



# תיק משימטיקה

## תנאים מספיקים: מלבן

להגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

© כל הזכויות שמורות

## תוכן עניינים

|    |                                                     |
|----|-----------------------------------------------------|
| 3  | פתיחה                                               |
| 3  | מטרות התיק                                          |
| 3  | זמני עבודה משוערים                                  |
| 3  | החומרים והעזרים הדרושים                             |
| 4  | רקע                                                 |
| 4  | הצעה למהלך העבודה                                   |
| 5  | עבודה על משימת הערכה                                |
| 6  | משימה: האם המרובע הוא מלבן?                         |
| 8  | הערכת תוצרי תלמידים                                 |
| 10 | פעילות בעקבות ההערכה                                |
| 10 | פעילות: תכונות ותנאים מספיקים                       |
| 11 | עבודה על דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק א' |
| 11 | דיון                                                |
| 12 | עבודה על דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק ב' |
| 12 | דיון                                                |

## פתיחה



### מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקבוע אם תנאים נתונים מספיקים כדי להסיק מסקנה גיאומטרית מסוימת, ולתת מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק במלבן.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לקבוע אם תנאים נתונים הם מספיקים כדי להסיק שמרובע המקיים תנאים אלה הוא מלבן.
- ❖ לנמק באמצעות דוגמה נגדית, במקרה שהתנאים אינם מספיקים



### זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת ההערכה: 25-30 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: כ-60 דקות.



### החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף המשימה: [האם המרובע הוא מלבן?](#)

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ לפעילות חלק א'
  - דף הפעילות: [תכונות ותנאים מספיקים - חלק א'](#).
  - יישומון: [שלוש זוויות שוות](#).
- ❖ לפעילות חלק ב'
  - דף הפעילות: [תכונות ותנאים מספיקים - חלק ב'](#).
  - יישומונים:

[זוג צלעות נגדיות שוות ואלכסונים שווים – סעיף א'](#)

[זוג זוויות סמוכות ישרות ואלכסונים שווים – סעיף ב'](#)

[אלכסונים שווים ואחד חוצה את השני – סעיף ג'](#)

[זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג זוויות נגדיות ישרות – סעיף ד'](#)



## רקע

פתרון בעיות הוכחה בגיאומטריה כרוך בהסקת מסקנות מתנאים נתונים. למשל, בהינתן מקבילית שאלכסוניה שווים באורכם, ניתן להסיק שהמקבילית היא מלבן.

קושי נפוץ שיש לתלמידים בהקשר זה הוא הסקת מסקנות כשהתנאים הנתונים אינם מספיקים כדי להסיק אותן. למשל, בהינתן מרובע בעל זוג זוויות נגדיות ישרות, תלמידים נוטים להסיק שהמרובע הוא מלבן. אחד הגורמים לקושי זה הוא חוסר הבחנה בין תכונות של צורות גיאומטריות לבין **תנאים מספיקים** לקבלת צורה מסוג מסוים. למשל, במלבן האלכסונים שווים באורכם, אולם לא כל מרובע בעל אלכסונים שווים באורכם הוא מלבן. כך לדוגמה, גם בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים באורכם. כלומר, התנאי של שוויון האלכסונים במרובע אינו מספיק כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן (עניין זה קשור גם לחוסר הבחנה בין משפט לבין המשפט ההפוך לו, המטופל במספר תיקי משימטיקה אחרים). קושי נוסף הקשור להסקת מסקנות מתנאים שאינם מספיקים, נובע מן הקושי להשתמש בדוגמה נגדית כדי להוכיח שהתנאים הנתונים אינם מספיקים להסקת מסקנה מסוימת.

התיק **תנאים מספיקים: מלבן** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בהסקת מסקנות מתנאים נתונים בהקשר של מלבן, ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימת הערכה: [האם המרובע הוא מלבן?](#)
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

## עבודה על משימת הערכה

בתיק זה משימת הערכה אחת: **האם המרובע הוא מלבן?**

במשימה התלמידים נדרשים לקבוע אם הנתונים שלפניהם מספיקים כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן.



## משימה: האם המרובע הוא מלבן?

### משימה: האם המרובע הוא מלבן?

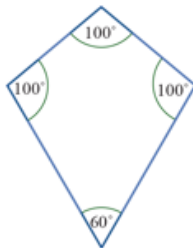
בכל אחד מהסעיפים הבאים מובאת טענה שמרובע המקיים תכונה מסוימת הוא מלבן. אחרי כל טענה מובאים הסברים של תלמידים לכך שאפשר, או אי אפשר, להסיק שהמרובע הנתון הוא מלבן. קבעו בכל סעיף אם הטענה נכונה, ואילו מההסברים משכנעים. (ייתכן שיותר מהסבר אחד בכל סעיף משכנע.)

#### 1. טענה: מרובע שבו שלוש זוויות שוות בגודלן הוא מלבן.

**יפה אמרה:** הטענה נכונה. הדוגמה שבשרטוט מראה שהמרובע הוא מלבן.



**שירה אמרה:** הטענה לא נכונה. לא ניתן להסיק שהמרובע הוא מלבן. יש לי דוגמה נגדית לכך בשרטוט:



**אילו הסברים משכנעים?**

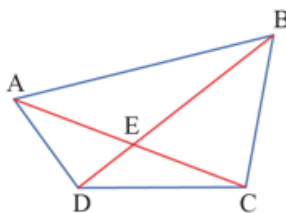
☐ ההסבר של יפה ☐ ההסבר של שירה

#### 2. טענה: מרובע שבו האלכסונים שווים באורכם הוא מלבן.

**חיים אמר:** הטענה נכונה. במלבן האלכסונים שווים באורכם. אז אם האלכסונים שווים באורכם המרובע חייב להיות מלבן.

**אסתר אמרה:** הטענה לא נכונה. המרובע הזה לא חייב להיות מלבן. גם בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים באורכם והוא אינו מלבן.

**יואל אמר:** הטענה לא נכונה. לא מספיק שהאלכסונים במרובע יהיו שווים באורכם כדי שהמרובע יהיה מלבן. יש לי דוגמה נגדית לכך בשרטוט:



האלכסונים של המרובע שבנתי שווים באורכם (אורך כל אחד מהם 5 יחידות), אבל המרובע אינו מלבן.

**אילו הסברים משכנעים?**

☐ ההסבר של חיים ☐ ההסבר של אסתר ☐ ההסבר של יואל

3. טענה: **מרובע שבו זווית אחת ישרה והאלכסונים חוצים זה את זה, הוא מלבן.**

**שלומי אמר:** הטענה אינה נכונה. זווית אחת ישרה זה לא מספיק כדי שיתקבל מלבן. צריך לפחות שתי זוויות ישרות.

**אנה אמרה:** הטענה נכונה. המרובע הוא מלבן כי אם האלכסונים חוצים זה את זה זו מקבילית, ומקבילית עם זווית ישרה היא מלבן.

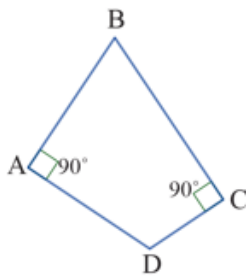
אילו הסברים משכנעים?

☐ ההסבר של שלומי ☐ ההסבר של אנה

4. טענה: **מרובע שבו זוג זוויות נגדיות ישרות הוא מלבן.**

**אלכס אמר:** הטענה נכונה. כי מהנתון נובע שלמרובע יש שתי זוויות נגדיות שוות בגודלן. אם במרובע יש שתי זוויות נגדיות שוות בגודלן אז מתקבלת מקבילית, ואם הן ישרות אז מתקבל מלבן.

**סופיה אמרה:** הטענה לא נכונה. המרובע אינו בהכרח מלבן. המרובע שבשרטוט הוא דוגמה נגדית לכך:



אילו הסברים משכנעים?

☐ ההסבר של אלכס ☐ ההסבר של סופיה

[למשימה מוגשת](#)

## הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

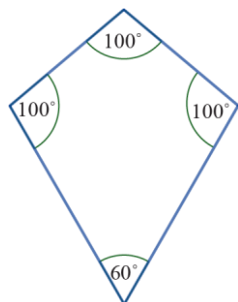
| שם התלמיד/ה | כל התשובות נכונות | טעו בקביעה אם התנאים הנתונים מספיקים | הערות |
|-------------|-------------------|--------------------------------------|-------|
| תלמיד 1     |                   | ✓                                    |       |
| תלמיד 2     | ✓                 |                                      |       |
| תלמיד 3     |                   |                                      |       |
| סך הכול     |                   |                                      |       |

### לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון שלהלן:

#### 1. הטענה אינה נכונה.

ההסבר של יפה אינו משכנע. היא משתמשת בדוגמה כדי להראות שהטענה נכונה אך הסבר כזה אינו לגיטימי. אי אפשר להוכיח טענה בעזרת דוגמה המראה שהטענה מתקיימת בה. הוכחה של טענה כזו מחייבת שהטענה תהיה נכונה לכל מקרה פרטי.

ההסבר של שירה משכנע. היא משתמשת בדוגמה נגדית. מרובע בעל שלוש זוויות שוות בגודלן, אינו בהכרח מלבן. כל מרובע ששלוש מזוויותיו שוות בגודלן וסכומן קטן מ- $360^\circ$  יכול להיות דוגמה נגדית, הפוסלת את נכונות הטענה.



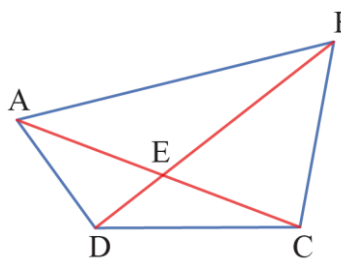
#### 2. הטענה אינה נכונה. מרובע שאלכסוניו שווים באורכם אינו בהכרח מלבן.

ההסבר של חיים לא משכנע. הוא משתמש במשפט הפוך ומסתמך על תכונת המלבן כדי להסביר שהמרובע הוא מלבן.

ההסברים של יואל ואסתר משכנעים. הם משתמשים בהסברים שלהם בדוגמאות נגדיות. אסתר מסבירה את דבריה בעזרת דוגמה נגדית (באופן מילולי).

יואל בונה דוגמה נגדית כהסבר.





על מנת לבנות דוגמה נגדית, משרטטים שני קטעים שווים באורכם, כך שיחתכו זה את זה (ראו בשרטוט AC חותך את BD ו-  $BD = AC$ ), ומשלימים את קצותיהם למרובע ABCD.

במרובע שבשרטוט מתקיימים התנאים שבטענה אך הם אינם מספיקים לקבלת מלבן.

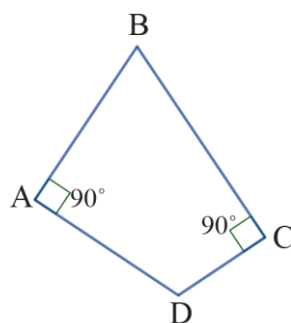
### 3. הטענה נכונה.

שלומי טועה. ההסבר שלו חסר. הוא לא מסתמך על כל הנתונים. מתעלם מהנתון שאלכסוני המרובע חוצים זה את זה.

ההסבר של אנה משכנע. המרובע הוא מלבן. נתון שהאלכסונים חוצים זה את זה לכן ניתן להסיק שהמרובע הוא מקבילית. ומקבילית בעלת זווית ישרה היא מלבן.

### 4. הטענה אינה נכונה.

ההסבר של אלכס אינו משכנע. אלכס משתמש בתכונה של המלבן כדי לשכנע שהנתונים מספיקים לקבל מלבן. ההסבר של סופיה משכנע. מרובע בעל זוג זוויות נגדיות ישרות אינו בהכרח מלבן. המרובע יכול להיות דלתון או מרובע אחר כבשרטוט.



## פעילות בעקבות ההערכה



### פעילות: תכונות ותנאים מספיקים

#### שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: **תכונות ותנאים מספיקים - חלק א'.**
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות: **תכונות ותנאים מספיקים - חלק ב'.**
4. דיון.

## עבודה על דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק א'

### דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק א'

1. במסגרת שלפניכם טענה שנדונה במשימת הערכה. פתחו את היישומון: **שלוש זוויות שוות**, צרו בעזרת היישומון שלוש דוגמאות נגדיות לטענה. וקעתיקו אותן.

טענה: **מרובע שבו שלוש זוויות שוות בגודלן הוא מלבן.**

2. במסגרת שלפניכם טענה. הסבירו מדוע הטענה נכונה.

טענה: **אורך אלכסון במלבן גדול מאורך כל אחת מצלעות המלבן.**

הסבר: \_\_\_\_\_

3. במסגרת שלפניכם טענה. הסבירו מדוע הטענה אינה נכונה.

טענה: **מרובע שבו האלכסון גדול באורכו מכל אחת מצלעותיו, הוא מלבן.**

הסבר: \_\_\_\_\_

[לפעילות חלק א' מוגשת](#)

## דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הבחנה בין תכונות מלבן לבין תנאים מספיקים לקבלת מלבן.
- ❖ אין להסיק מקיום תכונות של צורה שהתכונות האלה הן תנאים מספיקים לקבלת הצורה.
- ❖ כדי להסיק שתנאים מסוימים המתקיימים במרובע אינם מספיקים לקבלת מלבן מספיק להביא **דוגמה נגדית**, כלומר דוגמה של מרובע המקיים את התנאים והיא אינו מלבן.

**דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק ב'**

א. במרובע ABCD יש זוג צלעות נגדיות שוות באורכן וגם האלכסונים שווים באורכם.

**האם המרובע ABCD הוא מלבן?**

אם כן, נמקו. אם לא, הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.

תוכלו להיעזר ביישומון: [זוג צלעות נגדיות שוות ואלכסונים שווים – סעיף א'](#)

ב. במרובע ABCD יש זוג זוויות סמוכות ישרות והאלכסונים שווים באורכם.

**האם המרובע ABCD הוא מלבן?**

אם כן, נמקו. אם לא, הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.

תוכלו להיעזר ביישומון: [זוג זוויות סמוכות ישרות ואלכסונים שווים – סעיף ב'](#)

ג. במרובע ABCD האלכסונים שווים באורכם, ואחד מהם חוצה את השני.

**האם המרובע ABCD הוא מלבן?**

אם כן, נמקו. אם לא, הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.

תוכלו להיעזר ביישומון: [אלכסונים שווים ואחד חוצה את השני – סעיף ג'](#)

ד. במרובע ABCD זוג צלעות נגדיות מקבילות, וזוג זוויות נגדיות ישרות.

**האם המרובע ABCD הוא מלבן?**

אם כן, נמקו. אם לא, הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.

תוכלו להיעזר ביישומון: [זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג זוויות נגדיות ישרות – סעיף ד'](#)

[לפעילות חלק ב' מוגשת](#)

## דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ כדי להסיק שתנאים מסוימים מספיקים לקבלת מרובע מסוג מסוים, יש צורך בהוכחה מאחר וטענה נכונה רק אם היא נכונה לכל המקרים הפרטיים.
- ❖ כדי להסיק שתנאים מסוימים אינם מספיקים לקבלת צורה מסוימת מספיק להביא דוגמה המקיימת את התנאים והיא אינה הצורה המסוימת.

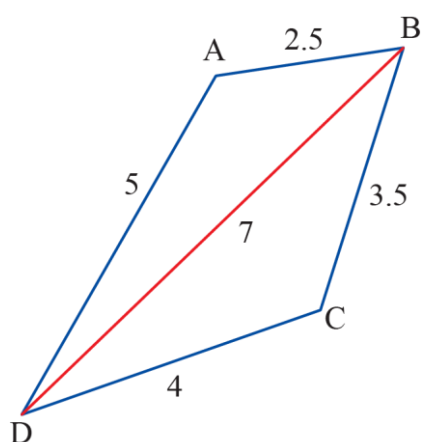
## הצעה לפתרון דפי הפעילות

### פתרון דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק א'

1. הטענה אינה נכונה. התנאי שלוש זוויות ישרות במרובע הוא **תנאי לא מספיק** כדי שהמרובע יהיה מלבן. כל דוגמה של מרובע ששלוש מזוויותיו שוות בגודלן וסכומן קטן מ-  $360^\circ$  יכול להיות דוגמה נגדית, הפוסלת את נכונות הטענה. בעזרת היישומון אפשר למצוא הרבה דוגמאות נגדיות.

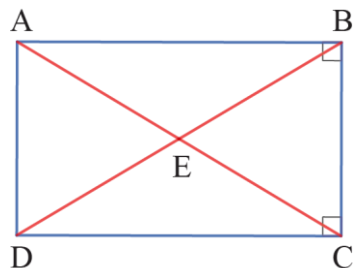
2. אפשר להצדיק את הטענה "אורך אלכסון במלבן גדול מאורך כל אחת מצלעות המלבן", באמצעות משפט פיתגורס, או באמצעות המשפט "אם במשולש זווית אחת גדולה מזווית אחרת, אז הצלע מול הזווית הגדולה יותר ארוכה מאורך הצלע שמול הזווית האחרת".

3. במקרה זה, התנאי אינו מספיק כדי להוכיח שהמרובע הוא מלבן. אפשר ליצור דוגמאות נגדיות, כמו בשרטוט.



**פתרון דף הפעילות: תכונות ותנאים מספיקים - חלק ב'**

1. המרובע אינו בהכרח מלבן. דוגמה: המרובע יכול להיות טרפז שווה שוקיים. במקרה זה אפשר להוכיח שהמרובע יכול להיות רק טרפז שווה שוקיים או מלבן.



2. במקרה זה ניתן להוכיח שהמרובע הוא מלבן.

**נתון:** מרובע ABCD

האלכסונים AC ו- BD שווים באורכם

$$\angle ABC = \angle DCB$$

**צ"ל:** המרובע הוא מלבן

הוכחה:

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (לפי ניצב ויתר)}$$

$\Downarrow$

$$AB = DC \text{ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות באורכן)}$$

$$AB \parallel DC \text{ (כי סכום זוויות חד-צדדיות שווה ל- } 180^\circ \text{)}$$

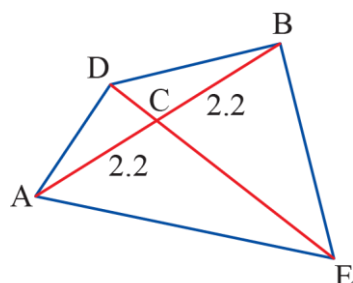
$\Downarrow$

ABCD מקבילית (מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית)

$\Downarrow$

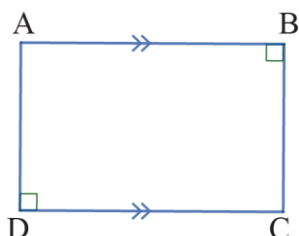
ABCD מלבן (מקבילית שיש בה זווית ישרה היא מלבן).

3. המרובע אינו בהכרח מלבן.



דוגמה נגדית: דלתון או מרובע אחר שאלכסוניו שווים באורכם ואחד חוצה את השני. (בשרטוט אורך אלכסון DE הוא 4.4 יחידות, והוא שווה באורכו לאלכסון AB וגם חוצה אותו).

4. המרובע הוא בהכרח מלבן.



הוכחה:

גם זווית  $\angle BCD$  ישרה כי הזוויות  $\angle ABC$  ו-  $\angle BCD$

הן זוויות חד-צדדיות בין מקבילים,

וכך גם זוויות ADC ו- DAB הן חד צדדיות.