



תיק משימטיקה

תכונות של פונקציה

ריבועית

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
7	משימה 1: מן התכונה אל הפונקציות
8	משימה 2: מן הפונקציה אל התכונות
9	הערכת תוצרי תלמידים
11	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
12	פעילות 1: תכונות וייצוגן גרפי
12	עבודה על דף פעילות 1: תכונות וייצוגן הגרפי
13	דיון
14	פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות
14	עבודה על דף פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות
15	דיון

פתיחה¹



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לזהות ולהשתמש בתכונות מאפיינות של פונקציה ריבועית המופיעה בייצוגים אלגבריים וגרפיים, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לזהות תכונות מאפיינות של פונקציה ריבועית המופיעות בייצוגים אלגבריים שונים: ציר סימטריה, קודקוד, ונקודות אפס.
- ❖ להשתמש בתכונות מאפיינות של פונקציה ריבועית המופיעה בייצוג אלגברי, כדי לשרטט סקיצה של הגרף שלה.
- ❖ לזהות תכונות מאפיינות של פונקציה ריבועית המופיעה בייצוג גרפי.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות ההערכה: 25-30 דקות.
- ❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [מן התכונה אל הפונקציות](#).
- ❖ דף משימה 2: [מן הפונקציה אל התכונות](#).

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- ❖ דף פעילות 1: [תכונות וייצוגן הגרפי](#).

לפעילות 2

- ❖ דף פעילות 2: [ייצוגים שונים ותכונות](#).
- ❖ יישומונים:

- [שתי הזזות](#).
- [הקודקוד וציר הסימטריה](#).
- [נקודות אפס של פונקציה ריבועית](#).

¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בתכונות מאפיינות של פונקציות. שני תיקים – גילוי גרף בעזרת שאלות וגילוי גרף בעזרת שאלות: [פונקציות קוויות וריבועיות](#) – עוסקים בקשר בין תכונות מאפיינות של פונקציה ובין סקיצה של גרף הפונקציה. התיק [תכונות של פונקציה ריבועית](#) מתמקד בזיהוי ושימוש בתכונות מאפיינות של פונקציה ריבועית בייצוגים אלגבריים וגרפיים. התיק [תכונות של גרפים](#) מתמקד בביתוח איכותני של גרפים של פונקציות פולינום.



במסגרת העיסוק בפונקציות משתמשים בתכונות מאפיינות של פונקציות כמו: נקודות קיצון, נקודות אפס, תחומי עלייה וירידה ועוד. כאשר עוסקים במשפחות מסוימות של פונקציות, כמו פונקציות לינאריות ופונקציות ריבועיות, משתמשים גם בתכונות מאפיינות ייחודיות למשפחות בהן עוסקים. למשל, כאשר חוקרים פונקציות ריבועיות המופיעות בייצוג אלגברי ומשרטטים את הגרפים שלהן, משתמשים לא פעם בתכונות מאפיינות כמו ציר הסימטריה. ייצוג גרפי של פונקציה ריבועית מאפשר זיהוי, ללא צורך בעריכת חישובים, של תכונות מאפיינות כמו מספר נקודות האפס, איפיון הקודקוד כנקודת מינימום או מקסימום, והרביעים בהם עובר ציר הסימטריה. ייצוגים אלגבריים שונים של פונקציות ריבועיות מאפשרים גם הם זיהוי של תכונות מאפיינות שונות, ללא צורך בעריכת חישובים. לדוגמה, כאשר פונקציה ריבועית מופיעה בייצוג אלגברי-סטנדרטי, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, אין צורך לערוך חישובים כדי לזהות את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y. באופן דומה, כאשר פונקציה ריבועית מופיעה בייצוג אלגברי של מכפלה, $f(x) = a(x-t)(x-r)$, $a \neq 0$, ניתן לזהות את שיעורי נקודות האפס בלי לערוך חישובים. בשני המקרים האלה, ניתן גם לזהות אם יש לפונקציה מינימום או מקסימום בלי לערוך חישובים. עם זאת, בכל אחד מן הייצוגים האלגבריים האלה יש תכונות שאינן ניתנות לזיהוי ללא חישובים, למשל מספר נקודות האפס של פונקציה המופיעה בייצוג אלגברי-סטנדרטי.

קשיים אופייניים של תלמידים בהקשר זה כרוכים בזיהוי תכונות מאפיינות של פונקציות ריבועיות המופיעות בייצוג אלגברי מסוים, בשרטוט סקיצות של גרפים מתאימים על-פי תכונות אלה, ובזיהוי תכונות מאפיינות מסקיצות של פרבולות.

התיק **תכונות של פונקציה ריבועית** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

▪ משימה 1: [מנ התכונה אל הפונקציות](#).

▪ משימה 2: [מנ הפונקציה אל התכונות](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1: **מנ התכונה אל הפונקציות.**

❖ משימה 2: **מנ הפונקציה אל התכונות.**

בשתי המשימות התלמידים מתבקשים לזהות תכונות של פונקציות ריבועיות בייצוגים אלגבריים שונים, ולשרטט סקיצות של פרבולות על-פי התכונות שזיהו. התכונות בהן מתמקדים הן: (1) מקום ציר הסימטריה, (2) מקום הקודקוד וסוגו, ו-(3) מספר נקודות האפס.



משימה 1: מן התכונה אל הפונקציות

משימה 1: מן התכונה אל הפונקציות

לפניכם רשימה של שש פונקציות ריבועיות:

$$h(x) = -(x+4)^2$$

$$g(x) = 2x^2 - 10x$$

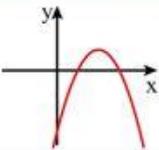
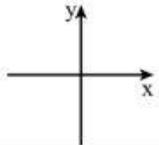
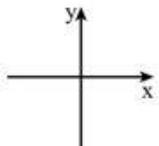
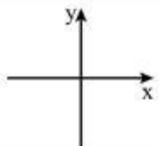
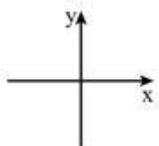
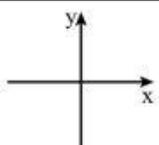
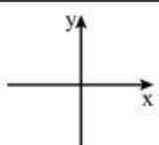
$$m(x) = x^2 - 4$$

$$p(x) = x^2 + 6x + 10$$

$$t(x) = -(x-3)(x-5)$$

$$f(x) = (x-2)^2 + 5$$

השלימו את הטבלה.

פונקציות מהרשימה המקיימות את התכונה	סקיצה של פרבולה המקיימת את התכונה	התכונה	
h, t		לפונקציה יש מקסימום	דוגמה:
		ציר ה-y הוא ציר הסימטריה	א.
		ציר הסימטריה חותך את ציר ה-x בצד השלילי	ב.
		הקודקוד נמצא על ציר ה-x	ג.
		הקודקוד נמצא ברביע הראשון (לא על אחד הצירים)	ד.
		הגרף אינו חותך את ציר ה-x ואינו נוגע בו (לפונקציה אין נקודות אפס)	ה.
		הגרף חותך את ציר ה-x פעמיים (לפונקציה יש שתי נקודות אפס)	ו.

[למשימה 1 מוגשת](#)

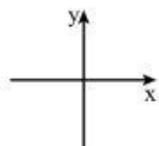
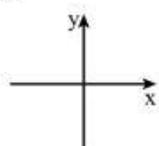
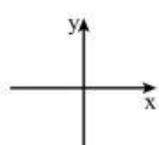
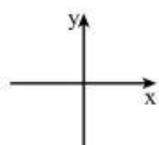


משימה 2: מן הפונקציה אל התכונות

משימה 2: מן הפונקציה אל התכונות

בטבלה רשומות חמש פונקציות ריבועיות. השלימו בטבלה סקיצה של גרף ותכונות לכל פונקציה.

השלימו רק תכונות שתוכלו למלא מבלי לערוך חישובים הדורשים כתיבה או שימוש במחשבון.

מספר נקודות האפס	שיעורי נקודת הקודקוד	משוואת ציר הסימטריה	מינימום או מקסימום	הפונקציה	
				$g(x) = -(x+7)^2$ 	א
				$p(x) = 2x^2 + 12$ 	ב
				$f(x) = 2x^2 + 12x$ 	ג
				$h(x) = (x-6)(x-10)$ 	ד

[למשימה 2 מוגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

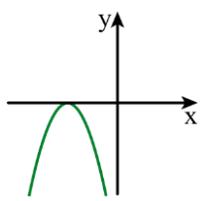
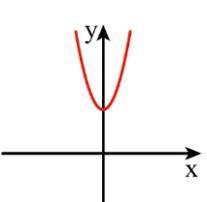
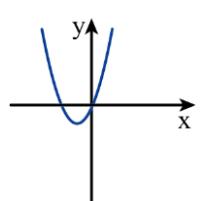
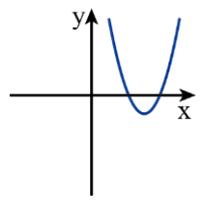
לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובות נכונות	טעו בשרטוט גרף על-פי תכונות	טעו בזיהוי התכונות	הערות
תלמיד א	✓			
תלמיד ב		✓	✓	
תלמיד ג		✓	✓	
סך-הכול				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1 מן התכונה אל הפונקציות

הפונקציות	התכונה	
m	ציר ה- y הוא ציר הסימטריה	א.
h, p	ציר הסימטריה חותך את ציר ה- x בצד השלילי	ב.
h	הקודקוד נמצא על ציר ה- x .	ג.
f, t	הקודקוד נמצא ברביע הראשון (לא על אחד הצירים)	ד.
f, p	הגרף אינו חותך את ציר ה- x ואינו נוגע בו (לפונקציה אין נקודות אפס)	ה.
g, m, t	הגרף חותך את ציר ה- x פעמיים (לפונקציה יש שתי נקודות אפס)	ו.

מספר נקודות האפס	שיעורי נקודת הקודקוד	משוואת ציר הסימטריה	מינימום או מקסימום	הפונקציה	
1	$(-7, 0)$	$x = -7$	מקסימום	$g(x) = -(x + 7)^2$ 	א
0	$(0, 12)$	$x = 0$	מינימום	$p(x) = 2x^2 + 12$ 	ב
2			מינימום	$f(x) = 2x^2 + 12x$ 	ג
2			מינימום	$k(x) = (x - 6)(x - 10)$ 	ד

הערה: בסעיף ג שרטוט הגרף הוא לא מייד, אבל ניתן למצוא מידע על הגרף על פי שיקולים כמו למשל פירוק לגורמים שמראה שיש שתי נקודות אפס שאחת מהן בראשית הצירים, והשניה בצידו השלילי של ציר ה- x . בסעיף ד ניתן למצוא את שיעור ה- x של הקודקוד על-פי ממוצע בין שיעורי ה- x של נקודות האפס.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
	v	לתלמידים שטעו בשרטוט הגרף
v	v	לתלמידים שטעו בזיהוי התכונות



פעילות 1: תכונות וייצוגן גרפי

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: תכונות וייצוגן הגרפי.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1: תכונות וייצוגן הגרפי

דף פעילות 1: תכונות וייצוגן הגרפי

בטבלה רשומות תכונות של חמש פונקציות ריבועיות.

שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה לפי התכונות הנתונות, והשלימו בעזרת הסקיצה את התכונות החסרות.

סקיצה	מספר נקודות האפס	ציר הסימטריה	מקום נקודת הקודקוד	מינימום או מקסימום	הפונקציה
		חותך את ציר ה-x בחלקו ה_____	ברביע השני	מקסימום	f
			על ציר ה-x בחלקו החיובי	מינימום	g
	2	ציר ה-y		מקסימום	h
	0		ברביע הראשון		k
			בראשית הצירים	מינימום	p

[לפעילות 1 מונגשת](#)

מתייחסים לנקודות הבאות:

- ❖ כיצד מתבטאות בגרף התכונות השונות של פונקציות? אפשר להיעזר בשאלות כדוגמת השאלות הבאות:
 - נקודת הקודקוד של פרבולה נמצאת על ציר ה- y . מה תוכלו לדעת על ציר הסימטריה שלה? על מספר נקודות האפס שלה?
 - לפונקציה ריבועית יש נקודת מקסימום שנמצאת על ציר ה- x . מה תוכלו לדעת על ציר הסימטריה שלה? על מספר נקודות האפס שלה?
 - לפונקציה ריבועית יש נקודת מינימום שנמצאת ברביע השני. מה תוכלו לדעת על ציר הסימטריה שלה? על מספר נקודות האפס שלה?
 - הגרף של פונקציה ריבועית חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי וחותך את ציר ה- y בחלקו השלילי. מה תוכלו לדעת על ציר הסימטריה? על מקום נקודת הקודקוד? על סוג נקודת הקודקוד (מינימום או מקסימום)?
 - לפונקציה ריבועית יש נקודת מקסימום. כיצד תכונה זו מתבטאת בגרף? מה תוכלו לדעת על ציר הסימטריה? על מקום נקודת הקודקוד? על מספר נקודות האפס?
- ❖ אילו תכונות מאפשרות קביעת סקיצה "יחידה" (כלומר סקיצה שבעזרתה ניתן לקבוע תכונות נוספות)?
- ❖ דוגמאות למקרים שבהם ניתן לשרטט מספר סקיצות הנבדלות זו מזו בתכונותיהן.



פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות

דף פעילות 2: ייצוגים שונים ותכונות

א. בטבלה שלפניכם שלושה ייצוגים אלגבריים שונים של אותה פונקציה ריבועית. הראו כי שלושת הייצוגים אכן מייצגים אותה פונקציה.

ייצוג אלגברי-סטנדרטי	ייצוג אלגברי-קודקודי	ייצוג כמכפלה
$g(x) = -3x^2 + 6x + 9$	$g(x) = -3(x-1)^2 + 12$	$g(x) = -3(x+1)(x-3)$

- ב. ענו על השאלות הבאות **בלי לערוך חישובים** הדורשים כתיבה או שימוש במחשבון.
- באילו מן הייצוגים תוכלו למצוא את מספר נקודות האפס? הסבירו.
 - באילו מן הייצוגים תוכלו למצוא אם לפונקציה יש מינימום או מקסימום? הסבירו.
 - באילו מן הייצוגים תוכלו למצוא את שיעורי נקודת הקודקוד? הסבירו.
 - באילו מן הייצוגים תוכלו למצוא את משוואת ציר הסימטריה? הסבירו.
 - באילו מן הייצוגים תוכלו למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y?
- ג. שרטטו סקיצה של גרף על-פי התכונות שמצאתם.
- ד. מצאו תכונות של הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 4$, **בלי לערוך חישובים**. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, על פי התכונות שמצאתם, ומצאו בעזרת הסקיצה תכונות נוספות.

[לפעילות 2 מוגשת](#)

- ❖ מכל ייצוג אלגברי אפשר למצוא תכונות מסוימות, בלי לערוך חישובים.
- אילו תכונות ניתן למצוא מהייצוג האלגברי-סטנדרטי של פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$?
 - כיצד נעזרים בפרמטרים (המספרים) שבייצוג הזה? (כדאי להיעזר בדוגמאות מספריות במקום הפרמטרים ולהתייחס גם למקרים שבהם $b = 0$ או $c = 0$).
- אילו תכונות ניתן למצוא מהייצוג האלגברי-קודקודי של פונקציה ריבועית $f(x) = a(x - p)^2 + k$, $a \neq 0$?
 - מציגים את היישומון שתי הזנות ו/או את היישומון הקודקוד וציר הסימטריה ומבררים את הקשר בין הפרמטרים (המספרים) שבייצוג לבין שיעורי נקודת הקודקוד ומשוואת ציר הסימטריה. ביישומון הראשון משנים על ידי גרירה את המספרים p ו- k , וביישומון השני גוררים את הגרף.
 - מתייחסים תוך כדי הצגת היישומונים גם למקרים שבהם $p = 0$ ו/או $k = 0$.
- אילו תכונות ניתן למצוא מייצוג כמכפלה של פונקציה ריבועית $f(x) = a(x - t)(x - r)$, $a \neq 0$?
 - מציגים את היישומון נקודות אפס של פונקציה ריבועית ומבררים את הקשר בין הפרמטרים (המספרים) שבייצוג לבין שיעורי נקודות האפס. גרירת נקודה שעל אחד מסרגלי הגרירה גורמת לשינוי של אחת מנקודות האפס כך שניתן לעקוב אחרי ההשתנות בגרף ובייצוג האלגברי.
 - מתייחסים תוך כדי הצגת היישומונים גם למקרים שבהם $t = 0$ ו/או $r = 0$.
- האם ניתן להציג כל פונקציה ריבועית כמכפלה?
(האם ייתכן שהפונקציה הריבועית המתאימה לפרבולה שאינה חותכת את ציר ה- x ניתנת לייצוג כמכפלה?)
- ❖ האם שרטוט סקיצת גרף באמצעות תכונות שנמצאו מייצוג אלגברי מסויים, יכול לעזור למצוא תכונות נוספות?