תיק משימטיקה

דוגמה נגדית: קטע אמצעים

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן עניינים

פתיחה

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשור בין שימוש בדוגמאות פרטיות לבין הוכחות והפרכות של טענות גיאומטריות. התיק עוסק בנושא קטע אמצעים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לפסול הוכחות לנכונות טענות לגבי מצולע כלשהו, המתבססות רק על דוגמאות פרטיות.
- להשתמש בשיטה של דוגמה נגדית כדי להוכיח שטענה לא נכונה.
- לזהות דוגמאות פרטיות שיכולות לשמש כדוגמאות נגדיות לטענות לא נכונות.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת הערכה: 30-40 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת הערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף משימה 1: ***בודקים הסברים.***
- דף משימה 2: ***מפריכים טענה שאינה נכונה.***
- דף משימה 3: ***בוחרים דוגמאות נגדיות.***

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

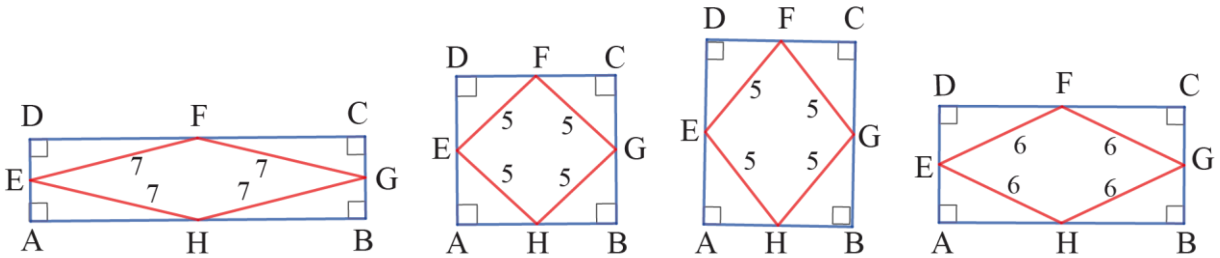
- לפעילות 1
  - דף פעילות 1: ***האם ההסברים משכנעים?***
  - **יישומון:** אמצעי צלעות בטרפז
- לפעילות 2
  - דף פעילות 2: ***מפריכים טענות שגויות.***
  - **יישומון:** קטע ממפגש אלכסוני מעוין
  - **יישומון:** טרפז בתוך מקבילית

רקע

במתמטיקה עוסקים רבות בבחינת אמיתותן של השערות, במטרה להוכיח או להפריך אותן. שיטה נפוצה להפרכת טענות במתמטיקה היא מתן דוגמה נגדית. שיטה זאת מתבססת על כך שבמתמטיקה טענה נחשבת נכונה אם ורק אם היא נכונה תמיד, כלומר, היא חלה על כל מקרה פרטי. לכן, די במקרה פרטי אחד שלגביו טענה אינה נכונה, כלומר, די בדוגמה נגדית אחת, כדי לפסול נכונות של טענה ובכך להפריכה.

תלמידים מתקשים לעיתים קרובות בשימוש בשיטה של דוגמה נגדית לצורך הפרכה של טענות. קושי זה כרוך הן בהכרה בשיטה זאת כמתאימה להוכחה שטענה איננה נכונה, והן בזיהוי וביצירה של דוגמאות נגדיות.

קושי נפוץ נוסף של תלמידים הוא שימוש בדוגמאות פרטיות בהקשר של הוכחות במתמטיקה, אך לא לצורך הוכחה שטענה מסוימת אינה נכונה, אלא לצורך הוכחה של טענה כללית. לדוגמה, הטענה ***כשמחברים אמצעי צלעות סמוכות במלבן מתקבל מעוין*** היא טענה נכונה, אך כדי להוכיח את הטענה, לא מספיק לבנות באמצעות המחשב מלבנים, לחבר את אמצעי צלעותיהם הסמוכות לגרור ולבדוק. בכל המקרים האלה אכן מתקבלים מעוינים (ראו שרטוטים למטה) אבל השימוש בדוגמאות אינו מהווה הוכחה לנכונות הטענה.



התיק ***דוגמה נגדית: קטע אמצעים*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים בשימוש במקרים פרטיים בהקשר של הוכחות והפרכות של טענות גיאומטריות, ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות הערכה:
  - משימה 1: בודקים הסברים.
  - משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה.
  - משימה 3: בוחרים דוגמאות נגדיות.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- משימה 1: ***בודקים הסברים.***
- משימה 2: ***מפריכים טענה שאינה נכונה.***
- משימה 3: ***בוחרים דוגמאות נגדיות.***

במשימה 1 מוצגים הסברים של תלמידים לטענה נכונה והתלמידים צריכים לקבוע אם ההסבר משכנע בנכונות הטענה. במשימה 2 התלמידים נדרשים לקבוע אם ההסבר משכנע שהטענה אינה נכונה. במשימה 3 התלמידים נדרשים לזהות שרטוטים המהווים דוגמאות נגדיות לטענות שאינן נכונות.

משימה 1: בודקים הסברים

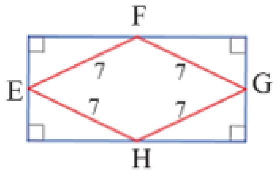
משימה 1: בודקים הסברים

במסגרת שלפניכם **טענה נכונה**. לאחריה הסברים של יואב ומיכל, לנכונות הטענה.

בְּדקו כל אחד משני ההסברים, קִבעו אם הוא משכנע בנכונות הטענה, ונמקו את קביעתכם.

טענה: ***כשמחברים אמצעי צלעות סמוכות במלבן, מתקבל מעוין.***

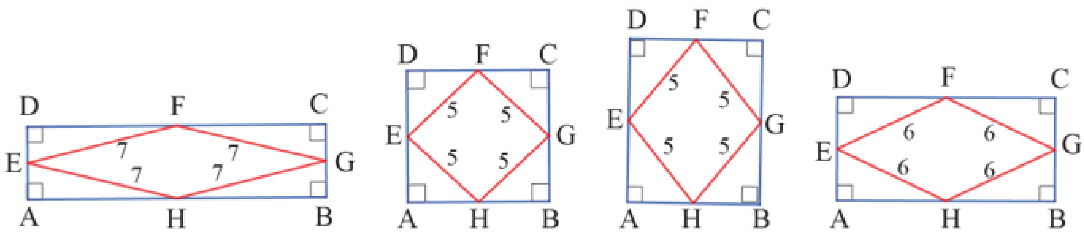
❖ **ההסבר של יואב:** אני יודע שהטענה נכונה כי יש לי דוגמה שמראה זאת.



האם ההסבר של **יואב** משכנע שהטענה **נכונה**? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____

❖ **ההסבר של מיכל:** כדי להוכיח את הטענה, בניתי באמצעות המחשב מספר מלבנים, חיברתי את אמצעי צלעותיהם הסמוכות, גררתי קודקודים, ותמיד התקבלו מעוינים.



האם ההסבר של **מיכל** משכנע שהטענה **נכונה**? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____

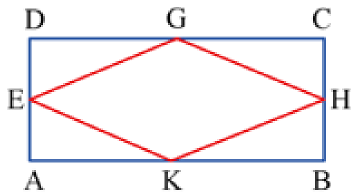
למשימה 1 מונגשת

משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה

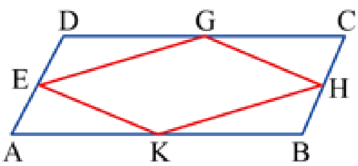
משימה 2: מפריכים טענה שאינה נכונה

במסגרת שלפניכם טענה **שאינה נכונה**. לאחריה הסברים של יוסי, רפי ונעמי, לאי-נכונות הטענה.
בִּדקו כל אחד משלושת ההסברים, קבעו אם הוא משכנע שהטענה אינה נכונה, ונמקו את קביעתכם.

> טענה: ***כשמחברים אמצעי צלעות סמוכות במקבילית מתקבל מעוין.***



❖ **ההסבר של יוסי:** הוכחנו שכשמחברים אמצעי צלעות במרובע מתקבלת מקבילית.
אם המקבילית היא מלבן, אז נוצרים ארבע משולשים חופפים
לפי צ.ז.צ ומרובע שארבע צלעותיו שוות הוא מעוין.



אבל במקבילית שאינה מלבן, המשולשים שיש להם קודקוד משותף,
למשל G, אינם חופפים, כי משולש אחד קהה זווית והשני חד זוויות,
(למשל, משולש EDG **אינו חופף** למשולש HCG, כי שתי צלעות
במשולש האחד שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש האחר,
אבל הזווית שביניהן שונה) לכן $EG \neq GH$, והמרובע אינו מעוין.

ההסבר של **יוסי** משכנע שהטענה **אינה נכונה**? ☐ כן ☐ לא

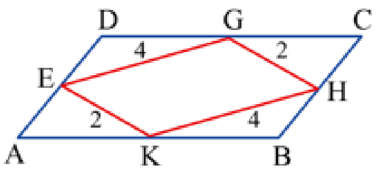
נימוק: ____

❖ **ההסבר של רפי:** הטענה אינה נכונה כי אי אפשר להוכיח אותה.

ההסבר של **רפי** משכנע שהטענה **אינה נכונה**? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____

❖ **ההסבר של נעמי:** בניתי דוגמה של מקבילית שאם מחברים
את אמצעי הצלעות הסמוכות, לא מתקבל מעוין.



ההסבר של **נעמי** משכנע שהטענה **אינה נכונה**? ☐ כן ☐ לא

נימוק: ____

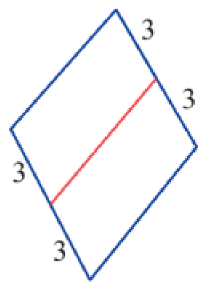
למשימה 2 מונגשת

משימה 3: בוחרים דוגמאות נגדיות

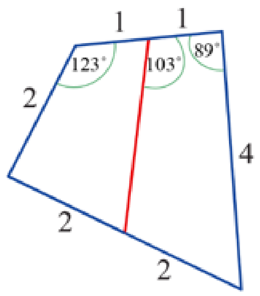
א. במסגרת שלפניכם טענה **שאינה נכונה**, ולאחריה נתונים שרטוטים של שלושה דלתונים.
קִבעו אילו משלושת השרטוטים מהווים דוגמה נגדית לטענה.

טענה: ***קטע המחבר אמצעים של שתי צלעות נגדיות בדלתון, מקביל לאחת מצלעות הדלתון.***

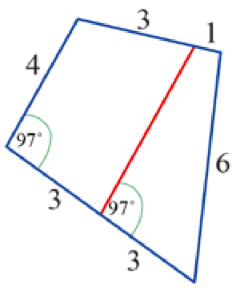
i



ii



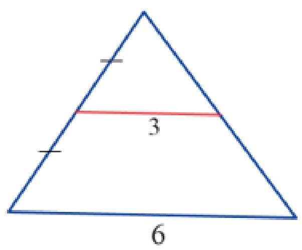
iii



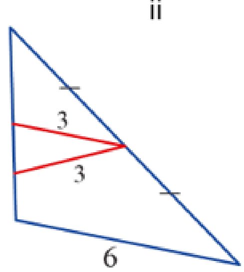
ב. במסגרת שלפניכם טענה **שאינה נכונה**, ולאחריה נתונים שרטוטים של שלושה משולשים.
קִבעו אילו משלושת השרטוטים מהווים דוגמה נגדית לטענה.

טענה: ***קטע המחבר שתי צלעות של משולש, יוצא מאמצע אחת מהן, ושווה באורכו למחצית אורך הצלע השלישית של המשולש, הוא קטע אמצעים במשולש.***

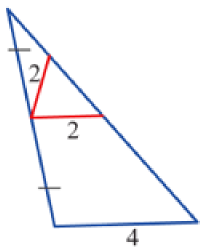
i



ii



iii



למשימה 3 מונגשת

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	**כל התשובות נכונות**	**בחרו בדוגמאות כהסבר לנכונות טענה**	**טעו בדוגמאות נגדיות**	**הערות**
סך הכול				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות שלהלן.

משימה 1: ***בודקים הסברים***

ההסבר של **יואב** אינו משכנע. דוגמה אינה מספיקה כדי להצדיק נכונות של טענה.

ההסבר של **מיכל** אינו משכנע: גם דוגמאות רבות אינן משכנעות שהטענה נכונה וגם חוסר יכולת למצוא דוגמה נגדית אינו משכנע שלא קיימת דוגמה כזו.

משימה 2: ***מפריכים טענה שאינה נכונה***

הטענה אינה נכונה.

יוסי משכנע: הוא הסביר באיזה מקרה מתקבל מעוין, ושרטט דוגמה המראה שבמקבילית שאינה מלבן המרובע אינו מעוין.

רפי אינו משכנע: חוסר אפשרות להוכיח אינו מוכיח שטענה אינה נכונה אלא רק יוצר חוסר וודאות לגבי נכונותה.

נעמי משכנעת: היא הביאה דוגמה נגדית באמצעות שרטוט שבו צלעות המרובע הפנימי אינן שוות באורכן, ולכן ההסבר שלה משכנע שהמרובע אינו בהכרח מעוין.

משימה 3: ***בוחרים דוגמאות נגדיות***

א. שרטוט i , אינו דוגמה נגדית: הנתונים מתקיימים וגם המסקנה מתקיימת אבל המרובע הוא מעוין, ומעוין הוא **מקרה פרטי** של דלתון, בו מתקיימת המסקנה.

שרטוט ii , מהווה דוגמה נגדית לטענה מאחר שמתקיימים הנתונים ולא מתקיימת המסקנה: הקטע **האדום** אינו מקביל לצלע של הדלתון.

שרטוט iii , אינו דוגמה נגדית: לא מתקיימים בו הנתונים: הקטע **האדום** חוצה רק צלע אחת של הדלתון ולא את הנגדית לה.

ב. שרטוט i , אינו דוגמה נגדית: זו דוגמה פרטית בה מתקיימת המסקנה.

שרטוט ii ושרטוט iii , מהווים דוגמאות נגדיות: מתקיימים בהם הנתונים **ולא מתקיימת המסקנה:** בכל אחד מהם קיים קטע השווה באורכו לחצי אורך הצלע, אך הוא **אינו** מקביל לצלע הזו.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שבחרו בדוגמאות כהסבר לנכונות טענה	**V**	
לתלמידים שטעו בבחירה של דוגמה נגדית להפרכת טענה שאינה נכונה		**V**

פעילות 1: האם ההסברים משכנעים?

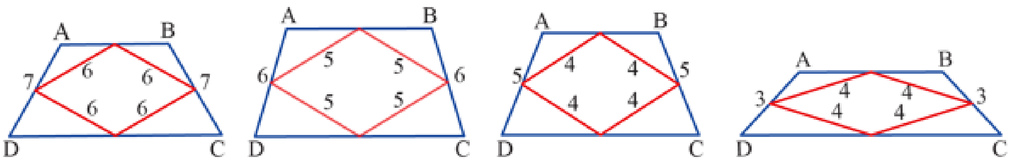
שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: ***האם ההסברים משכנעים?***
2. דיון.

דף פעילות 1: *האם ההסברים משכנעים?*

א. במסגרת שלפניכם **טענה נכונה** ולאחריה ההסבר של שולי לנכונות הטענה.

טענה: **כשמחברים אמצעי צלעות סמוכות בטרפז שווה שוקיים, מתקבל מעוין.**



ההסבר של שולי: כדי להוכיח את הטענה, בניתי באמצעות המחשב מספר טרפזים שווי שוקיים, חיברתי את אמצעי צלעותיהם הסמוכות, גררתי קודקודים, ותמיד התקבלו מעוינים.

- האם ההסבר של **שולי** משכנע שהטענה **נכונה**? נמקו.

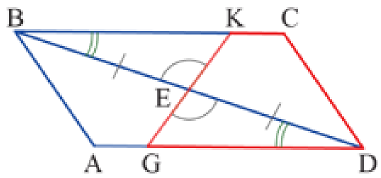
____

____

- בִּדקו באמצעות היישומון: [אמצעי צלעות בטרפז](#):
  האם נכונות הטענה בכל המקרים שהתקבלו על המסך **מבטיח** שבכל מקרה יתקבל מעוין?

ב. במסגרת שלפניכם טענה ולאחריה הסברים של שני תלמידים לטענה.
בִּדקו כל הסבר אם הוא משכנע בנכונות הטענה ונמקו.

טענה: ***קטע שעובר דרך אמצע אלכסון במקבילית, מחלק אותה לשני מרובעים שווים בשטחם.***



- **גילי אמר:** אני מוכיח את נכונות הטענה, כך:

$\Delta BEK \cong \Delta DEG$ (ז.צ.ז.)

$\Downarrow$

$BK = GD$

ולכן גם

$KC = GA$ (חיסור קטעים שווים באורכם מצלעות נגדיות במקבילית)

נוצרו שני טרפזים שהגובה שלהם h הוא גובה במקבילית ולפי נוסחת שטח טרפז מתקיים:

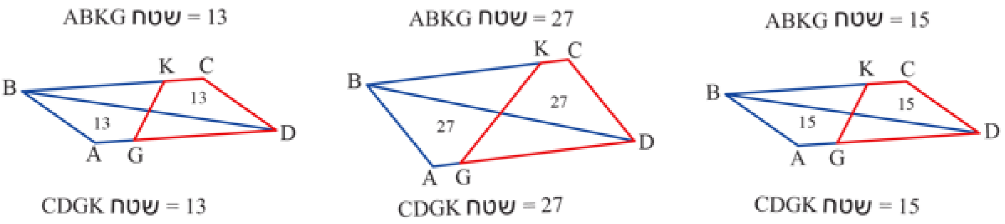
$$S_{BKGA} = \frac{BK + AG}{2} \times h = \frac{GD + KC}{2} \times h = S_{DGKC}$$

האם ההסבר של **גילי** משכנע שהטענה **נכונה**? נמקו.

____

____

❖ **רעות אמרה:** כדי להוכיח שהטענה נכונה, בניתי מקביליות בגיאוגברה, בכל מקבילית העברתי קטע דרך אמצע האלכסון, גררתי את קודקודי המקבילית וראיתי שתמיד מתקבלים שני מרובעים שווים בשטח.



האם ההסבר של **רעות** משכנע שהטענה **נכונה**? נמקו.

____

____

[לפעילות 1 מונגשת]

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

❖ דוגמאות רבות אינן מוכיחות נכונות של טענה כיוון שיכולה להיות דוגמה אחרת שמפריכה את הטענה. כדי להבטיח נכונות של טענה נדרשת הוכחה. (אם מדובר בטענת קיום: דוגמה אחת מאשרת/מוכיחה קיום. למשל: ***קיים משולש שקטעי האמצעים שלו יוצרים משולש שווה צלעות.*** במקרה זה שרטוט של משולש שווה צלעות עם קטעי האמצעים שלו, מהווה הוכחת קיום.)

❖ יש מגבלה לגיאומטריה דינמית (למשל גיאוגברה) לבדיקת נכונות של טענה. בדיקה באמצעות גיאומטריה דינמית יכולה לחזק השערה בדבר נכונות הטענה אבל היא אינה מבטיחה שנבדקו כל הדוגמאות האפשריות ולכן לא משכנעת שהטענה נכונה.

פעילות 2: מפריכים טענות שגויות

שלבי הפעילות

1. עבודהעל דף פעילות 2: ***מפריכים טענות שגויות***.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 2: *מפריכים טענות שגויות*

דף פעילות 2: *מפריכים טענות שגויות*

א. במסגרת שלפניכם טענה של **לאה**. היא הגיעה למסקנתה לאחר שפתחה את **היישומון**: קטע ממפגש אלכסוני מעוין, וגררה את הקודקודים של המעוין.

הטענה של לאה:
אם קטע יוצא מנקודת המפגש של אלכסוני מעוין וחותך אחת מצלעות המעוין, אז הוא חוצה את הצלע הזו.

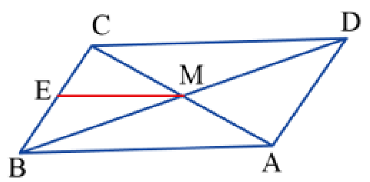
האם אתם מסכימים עם טענתה של **לאה**? ☐ כן ☐ לא

אם כן, נַסו להוכיח שהטענה נכונה.

אם לא, צִרו דוגמה נגדית (תוכלו להיעזר ביישומון).

ב. במסגרת שלפניכם טענה.

נתון: ABCD מקבילית.
מחברים את הנקודה E שעל הצלע BC עם M נקודת המפגש של אלכסוני המקבילית, ומתקבל טרפז EMDC.
מסקנה: CE = BE



בדקו באמצעות היישומון: טרפז בתוך מקבילית אם אתם יכולים ליצור דוגמה נגדית לטענה.

אם יצרתם דוגמה נגדית לטענה הַעתיקו אותה. אם לא, נַסו להוכיח את הטענה.

לפעילות 2 מונגשת

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- טענה נכונה רק אם היא נכונה עבור **כל** מקרה פרטי המקיים את הנתונים. לכן:
  - דוגמאות אינן מספיקות כדי להסיק שטענה נכונה ויש **להוכיח אותה,** אלא אם מדובר בטענת קיום. כמו כן, אם מספר המקרים הפרטיים סופי, בדיקת כל המקרים הפרטיים מספיק כדי להוכיח את נכונות הטענה. לדוגמה, אפשר לבדוק את נכונות הטענה הבאה: משולש שאורכי צלעותיו הם 6,13 ,6 הוא קהה זווית.
  - כדי לפסול טענה מספיק להביא **דוגמה נגדית**: דוגמה המקיימת את הנתונים ואינה מקיימת את המסקנה. (על מנת להסביר זאת, אפשר להיעזר בהפרכת טענות פשוטות **שאינן נכונות**. למשל, בכל יום רביעי יש לימודים בביה"ס או טענה במתמטיקה: הסכום של שני מספרים שלמים גדול מכל אחד מהמחוברים.)
- המגבלה של גיאומטריה דינמית (למשל גיאוגברה) לבדיקת נכונות של טענה.
  - ביישומון ניתן לראות דוגמאות רבות המחזקות טענה נכונה אבל אינן מוכיחות את הטענה אפילו למקרה פרטי בגלל מגבלת הדיוק של המחשב. (היישומון לא מדייק במדידות – ייתכן למשל שזווית המוצגת כ-90 מעלות היא בת 89.9999 מעלות ולכן מה שנראה כמלבן הוא מקבילית שאינה מלבן).
  - ביישומון ניתן לראות דוגמה נגדית להפרכת טענה שאינה נכונה, במקרה זה הדיוק שלהמחשב פחות רלוונט, ובמקרה זה הדוגמה היא **הוכחה** שהטענה איננה נכונה**.**