



תיק משימטיקה

אותה בעיה – הגדרות

שונות של המשתנה

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
7	משימה 1: מספרים עוקבים
8	משימה 2: שני מספרים
9	משימה 3: ניצב ויתר
10	הערכת תוצרי תלמידים
12	פעילות בעקבות ההערכה
12	פעילות: פתרון המשוואה או פתרון הבעיה?
13	עבודה על דף הפעילות חלק א': האם אפשר?
15	דיון
16	עבודה על דף הפעילות חלק ב': איך פותרים?
18	דיון
19	עבודה על דף הפעילות חלק ג': האם כדאי?
20	דיון

פתיחה¹



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש בהגדרות שונות של המשתנה (או המשתנים) במהלך פתרון בעיה באופן אלגברי.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולות התלמידים:

- ❖ לזהות אפשרויות שונות להגדרת המשתנה במהלך פתרון בעיה באופן אלגברי.
- ❖ להגדיר באופנים שונים את המשתנה במהלך פתרון בעיה באופן אלגברי.
- ❖ לפתור בעיה באופן אלגברי בהלימה להגדרות שונות של המשתנה.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה 30-45 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: [מספרים עוקבים](#).
- ❖ דף משימה 2: [שני מספרים](#).
- ❖ דף משימה 3: [ניצב ויתר](#).

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף הפעילות חלק א': [האם אפשר?](#)
- ❖ דף הפעילות חלק ב': [איך פותרים?](#)
- ❖ דף הפעילות חלק ג': [האם כדאי?](#)

¹ חמישה תיקי משימטיקה עוסקים בהיבטים שונים של שימוש במידול מתמטי לפתרון בעיות המוצגות בשפה טבעית בהקשרים פנים וחוץ-מתמטיים: אותה בעיה – הגדרות שונות של המשתנה, התחשבות באילוצים בפתרון בעיות, בניית משוואות כמודל מתמטי, בעיות בהקשר ומשוואות, בעיות בהקשר ופונקציות.



פתרון מתמטי של בעיות המוצגות בשפה טבעית (בעיות מילוליות) כולל בנייה של מודל מתמטי לבעיה, והפעלה של כלים מתמטיים על המודל, כדי למצוא פתרון לבעיה. סוג נפוץ של מודל מתמטי הוא משוואה (או מערכת משוואות). לדוגמה, מודל מתמטי מתאים לבעיה:

מהם שלושת המספרים הטבעיים העוקבים שמכפלתם גדולה פי 15 מהמספר האמצעי מבין השלושה?

הוא המשוואה: $x(x+1)(x+2) = 15(x+1)$ (x , מספר טבעי) כאשר x מייצג את המספר הקטן מבין השלושה. במקרים בהם אי אפשר (או קשה) לפתור את המשוואה שנבנתה כמודל לבעיה מסוימת, בחירה אחרת של המשתנה עשויה לאפשר בנייה של משוואה שאותה אפשר (או קל יותר) לפתור. לדוגמה, במקרה של הבעיה לעיל, תלמידים נוטים לפשט ולכן מקבלים משוואה ממעלה שלישית $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$ שפתרונה מסובך ומצריך שימוש בכלים מתמטיים מתקדמים. אולם בחירה של המשתנה x לייצג את המספר האמצעי במקום את המספר הקטן, תאפשר לבנות את המשוואה: $x(x-1)(x+1) = 15x$ (x , מספר טבעי) כמודל מתמטי לבעיה, ובכך לאפשר/להקל על הפתרון. במקרה זה מקבלים, לאחר פישוט, את המשוואה: $x^3 - 16x = 0$ שניתנת לפתרון בקלות על ידי פירוק לגורמים.

קושי נפוץ של תלמידים מתבטא בכך שתלמידים מניחים שיש רק דרך אחת להגדרת המשתנה במהלך פתרון בעיה באופן אלגברי. קושי נוסף של תלמידים כרוך בהנחה שפתרון המשוואה הוא גם פתרון הבעיה. לדוגמה, במקרה שלמעלה, שלושת פתרונות המשוואה: $x^3 - 16x = 0$ ($x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$) אינם שלושת המספרים המבוקשים, אלא כל אחד מהם מגדיר שלשה של מספרים עוקבים העונים על תנאי הבעיה: $(-1, 0, 1)$, $(3, 4, 5)$, $(-3, -4, -5)$. בעקבות אילוצי הבעיה רק השלשה $(3, 4, 5)$ היא פתרון הבעיה.

התיק **אותה בעיה – הגדרות שונות של המשתנה** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

- משימה 1: [מספרים עוקבים](#).
- משימה 2: [שני מספרים](#).
- משימה 3: [ניצב ויתר](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק שלוש משימות הערכה:

❖ משימה 1: **מספרים עוקבים**.

❖ משימה 2: **שני מספרים**.

❖ משימה 3: **ניצב ויתר**.

במשימה 1 **מספרים עוקבים** התלמידים נדרשים לזהות אפשרויות שונות לבחירת הגודל המיוצג באמצעות המשתנה.

במשימה 2 **שני מספרים** התלמידים נדרשים לפתור בעיה בהלימה להגדרת המשתנה.

במשימה 3 **ניצב ויתר** התלמידים נדרשים להגדיר את הגודל המיוצג באמצעות המשתנה בדרכים שונות, ולפתור את הבעיה בהלימה להגדרות השונות.



משימה 1: מספרים עוקבים

משימה 1: מספרים עוקבים

במסגרת שלפניכם בעיה ולאחריה תיאור דרכי הפתרון של **אנה** ו**דורית**. עליכם להחליט איזו דרך פתרון נכונה או אם שתי הדרכים נכונות/שגויות.

נתונים שלושה מספרים עוקבים.

מכפלת שני המספרים הגדולים יותר גדולה ב-20 ממכפלת שני המספרים הקטנים יותר. מהם שלושת המספרים?

תיאור דרכי הפתרון של אנה ודורית

אנה אמרה: בניתי את המשוואה $(x-1) \cdot x = (x-2) \cdot (x-1) + 20$. פתרתי אותה. קיבלתי $x = 11$, ואז מצאתי את שני המספרים האחרים.

דורית אמרה: אני בניתי משוואה אחרת: $(x+1) \cdot (x+2) = x \cdot (x+1) + 20$. פתרתי אותה. קיבלתי $x = 9$, ואז מצאתי את שני המספרים האחרים.

הקיפו את הטענה הנכונה:

- רק דרך הפתרון של **אנה** נכונה.
- רק דרך הפתרון של **דורית** נכונה.
- דרכי הפתרון של שתי התלמידות נכונות.
- דרכי הפתרון של שתי התלמידות שגויות.

הסבירו את בחירתכם:

למשימה 1 מוגשת



משימה 2: שני מספרים

משימה 2: שני מספרים

במסגרת שלפניכם בעיה ולאחריה תיאור דרך הפתרון של **בוריס**.
עליכם להחליט אם דרך הפתרון של **בוריס** נכונה.

נתונים שני מספרים.

מספר אחד קטן ב-5 מהמספר האחר.

הסכום של המספר הקטן והריבוע של המספר הגדול הוא 127.

מהם שני המספרים?

דרך הפתרון של בוריס

x מייצג את המספר הקטן יותר.

משוואה מתאימה: $x + (x + 5)^2 = 127$

פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 6$ $x_2 = -17$

המספרים הם: 6, -17

האם **בוריס** צודק? ☐ כן ☐ לא

אם כן, הסבירו.

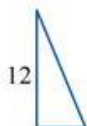
אם לא, מצאו את שני המספרים.

למשימה 2 מוגשת



משימה 3: ניצב ויתר

משימה 3: ניצב ויתר



במשולש ישר-זווית, אורך אחד הניצבים הוא 12 ס"מ.

אורך היתר גדול ב-8 ס"מ מאורך הניצב האחר.

מצאו את אורך היתר.

א. הגדירו משתנה כדי לפתור את הבעיה.

x מייצג _____

כתבו משוואה מתאימה, ופתרו אותה.

מה אורך היתר? _____

ב. האם אפשר להגדיר משתנה בדרך אחרת מזאת שהגדרתם בסעיף א?

אם אפשר להגדיר משתנה בדרך אחרת, השלימו: x מייצג _____

כתבו משוואה מתאימה ופתרו אותה:

מה אורך היתר? _____

אם אי אפשר להגדיר את המשתנה בדרך אחרת, הסבירו מדוע.

למשימה 3 מונגשת

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובות נכונות	קושי בהגדרות שונות של המשתנה	התייחסות לפתרון המשוואה כאל פתרון הבעיה	הערות
תלמיד 1		✓	✓	
תלמיד 2			✓	
תלמיד 3	✓			
סך-הכול				

לצורך בדיקת תוצרי ההערכה ניתן להיעזר בפתרונות המשימה.

פתרון משימה 1 – מספרים עוקבים

דרכי הפתרון של שתי התלמידות נכונות.

הסבר: שתי התלמידות בחרו את המשתנה באופן שונה, ולכן ערך המשתנה שהתקבל כפתרון למשוואות היה שונה. למרות זאת, בשני המקרים התשובה לשאלה שנשאלה בבעיה היא אותה התשובה.

פתרון משימה 2 – שני מספרים

בוריס אינו צודק.

לשאלה יש שני פתרונות שונים אפשריים.

אפשרות א – המספר הקטן הוא 6 והמספר הגדול הוא 11.

אפשרות ב – המספר הקטן הוא (-17) והמספר הגדול הוא (-12).

פתרון משימה 3 – ניצב ויתר

א. x מייצג את אורך הניצב האחר.

$$x = 5 \quad \underline{12^2 + x^2 = (x + 8)^2} \quad \text{המשוואה המתאימה:}$$

אורך היתר 13 ס"מ.

ב. x מייצג את אורך היתר.

$$x = 13 \quad \underline{12^2 + (x - 8)^2 = x^2} \quad \text{המשוואה המתאימה:}$$

אורך היתר 13 ס"מ.

פעילות בעקבות ההערכה



פעילות: פתרון המשוואה או פתרון הבעיה?

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות חלק א': **האם אפשר?**
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות חלק ב': **איך פותרים?**
4. דיון.
5. עבודה על דף הפעילות חלק ג': **האם כדאי?**
6. דיון מסכם.

עבודה על דף הפעילות חלק א': האם אפשר?

דף הפעילות חלק א': האם אפשר?

1. במסגרת שלפניכם בעיה. אחרי המסגרת נתונות משוואות שהציעו שני תלמידים לפתרון הבעיה.

הצלע של הריבוע הגדול ארוכה ב-3 ס"מ מהצלע של הריבוע הקטן.

סכום השטחים של שני הריבועים הוא 185 סמ"ר.

מהן המידות של הריבועים?



המשוואה של תלמיד ב	המשוואה של תלמיד א
x מייצג את אורך צלע הריבוע הקטן ($x \geq 0$) משוואה המתאימה לנתוני הבעיה: $x^2 + (x+3)^2 = 185$	x מייצג את אורך צלע הריבוע הגדול ($x \geq 3$) משוואה המתאימה לנתוני הבעיה: $(x-3)^2 + x^2 = 185$

התיחסו להגדרות המשתנה השונות ולמשוואות שהציעו התלמידים וענו:

א. **מישל** אמרה: המשוואות של שני התלמידים שונות זו מזו. לא ייתכן ששתיהן מתאימות לבעיה. האם מישל צודקת? הסבירו.

ב. לפניכם המשך הפתרונות של תלמיד א ותלמיד ב:

תלמיד א: פתרונות המשוואה שלי הם: $x_1 = 11$ $x_2 = -8$ לפי האילוצים x חייב להיות גדול או שווה ל-3 ולכן רק $x = 11$ מתאים.

תלמיד ב: פתרונות המשוואה שלי הם: $x_1 = -11$ $x_2 = 8$ לפי האילוצים x חייב להיות גדול או שווה ל-0 ולכן רק $x = 8$ מתאים.

מצאו את אורך צלע הריבוע הגדול ואת אורך צלע הריבוע הקטן לפי הפתרון של תלמיד א ולפי הפתרון של תלמיד ב. האם קיבלתם אותה התוצאה? הסבירו.

2. במסגרת שלפניכם בעיה. אחרי המסגרת נתונות הצעות של שתי תלמידות לפתרון הבעיה.

עמית ואסף רכבו על אופניים מרחובות לנתניה – מרחק של 60 ק"מ. שניהם יצאו באותו הזמן. מהירותו של עמית הייתה גדולה ב- 5 קמ"ש ממהירותו של אסף, והוא הגיע לנתניה 2 שעות מוקדם יותר מאסף. מה היו זמני הרכיבה של עמית ושל אסף?

פתרון תלמידה ב	פתרון תלמידה א
v מייצג את מהירות הרכיבה של אסף ($v > 0$) $v + 5$ מהירות הרכיבה של עמית $\frac{60}{v}$ זמן הרכיבה של אסף $\frac{60}{v+5}$ זמן הרכיבה של עמית המשוואה: $\frac{60}{v} = \frac{60}{v+5} + 2$ ($v > 0$) פתרון המשוואה: $v = -15$ או $v = 10$	t מייצג את זמן הרכיבה של אסף ($t > 2$) $t - 2$ זמן רכיבה של עמית $\frac{60}{t}$ המהירות של אסף $\frac{60}{t-2}$ המהירות של עמית המשוואה: $\frac{60}{t} + 5 = \frac{60}{t-2}$ ($t > 2$) פתרון המשוואה: $t = -4$ או $t = 6$

התייחסו להגדרות המשתנה השונות ולפתרונות של שתי התלמידות, וענו על שני הסעיפים הבאים:

א. **מרינה** טענה: המשוואה של תלמידה א מתאימה לבעיה והמשוואה של תלמידה ב אינה מתאימה, כיוון שבמשוואה של תלמידה א, t מייצג את זמן הרכיבה של אסף וזה מה ששואלים בבעיה, ובמשוואה של תלמידה ב, v מייצג מהירות ולא שואלים על זה.

האם הטענה של מרינה נכונה? ☐ כן ☐ לא

הסבירו תשובתכם: _____

ב. ענו על השאלה: מה היו זמני הרכיבה של עמית ושל אסף?

[לדף הפעילות חלק א מוגש](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הגדרת המשתנה לא חייבת להיות תואמת למה ששואלים בבעיה.
- ❖ הגדרות שונות של המשתנה עשויות להוביל לבנייה של משוואות שונות המתאימות לבעיה נתונה, אך בכל מקרה התשובה לשאלה שנשאלה בבעיה זהה.

עבודה על דף הפעילות חלק ב': איך פותרים?

דף הפעילות חלק ב': איך פותרים?

1. במסגרת שלפניכם בעיה. אחרי המסגרת נתונים פתרונות שהציעו שני תלמידים.

טל, בר, וגל הן שלוש אחיות שנולדו בהפרשים של שנתיים זו מזו.
מכפלת הגילים של שתי האחיות הבוגרות גדולה פי 2 ממכפלת הגילים של שתי האחיות הצעירות.
מהם גילאי האחיות?

פתרון תלמיד א	פתרון תלמיד ב
x מייצג את הגיל של האחיות הבכורה ($x \geq 4$) משוואה המתאימה לנתוני הבעיה: $2(x-4)(x-2) = x(x-2)$ פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 8 \quad \text{או} \quad x_2 = 2$ לאור האילוצים $x = 8$.	x מייצג את גיל האחיות האמצעיות ($x \geq 2$) משוואה המתאימה לנתוני הבעיה: $x(x+2) = 2x(x-2)$ פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 6 \quad \text{או} \quad x_2 = 0$ לאור האילוצים $x = 6$.

ענו על השאלה: מהם גילאי שלוש האחיות?

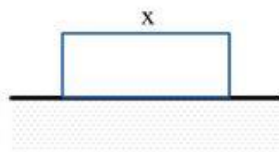
2. במסגרת שלפניכם בעיה. אחרי המסגרת נתונים פתרונות שהציעו שתי תלמידות.



מגדרים חלקה מלבנית צמודה למבנה באמצעות גדר שאורכה 30 מטר.
שטח החלקה הוא 52 מ"ר.
מה מידות החלקה המלבנית?

פתרון תלמידה ב

x מייצג את אורך הצלע הצמודה לקיר המבנה x מייצג את אורך הצלע ממול לקיר המבנה
($0 \leq x \leq 30$)



משוואה המתאימה לנתוני הבעיה:

$$(0 \leq x \leq 30) \quad x \cdot \frac{30-x}{2} = 52$$

פתרון המשוואה: $x = 4$ או $x = 26$

פתרון תלמידה א

($0 \leq x \leq 15$)



משוואה המתאימה לנתוני הבעיה:

$$(0 \leq x \leq 15) \quad x(30-2x) = 52$$

פתרון המשוואה: $x = 2$ או $x = 13$

ענו על השאלה: מה מידות החלקה המלבנית? (שימו לב, יש שתי אפשרויות.)

[לדף הפעילות חלק ב מוגש](#)

- ❖ למשוואות שונות המתאימות לבעיה נתונה עשויים להיות פתרונות שונים.
- ❖ פתרון משוואה המתאימה לבעיה נתונה הוא לאו דווקא פתרון הבעיה.
- ❖ מפתרונות שונים המתקבלים ממשוואות שונות המתאימות לבעיה נתונה מקבלים אותו פתרון לבעיה.

עבודה על דף הפעילות חלק ג': האם כדאי?

עבודה על דף הפעילות חלק ג': האם כדאי?

דף הפעילות חלק ג': האם כדאי?

במסגרת שלפניכם בעיה ולאחריה התחלת הפתרון של רחל.

נתונים שלושה מספרים טבעיים עוקבים שמכפלתם גדולה פי 15 מהמספר האמצעי מבין השלושה.
מהם שלושת המספרים?

הפתרון של רחל

x מייצג את המספר הקטן מבין שלושת המספרים ($x \geq 1$, מספר טבעי).

המשוואה המתאימה: $x(x+1)(x+2) = 15(x+1)$

לאחר פישוט קיבלתי: $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$

אני לא יודעת לפתור משוואה כזו.

מיכאל הציע לבחור את המשתנה כך: x מייצג את המספר האמצעי במקום את המספר הקטן.

פעלו על פי הצעתו של מיכאל ובדקו אם כדאי לייצג כך את המשתנה.

- מהי המשוואה שתקבל?
- מהם פתרונות המשוואה?
- מהם שלושת המספרים?

[לדף הפעילות חלק ג מוגש](#)

- ❖ במקרים בהם אי אפשר (או קשה) לפתור את המשוואה שנבנתה כמודל מתמטי לבעיה מסויימת, בחירה אחרת של המשתנה עשויה לאפשר בנייה של משוואה שאותה אפשר (או קל יותר) לפתור. כדי לפתור בעיה באופן יעיל, אפשר להגדיר את המשתנה שנוח לנו או את המשתנה שהגדרתו תאפשר בניית משוואה נוחה יותר.
- ❖ הגדרות שונות של המשתנה מובילות למשוואות שונות ומכאן לפתרונות שונים של המשוואות. אך מהפתרונות השונים של המשוואות מתקבלת תשובה זהה לבעיה.