ❖ דף משימה 2: [חוגים ומתנות.](#)
- ❖ דף משימה 3: [משוואה ומילים.](#)

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף פעילות 1: [מזהים ובונים משוואות.](#)
- ❖ דף פעילות 2: [תיאורים של יחסים בין גדלים.](#)

¹ חמישה תיקי משימטיקה עוסקים בהיבטים שונים של שימוש במידול מתמטי לפתרון בעיות המוצגות בשפה טבעית בהקשרים פנים וחוץ-מתמטיים: אותה בעיה – הגדרות שונות של המשתנה, התחשבות באילוצים בפתרון בעיות, משוואות כמודל מתמטי לקשר בין גדלים, בעיות בהקשר ומשוואות, בעיות בהקשר ופונקציות.



רקע

פתרון מתמטי של בעיות המוצגות בשפה טבעית (בעיות מילוליות) כולל בנייה של מודל מתמטי לבעיה והפעלה של כלים מתמטיים על המודל כדי למצוא פתרון לבעיה. סוג נפוץ של מודלים מתמטיים הוא משוואה. לדוגמה, מודל מתמטי מתאים לבעיה: מהם שלושת המספרים העוקבים שמכפלת שני המספרים הגדולים יותר גדולה ב-20 ממכפלת שני המספרים הקטנים יותר? הוא המשוואה: $(x-2) \cdot (x-1) + 20 = (x-1) \cdot x$ (מספר שלם) כאשר x מייצג את המספר הגדול מבין השלושה.

תלמידים רבים מתקשים בבניית משוואות המתארות יחסים בין גדלים כאשר יחסים אלה מוצגים בבעיה באופן מילולי. אחד הגורמים לקושי זה נעוץ בנטייה של תלמידים לבנות משוואות לפי המבנה הלשוני של התיאור המילולי. המשוואה הנוצרת בדרך זאת משקפת את סדר הופעת הגדלים בתיאור המילולי של הבעיה, אך היחס בין הגדלים המוצגים בשני אגפיה אינו נמצא בהלימה לנתוני הבעיה. כך למשל, בהינתן תיאורים מן הסוג "גדול ב- d מ- y " או "גדול פי k מ- y ", תלמידים רבים בונים את המשוואות: $x + d = y$ או $kx = y$, במקום המשוואות: $x = y + d$ או $x = ky$. קושי דומה מופיע גם בכיוון ההפוך. כך, למשל, בהינתן המשוואות: $x + d = y$ או $k \cdot x = y$, תלמידים מתארים במילים את היחסים בין הגדלים הרשומים בשני האגפים כך: "גדול ב- d מ- y " או "גדול פי k מ- y ".

התיק **משוואות כמודל מתמטי לקשר בין גדלים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימות הערכה:
 - משימה 1: [שתי כיתות](#).
 - משימה 2: [חוגים ומתנות](#).
 - משימה 3: [משוואה ומילים](#).
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- ❖ משימה 1: **שתי כיתות י.**
- ❖ משימה 2: **חוגים ומתנות.**
- ❖ משימה 3: **משוואה ומילים.**

בשתי המשימות הראשונות התלמידים מתבקשים לזהות או לבנות משוואות המתאימות לשמש מודל מתמטי לבעיות המתארות יחסים בין גדלים באופן מילולי.

במשימה השלישית התלמידים מתבקשים לתאר באופן מילולי יחסים בין גדלים המופיעים בשני אגפי משוואה, וכן לבנות משוואות מתאימות לתיאור מילולי של יחסים בין גדלים.



משימה 1: שתי כיתות י

משימה 1: שתי כיתות י

לקראת המעבר מכיתה ט' לכיתה י', כל תלמיד ותלמידה התבקשו לבחור תלמיד או תלמידה שאיתם הם רוצים להיות בכיתה בשנת הלימודים הבאה. בהתאם לבקשות, חולקו התלמידים לשתי כיתות, י' וי'2.

במסגרת שלפניכם מתוארת חלוקת התלמידים לשתי הכיתות, בשני מועדים שונים: **במועד הרישום ובמועד פתיחת שנת הלימודים**. בהמשך רשומות 4 משוואות. בחרו את כל המשוואות המתאימות לחלוקת התלמידים.

חלוקת התלמידים לשתי כיתות בשני מועדים:

במועד הרישום

מספר התלמידים בכיתה י'2 היה גדול ב-12 ממספר התלמידים בכיתה י'1.

ביטויים אלגבריים מתאימים:

- מספר התלמידים בכיתה י'1 במועד הרישום: x ($x \geq 0$, מספר שלם)
- מספר התלמידים בכיתה י'2 במועד הרישום: $x+12$

במועד פתיחת שנת הלימודים

התברר שעזבו 4 תלמידים שהיו מיועדים לכיתה י'1 ו-3 תלמידים המיועדים לכיתה י'2. כתוצאה מעזיבת התלמידים מספר התלמידים בכיתה י'2 היה גדול פי 1.5 ממספר התלמידים בכיתה י'1.

ביטויים אלגבריים מתאימים:

- מספר התלמידים בכיתה י'1 במועד פתיחת שנת הלימודים: $x-4$ ($x \geq 4$, מספר שלם)
- מספר התלמידים בכיתה י'2 במועד פתיחת שנת הלימודים: $x+9$

בכל המשוואות שלמטה $x > 4$, מספר שלם. סמנו את כל המשוואות המתאימות לחלוקת התלמידים לשתי הכיתות במועד פתיחת שנת הלימודים (תיתכן יותר ממשוואה מתאימה אחת).

$$x-4=1.5(x+9) \quad .1$$

$$1.5x-4=x+9 \quad .2$$

$$\frac{x+9}{x-4}=1.5 \quad .3$$

$$\frac{x-4}{x+9}=1.5 \quad .4$$

[למשימה 1 מוגשת](#)



משימה 2: חוגים ומתנות

משימה 2: חוגים ומתנות

א. בסעיפים הבאים מוצגים קשרים בין מספר המשתתפים בחוג ג'ודו למספר המשתתפים בחוג מחול, בארבעה מתנ"סים שונים. בכל חוג צריכים להיות לפחות 7 משתתפים. בכל מתנ"ס, a מייצג את מספר המשתתפים בחוג ג'ודו, ו- b מייצג את מספר המשתתפים בחוג מחול (a ו- b מספרים טבעיים). רשמו משוואה מתאימה לכל מתנ"ס.

▪ מתנ"ס ארזים

מספר המשתתפים בחוג ג'ודו גדול ב-6 ממספר המשתתפים בחוג מחול.

משוואה: _____ אילוצים: $a > 7, b > 7$, ו- a מספרים טבעיים.

▪ מתנ"ס אלונים

מספר המשתתפים בחוג ג'ודו קטן ב-7 ממספר המשתתפים בחוג מחול.

משוואה: _____ אילוצים: $a > 7, b > 7$, ו- a מספרים טבעיים.

▪ מתנ"ס ברושים

מספר המשתתפים בחוג ג'ודו גדול פי 4 ממספר המשתתפים בחוג מחול.

משוואה: _____ אילוצים: $a > 7, b > 7$, ו- a מספרים טבעיים.

▪ מתנ"ס דקלים

מספר המשתתפים בחוג ג'ודו קטן פי 3 ממספר המשתתפים בחוג מחול.

משוואה: _____ אילוצים: $a > 7, b > 7$, ו- a מספרים טבעיים.

ב. במסגרת שלפניכם בעיה. לאחר המסגרת תמצאו את התחלת פתרון הבעיה על-ידי **יוליה**. המשיכו את הפתרון של **יוליה** ורשמו משוואה מתאימה (אין צורך לפתור את המשוואה).

קבוצת ילדים החליטה לקנות לחבר מתנת יום הולדת ב-60 שקלים, ולהתחלק שווה בשווה בעלות המתנה.
ברגע האחרון הצטרפו לקבוצה שני ילדים נוספים, וכתוצאה מכך, כל ילד שילם 5 שקלים פחות.
כמה ילדים היו בקבוצה בהתחלה?
מהו התשלום ליחיד שהיה מתוכנן לפני ההצטרפות של שני הילדים הנוספים?

יוליה התחילה לפתור את הבעיה כך:

- מספר הילדים בקבוצה בהתחלה: x ($x \geq 0$, x מספר שלם)
- עלות המתנה לכל ילד, בהתחלה: $\frac{60}{x}$ ($x > 0$, x מספר שלם)
- עלות המתנה לכל ילד לאחר ההצטרפות: $\frac{60}{x+2}$

השתמשו בביטויים שיוליה רשמה, וכתבו משוואה מתאימה לבעיה.

משוואה: _____ אילוצים: ($x > 0$, x מספר שלם)

[למשימה 2 מונגשת](#)



משימה 3: משוואה ומילים

משימה 3: משוואה ומילים

א. בכל סעיף נתונה משוואה.

השלימו תיאורים מילוליים מתאימים ליחס בין שני גדלים חיוביים המיוצגים על-ידי a ו- b .

תיאור מילולי		משוואה	דוגמה:
b גדול ב-5 מ- a	a קטן ב-5 מ- b	$a + 5 = b$	
a - n _____ b	b - n _____ a	$b - 5 = a$	1.
a - n _____ b	b - n _____ a	$a - 8 = b$	2.
a - n _____ b	b - n _____ a	$a \cdot 8 = b$	3.

ב. בכל סעיף נתון תיאור מילולי של יחס בין גדלים המיוצגים על ידי ביטויים. רשמו לכל תיאור מילולי שתי משוואות מתאימות.

משוואות	תיאור מילולי	דוגמה:
$x - 3 = 4x + 7 - 5$	$x - 3 + 5 = 4x + 7$	$x - 3$ קטן ב-5 מ- $4x + 7$
		1. $x - 3$ גדול ב-5 מ- $4x + 7$
		2. $x - 3$ גדול פי 5 מ- $4x + 7$
		3. $x - 3$ קטן פי 5 מ- $4x + 7$

[למשימה 3 מוגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

הערות	התקשו בתיאור מילולי של יחסים בין גדלים	טעו בבניית משוואה מתאימה	טעו בזיהוי משוואה מתאימה	תשובות נכונות	שם התלמיד/ה
				√	תלמיד 1
		√			תלמיד 2
		√	√		תלמיד 3
	√	√			תלמיד 4
					סך-הכול

הצעה לפתרון משימות הערכה

משימה 1

האילוץ לפי תנאי הבעיה: $x > 4$, x מספר שלם. המשוואות המתאימות הן:

$$1.5(x-4) = x+9 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x+9}{x-4} = 1.5 \quad \text{ג.}$$

משימה 2 - א

האילוץ לכל המשוואות, לפי תנאי הבעיה: $a > 7$, $b > 7$, a ו- b מספרים טבעיים.

▪ מתנ"ס ארזים

משוואות אפשריות: $a-b=6$, $a-6=b$, $a=b+6$, או כל משוואה שקולה להן.

▪ מתנ"ס אלונים

משוואות אפשריות: $b-a=7$, $b-7=a$, $b=a+7$, או כל משוואה שקולה להן.

▪ מתנ"ס ברושים

משוואות אפשריות: $\frac{a}{b} = 4$, $a = 4b$, $b = \frac{1}{4}a$, או כל משוואה שקולה להן.

▪ מתנ"ס דקלים

משוואות אפשריות: $\frac{b}{a} = 3$, $b = 3a$, $a = \frac{1}{3}b$, או כל משוואה שקולה להן.

משימה 2 - ב

משוואות אפשריות: $\frac{60}{x+2} + 5 = \frac{60}{x}$ או $\frac{60}{x+2} = \frac{60}{x} - 5$ או $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+2} = 5$ או כל משוואה שקולה אחרת.

אילוץ הבעיה: $x > 0$, x מספר שלם.

משימה 3

א.

<u>תיאור מילולי</u>		<u>משוואה</u>	
a קטן ב-5 מ- b	b גדול ב-5 מ- a	$a + 5 = b$	דוגמה:
a גדול פי 5 מ- b	b קטן פי 5 מ- a	$b \cdot 5 = a$.1
a גדול ב-8 מ- b	b קטן ב-8 מ- a	$a - 8 = b$.2
a קטן פי 8 מ- b	b גדול פי 8 מ- a	$a \cdot 8 = b$.3

ב.

<u>משוואות אפשריות</u>		<u>תיאור מילולי</u>	
$x - 3 = 4x + 7 - 5$	$x - 3 + 5 = 4x + 7$	$x - 3$ קטן ב-5 מ- $4x + 7$	דוגמה:
$x - 3 - 5 = 4x + 7$	$x - 3 = 4x + 7 + 5$	$x - 3$ גדול ב-5 מ- $4x + 7$.1
$(x - 3) : 5 = 4x + 7$	$x - 3 = (4x + 7) \cdot 5$	$x - 3$ גדול פי 5 מ- $4x + 7$.2
$(x - 3) \cdot 5 = 4x + 7$	$x - 3 = (4x + 7) : 5$	$x - 3$ קטן פי 5 מ- $4x + 7$.3

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

להלן הצעות לשתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

- ❖ פעילות 1: **מזהים ובונים משוואות.**
- ❖ פעילות 2: **תיאור מילולי של יחסים בין גדלים.**

פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
	V	לתלמידים שטעו בזיהוי או בבניית משוואה מתאימה
V		לתלמידים שהתקשו בתיאור מילולי של יחסים בין גדלים



פעילות 1: מזהים ובונים משוואות

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: **מזהים ובונים משוואות.**
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1: מזהים ובונים משוואות

דף פעילות 1: מזהים ובונים משוואות

א. במסגרת שלפניכם בעיה. לאחר המסגרת תמצאו את התחלת פתרון הבעיה על-ידי **שחר**, וארבע משוואות. עליכם לבחור את כל המשוואות המתאימות לבעיה ולהסביר את בחירתכם.

מכונית ומשאית נסעו כל אחת מרחק 300 ק"מ.
מהירות המשאית הייתה קטנה ב-40 קמ"ש ממהירות המכונית.
זמן הנסיעה של המשאית היה ארוך בשעתיים מזמן הנסיעה של המכונית.
מצאו את המהירויות של המכונית ושל המשאית.

שחר התחיל לפתור את הבעיה, כך:

x מייצג את מהירות המכונית ($x > 0$)
 $x - 40$ מייצג את מהירות המשאית ($x > 40$)

מרחק (ק"מ)	זמן (שעות)	מהירות (קמ"ש)	
300	$\frac{300}{x}$	x	מכונית
300	$\frac{300}{x - 40}$	$x - 40$	משאית

בכל המשוואות שלמטה $x > 40$. סמנו את כל המשוואות המתאימות לבעיה.

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x - 40} - 2 \quad .1$$

$$\frac{300}{x} - 2 = \frac{300}{x - 40} \quad .2$$

$$\frac{300}{x - 40} - \frac{300}{x} = 2 \quad .3$$

$$\frac{300}{x} + 2 = \frac{300}{x - 40} \quad .4$$

הסבירו כיצד בחרתם את המשוואות המתאימות לבעיה.

ב. במסגרת שלפניכם בעיה. לאחר המסגרת תמצאו את התחלת פתרון הבעיה על-ידי **שירה**.
המשיכו את הפתרון של שירה, ומצאו את אורכי צלעות המלבן המקורי.

נתון מלבן שצלע אחת שלו ארוכה ב-4 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
מאריכים כל אחת מצלעות המלבן ב-2 ס"מ.
מתקבל מלבן חדש ששטחו גדול ב-40 סמ"ר משטח המלבן המקורי.
מהם אורכי צלעות המלבן המקורי?

שירה התחילה לפתור את הבעיה כך:

שטח (סמ"ר)	אורכי צלעות (ס"מ)	
$x(x+4)$	x מייצג את אורך הצלע הקצרה. ($x \geq 0$). $x+4$ מייצג את אורך הצלע הארוכה.	המלבן המקורי
$(x+2)(x+6)$	$x+2$ מייצג את אורך הצלע הקצרה. $x+6$ מייצג את אורך הצלע הארוכה.	המלבן החדש

1. רשמו משוואה מתאימה לבעיה: _____ אילוץ הבעיה: $x \geq 0$.
פתרון המשוואה:

2. רשמו משוואה נוספת מתאימה לבעיה: _____ אילוץ הבעיה: $x \geq 0$.

3. הסבירו מדוע שתי המשוואות מתאימות. _____

4. מצאו את אורכי צלעות המלבן המקורי.
אורך צלע קצרה: _____ אורך צלע ארוכה: _____

[לפעילות 1 מוגשת](#)

דיון

לסיכום דנים בנקודה הבאה:

- ❖ דרכים לזיהוי ולבנייה של משוואות המתארות יחסים בין גדלים, כאשר יחסים אלה מוצגים בבעיה באופן מילולי. (למשל, כדי ליצור שוויון מקטינים את הביטוי המייצג את הכמות הגדולה יותר או מגדילים את הביטוי המייצג את הכמות הקטנה יותר).



פעילות 2: תיאורים של יחסים בין גדלים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 2: **תיאורים של יחסים בין גדלים**.
2. דיון.

דף פעילות 2: תיאורים של יחסים בין גדלים

א. בכל סעיף נתון (במסגרת) תיאור מילולי של קשר בין שני גדלים חיוביים (גדולים מ-3) המיוצגים על-ידי a ו- b . תנו דוגמה מספרית לשני גדלים המקיימים את היחס שבמסגרת, וסמנו את האי-שוויון המתאים ליחס זה.

1. a גדול ב-3 מ- b דוגמה מספרית: $a = \underline{\quad}$ $b = \underline{\quad}$
 סמנו אי שוויון מתאים: $a > b$, $b > a$

2. a קטן פי 3 מ- b דוגמה מספרית: $a = \underline{\quad}$ $b = \underline{\quad}$
 סמנו אי שוויון מתאים: $a > b$, $b > a$

ב. בכל סעיף נתון (במסגרת) תיאור מילולי של קשר בין שני גדלים חיוביים (גדולים מ-3) המיוצגים על-ידי a ו- b . בהמשך תמצאו הצעות של משוואות מתאימות לתיאור זה, שרשמו תלמידים. עליכם להחליט מי מהתלמידים צודק ומי טועה (ייתכן שיותר מתלמיד אחד צודק).

1. a קטן ב-3 מ- b עדי רשם את המשוואה: $a + 3 = b$
 שחר רשם את המשוואה: $a = b + 3$
 שיר רשם את המשוואה: $b - a = 3$
 מי צודק? עדי שחר שיר
 הסבירו. _____

2. a גדול פי 3 מ- b טומי רשם את המשוואה: $a = b + 3$
 יולי רשם את המשוואה: $3a = b$
 אלכס רשם את המשוואה: $b = 3a$
 מי צודק? טומי יולי אלכס
 הסבירו. _____

ג. בטור הימני למטה נתונים תיאורים מילוליים של קשרים בין מספר המכונות ומספר האופנועים בארבעה חניונים. סברו כל תיאור מילולי **לכל** המשוואות המתאימות לו בטור השמאלי.
 x מייצג את מספר המכונות, y מייצג את מספר האופנועים, $x > 2$, $y > 2$, $x - y = 1$ מספרים שלמים.

משוואה מתאימה

תיאור מילולי

$y = x + 2$ •

- מספר האופנועים גדול פי 2 ממספר המכונות.

$y + 2 = x$ •

$y = x - 2$ •

- מספר האופנועים קטן פי 2 ממספר המכונות.

$y - 2 = x$ •

$y = 2 \cdot x$ •

- מספר האופנועים גדול ב-2 ממספר המכונות.

$2 \cdot y = x$ •

$y = \frac{1}{2} \cdot x$ •

- מספר האופנועים קטן ב-2 ממספר המכונות.

$\frac{1}{2} \cdot y = x$ •

ד. בטור הימני למטה נתונות משוואות. לכל משוואה השלימו בטור השמאלי שני תיאורים מילוליים מתאימים.

תיאור מילולי 2	תיאור מילולי 1	משוואה	
$x \cdot 30$ גדול ב-8 מ- x	x קטן ב-8 מ- $x \cdot 30$	$x + 8 = 30 \cdot x$	דוגמה:
$x \cdot 6$	$6 \cdot x$	$x - 5 = 6 \cdot x$	1.
$x + 3$	$x + 3$	$x + 3 = 15 \cdot x$	2.
$x - 8$	$x - 8$	$(x - 8) \cdot 5 = x$	3.

לפעילות 2 מונגשת

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ יש אפשרויות שונות למשוואות מתאימות לתיאור מילולי של קשר בין גדלים. (למשל, לקשר a גדול ב-5 מ- b מתאימות המשוואות הבאות: $a = b + 5$, $a - 5 = b$ או $a - b = 5$).
- ❖ לפעמים קל יותר לרשום תחילה אי-שוויון המבטא את הקשר בין הגדלים ולאחר מכן לרשום משוואה מתאימה. (למשל: למשל, לקשר a גדול ב-5 מ- b , אפשר לרשום תחילה $a > b$ ואז קל יותר לשים לב לאופי הקשר בין a ל- b).
- ❖ יש אפשרויות שונות לתיאורים מילוליים של קשר בין גדלים המיוצג על-ידי משוואה. (למשל, למשוואה $a = b + 5$ מתאים התיאור המילולי: a גדול ב-5 מ- b , וגם התיאור: b קטן ב-5 מ- a).