



תיק משימטיקה

משוואה עם ביטוי אלגברי

במכנה

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: מנקודה לנקודה
7	משימה 2: מוצאים פתרונות
9	הערכת תוצרי תלמידים
11	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
12	פעילות 1: תחום הצבה של משוואה
12	עבודה על דף פעילות 1: תחום הצבה של משוואה
14	דיון
14	פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה
14	עבודה על דף פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה
16	דיון



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לפתור משוואה תוך התחשבות בתחום ההצבה (האילוצים) של המשוואה.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולות התלמידים:

- ❖ לקבוע את תחום ההצבה (האילוצים) של משוואה.
- ❖ לקבוע את פתרון המשוואה בהתאם לתחום ההצבה.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת הערכה: 20-30 דקות
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 45-60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [מנקודה לנקודה](#).
- ❖ דף משימה 2: [מוצאים פתרונות](#).

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה:

- ❖ דף פעילות 1: [תחום הצבה של משוואה](#).
- ❖ דף פעילות 2: [קביעת הפתרון בהתאם לתחום הצבה](#).



רקע

מידול מתמטי של בעיה מאפשר שימוש בכלים מתמטיים לפתרון בעיות בתחומים שונים. אחד הסוגים הנפוצים של מודלים מתמטיים הוא משוואה. תחום ההצבה של משוואה קובע אילו ציגים לגבי פתרונות אפשריים שלה. לדוגמה, תחום ההצבה של המשוואה: $\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x-3} = -3$ הוא: $x \neq 1, x \neq 3$ ולכן פתרון המשוואה חייב להיות שונה מ-1 ומ-3.

תלמידים רבים לא קושרים בין תחום ההצבה של משוואה ובין פתרונה, ולא מתחשבים בתחום למציאת פתרון המשוואה. לדוגמה, ישנם תלמידים הטוענים ש-4 הוא פתרון המשוואה $\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x - 8$ למרות ש-4 אינו בתחום ההצבה של המשוואה, ומנמקים את טענתם באופן הבא:

$$x \neq 4 \quad \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x - 8 \quad / (x - 4)$$

$$x^2 - 8x + 16 = (2x - 8)(x - 4)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 8x - 8x + 32$$

$$x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 16x + 32 \quad / -x^2 + 8x - 16$$

$$0 = x^2 - 8x + 16$$

$$(x - 4)(x - 4) = 0$$

פתרון המשוואה הוא $x = 4$

התיק **משוואה עם ביטוי אלגברי במכנה**, נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שאינם קושרים בין תחום ההצבה של משוואה ובין פתרונה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

▪ משימה 1 [מנקודה לנקודה](#).

▪ משימה 2 [מוציאים פתרונות](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1: **מנקודה לנקודה**.

❖ משימה 2: **מוצאים פתרונות**.

במשימה 1 **מנקודה לנקודה** התלמידים מתבקשים להתאים לכל משוואה נתונה את תחום ההצבה שלה.

במשימה 2 **מוצאים פתרונות** התלמידים מתבקשים לקבוע את פתרון המשוואה לאור האילוצים הנקבעים על-ידי תחום ההצבה.



משימה 1: מנקודה לנקודה

משימה 1: מנקודה לנקודה

התאימו לכל משוואה בטור הימני את תחום ההצבה המתאים לה בטור השמאלי.

תחום הצבה

משוואות

כל המספרים הממשיים •

• $5 + \frac{2x+6}{x+3} = x-3$

$x \neq 0$ •

• $\frac{1}{x^2+3x} = \frac{x+7}{3-x}$

$x \neq -3$ •

• $\frac{x+3}{x^2+9} + \frac{x}{3} = 4$

$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$ •

• $\frac{5}{x} = x^2 - 9$

$x \neq 0, x \neq -\frac{1}{3}$ •

• $\frac{1}{x} + \frac{x}{12x+4} = 4$

$x \neq 3, x \neq -3$ •

• $\frac{1}{4x^2-12x} = 8$

$x \neq 0, x \neq 3$ •

• $\frac{5}{x+3} = \frac{7}{x^2-9}$

[למשימה 1 מונגשת](#)



משימה 2: מוצאים פתרונות

משימה 2: מוצאים פתרונות

רוקן פתר את שתי המשוואות הבאות:

$$x \neq -3 \quad \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 5 \quad \text{ב.} \quad x \neq 4 \quad \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x - 8 \quad \text{א.}$$

לפניכם הפתרונות של רוקן:

$$\begin{array}{l} x \neq 4 \quad \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x - 8 \quad \text{א.} \\ x \neq 4 \quad \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x - 8 \quad | \cdot (x - 4) \\ x^2 - 8x + 16 = (2x - 8)(x - 4) \\ x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 8x - 8x + 32 \\ x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 16x + 32 \quad | -x^2 + 8x - 16 \\ 0 = x^2 - 8x + 16 \\ (x - 4)(x - 4) = 0 \end{array}$$

רוקן אמר: פתרון המשוואה הוא $x = 4$

האם רוקן צודק? כן לא

אם כן, הסבירו.

אם לא, מהו פתרון המשוואה?

$$x \neq -3 \quad \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 5 \quad \text{ב.}$$

$$x \neq -3 \quad \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 5 \quad | \cdot (x + 3)$$

$$x^2 - 9 = 5(x + 3)$$

$$x^2 - 9 = 5x + 15$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x - 8)(x + 3) = 0$$

רוקן אמר: פתרונות המשוואה הם: $x = 8$ או $x = -3$

האם רוקן צודק? כן לא

אם כן, הסבירו.

אם לא, מהו פתרון המשוואה?

[למשימה 2 מונגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	טעו בקביעת תחום ההצבה	לא התחשבו בתחום ההצבה בקביעת הפתרון	הערות
תלמיד 1	✓			
תלמיד 2		✓	✓	
תלמיד 3		✓	✓	טעות אחת במשימה הראשונה
תלמיד 4		✓		
סה"כ				

לצורך בדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות המשימות.

פתרון משימה 1 מנקודה לנקודה

תחום ההצבה	המשוואות
כל המספרים	$5 + \frac{2x+6}{x+3} = x-3$
$x \neq 0$	$\frac{1}{x^2+3x} = \frac{x+7}{3-x}$
$x \neq -3$	$\frac{x+3}{x^2+9} + \frac{x}{3} = 4$
$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -3$	$\frac{5}{x} = x^2 - 9$
$x \neq 0, x \neq -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{x} + \frac{x}{12x+4} = 4$
$x \neq 3, x \neq -3$	$\frac{1}{4x^2-12x} = 8$
$x \neq 0, x \neq 3$	$\frac{5}{x+3} = \frac{7}{x^2-9}$

פתרון משימה 2 מוצאים פתרונות

א. רונן לא צודק כי: תחום ההצבה הוא $x \neq 4$ לכן 4 אינו יכול להיות פתרון של המשוואה, ולמשוואה אין פתרון.

ב. רונן לא צודק כי: תחום ההצבה הוא $x \neq -3$, לכן -3 אינו יכול להיות פתרון של המשוואה. הפתרון $x = 8$.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
	V	לתלמידים שטעו בקביעת תחום ההצבה (האילוצים)
V		לתלמידים שלא התחשבו בתחום ההצבה בקביעת פתרון המשוואה



פעילות 1: תחום הצבה של משוואה

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: **תחום הצבה של משוואה**.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1: תחום הצבה של משוואה

דף פעילות 1: תחום הצבה של משוואה

1. רשמו בכל שורה בטבלה:
 - תחום ההצבה של המשוואה,
 - שלושה מספרים השייכים לתחום ההצבה של המשוואה,
 - מספר אחד שאינו שייך לתחום ההצבה של המשוואה. (אם אין מספר מתאים, כתבו "אין").

המשוואה	תחום הצבה	שלושה מספרים השייכים לתחום ההצבה	מספר אחד שאינו שייך לתחום ההצבה
$\frac{1}{x-7} = 9$ <i>דוגמה:</i>	$x \neq 7$ כלומר, כל המספרים פרט ל-7	למשל: -5, 2, 0	7
$\frac{1}{x^2-25} = 9$			
$x^2 - 4 = 0$			
$\frac{x-3}{10x-5} = x$			
$\frac{1}{x^2+9} = 1$			

2. הקיפו את המספרים שאינם שייכים לתחום ההצבה של המשוואה הנתונה, בכל שורה.

מספרים שאינם שייכים לתחום ההצבה					המשוואה
⓪	-1	0	1	⓪	דוגמה: $\frac{1}{x^2-4} = 0$
-2	-1	0	1	2	$\frac{x+2}{x^2+3x+2} = x$
-2	-1	0	1	2	$\frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{x+1}$
-2	-1	0	1	2	$\frac{1}{x^2-2x} = 0$
-2	-1	0	1	2	$\frac{1}{x^2+4} = 1$
-2	-1	0	1	2	$\frac{2(x+2)}{x+2} = 2$
-2	-1	0	1	2	$\frac{2(x+2)}{(x+1)^2} = 5$

3. לפיכם תבנית של משוואה:

$$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$$

קשמו ביטויים אלגבריים במלבנים הריקים, בהתאם לתחום ההצבה הנתון בכל סעיף. תנו שתי אפשרויות בכל סעיף. אין צורך לפתור את המשוואות.

א.

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq 3, x \neq 0$

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq 3, x \neq 0$

ב.

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq -3, x \neq \frac{1}{3}$

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq -3, x \neq \frac{1}{3}$

ג.

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq 3, x \neq -4$

$\frac{4x-1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}} - 5$
תחום ההצבה: $x \neq 3, x \neq -4$

[לגרסה מונגשת של פעילות 1](#)

❖ איך מוצאים תחום ההצבה של משוואה?



פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה.
- דיון.

עבודה על דף פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה

דף פעילות 2: קביעת הפתרון בהתאם לתחום ההצבה

1. רותי ודנה פתרו את המשוואה $x \neq -4 \quad \frac{x^2 - 16}{x + 4} = 2$

הפתרון של דנה	הפתרון של רותי
$x \neq -4 \quad \frac{x^2 - 16}{x + 4} = 2$	$x \neq -4 \quad \frac{x^2 - 16}{x + 4} = 2 \quad / \cdot (x + 4)$
$x + 4 \neq 0 \quad \frac{(x - 4)(\cancel{x + 4})}{\cancel{x + 4}} = 2$	$x^2 - 16 = 2(x + 4)$
$x - 4 = 2$	$x^2 - 16 = 2x + 8$
$x = 6$	$x^2 - 2x - 24 = 0$
	$(x - 6)(x + 4) = 0$
	$x_1 = 6 \quad x_2 = -4$

רותי קיבלה שני פתרונות למשוואה, דנה קיבלה פתרון אחד.
מי פתרה נכון? הסבירו.

2. א. בטור האמצעי רשומות משוואות. רשמו ליד כל משוואה את תחום ההצבה שלה (בטור הימני).
 ב. סברו כל משוואה אל הפתרון שלה (בטור השמאלי).

פתרון	משוואה	תחום הצבה
• אין פתרון	• $x^2 - 25 = 0$	_____
• כל המספרים הממשיים	• $x^2 + 25 = 0$	_____
• $x = 5$	• $\frac{10x - 2}{x + 5} = 0$	_____
• $x_1 = 5, x_2 = -5$	• $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = 0$	_____
• $x = \frac{1}{5}$	• $\frac{x - 5}{x^2 - 25} = 0$	_____
• $x = -5$	• $\frac{x + 5}{x^2 - 25} = 0$	_____

3. נתונה המשוואה $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+5} = \frac{x^2 + 5x - 16}{(x-3)(x+5)}$

א. מצאו את תחום ההצבה של המשוואה.

ב. הסבירו מדוע למשוואה אין פתרון.

4. לפיכם שתי משוואות.

השלימו לכל משוואה תחום ההצבה, ומצאו את פתרון המשוואה. רשמו את דרך הפתרון.

א. $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ תחום הצבה: _____
 ב. $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ תחום הצבה: _____

דרך הפתרון:

דרך הפתרון:

פתרון המשוואה:

פתרון המשוואה:

[לגרסה מונגשת של פעילות 2](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ באילו מקרים מותר לצמצם מכנה במהלך פתרון משוואה עם ביטוי אלגברי במכנה, ובאילו מקרים אסור?
- ❖ מה גורם לכך שחלק ממה שנראה כ"פתרונות" של המשוואה אינם פתרונות?
- ❖ מה כרוך בהשלמת מהלך שלם של פתרון משוואה? (מציאת תחום הצבה, בניית שרשרת של משוואות שקולות, וקביעת פתרון המשוואה בהתאם לאילוצים שלה.)