



## תיק משימטיקה

# בעיות בהקשר ומשוואות

להגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

© כל הזכויות שמורות

## תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימת הערכה
6	משימה: מקטינים קבוצות
8	הערכת תוצרי תלמידים
9	פעילות בעקבות ההערכה
9	פעילות: הסברים לשלבים בפתרון
10	עבודה על דף הפעילות: הסברים לשלבים בפתרון
14	דיון

# פתיחה<sup>1</sup>



## מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשר בין בעיות הנתונות בהקשר חוץ-מתמטי ובין ביטויים ומשוואות המשמשים כמודל מתמטי להן, ולתת מענה לקשיים המתגלים. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים: בהינתן בעיה בהקשר חוץ-מתמטי,

- ❖ לקשר בין ביטויים אלגבריים המשמשים במודל מתמטי לבעיה הנתונה, ובין הבעיה.
- ❖ לקשר בין משוואה המשמשת כמודל מתמטי לבעיה הנתונה, ובין הבעיה.
- ❖ לקשר בין פתרון משוואה המשמשת כמודל מתמטי לבעיה הנתונה, ובין פתרון הבעיה.



## זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת ההערכה: 15-20 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.



## החומרים והעזרים הדרושים

- לצורך העבודה על משימת הערכה (לכל תלמיד/ה):
  - ❖ דף המשימה: [מקטינים קבוצות](#).
- לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
  - ❖ דף הפעילות: [הסברים לשלבים בפתרון](#).

<sup>1</sup> חמישה תיקי משימטיקה עוסקים בהיבטים שונים של שימוש במידול מתמטי לפתרון בעיות המוצגות בשפה טבעית בהקשרים פנים וחוץ-מתמטיים: אותה בעיה – הגדרות שונות של המשתנה, התחשבות באילוצים בפתרון בעיות, משוואות כמודל מתמטי לקשר בין גדלים, בעיות בהקשר ומשוואות, בעיות בהקשר ופונקציות.



## רקע

פתרון מתמטי של בעיות בהקשר חוץ מתמטי כולל בנייה של מודל מתמטי לבעיה, והפעלה של כלים מתמטיים על המודל, כדי למצוא פתרון לבעיה. סוג נפוץ של מודל מתמטי הוא משוואה (או מערכת משוואות). לדוגמה, המשוואה  $x+2=(x-2)+(x-6)$  כאשר  $x$  מייצג את גילו של האח הבכור בשנה זו,  $x \geq 8$ , מספר שלם, יכולה לשמש כמודל מתמטי לבעיה הבאה:

שלושה אחים נולדו ב-1 בספטמבר. האח הבכור מבוגר מהאח האמצעי בארבע שנים, ומהאח הצעיר בשמונה שנים. האח הבכור אמר להוריו: "בעוד שנתיים יהיה הגיל שלי שווה לסכום הגילים של שני האחים שלי". מה יהיה הגיל של כל אחד משלושת האחים בעוד שנתיים?

תלמידים רבים מתקשים ביצירת קשרים בין בעיה בהקשר חוץ מתמטי ובין משוואה המשמשת לה כמודל מתמטי. לדוגמה, תלמידים מתקשים להסביר מה מייצגים, בהקשר של הבעיה, המשתנה (או המשתנים), הביטויים והמשוואה. לדוגמה בבעיה שלמעלה, תלמידים מתקשים להסביר מה מייצג כל אחד מהביטויים הבאים בהקשר של הבעיה:  $x+2$ ,  $x-2$ ,  $x-6$ , בהינתן ש- $x$  מייצג את גילו של האח הבכור בשנה זו. קושי נוסף של תלמידים הוא לקשור בין פתרון המשוואה והפתרון של הבעיה ולהסביר את משמעות הפתרונות של המשוואה בהקשר של הבעיה. לדוגמה, פתרון המשוואה שלמעלה הוא  $x=10$ . תלמידים נוטים לפעמים לרשום 10 כפתרון הבעיה, בלי לקשור את 10 לגיל האח הבכור, ובלי להתייחס לכך שפתרון הבעיה מחייב למצוא את גילאי שלושת האחים, ולכן פתרון הבעיה הוא: בעוד שנתיים האחים יהיו בני 2, 6 ו-10. התיק **בעיות בהקשר ומשוואות** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימת הערכה: [מקטינים קבוצות](#).
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

## עבודה על משימת הערכה

בתיק זה משימת הערכה אחת:

❖ המשימה: **מקטינים קבוצות.**

במשימה נתונה בעיה ושני פתרונות אלגבריים חלופיים. התלמידים מתבקשים לקשר בין כל שלב בפתרונות האלגבריים הנתונים לבין ההקשר של הבעיה, ולתת תשובה לשאלה שנשאלה בבעיה.



## משימה: מקטינים קבוצות

### משימה: מקטינים קבוצות

בשיעור מתמטיקה, המורה רוחמה ביקשה מהתלמידים לפתור את הבעיה הבאה:

מנהלת בית הספר תכננה יום גיבוש לכיתות ט.  
 המנהלת החליטה לחלק את 240 התלמידים שבשכבה לקבוצות, שיתחרו ביניהן בביצוע משימות.  
 כדי שהתחרות תהיה הוגנת, הוחלט שבכל קבוצה יהיה אותו מספר תלמידים, מכיתות שונות.  
 לאחר בדיקת גודל הקבוצות, החליטה המנהלת שמספר התלמידים בכל קבוצה גדול מידי,  
 ויש חשש שהם יתקשו לשתף פעולה.  
 לכן היא הקטינה ב-4 את מספר התלמידים בכל קבוצה, ויצרה שוב קבוצות שוות בגודלן.  
 מספר הקבוצות לאחר השינוי גדל ב-3 לעומת התכנון.  
 כמה קבוצות וכמה תלמידים בקבוצה היו לאחר שינוי התכנית?

**עמרי וגליה** הגישו למורה פתרונות חלקיים שכללו את השלבים האלגבריים בלבד, ללא הסברים מילוליים.  
א. השלימו בפתרון של עמרי:

- ❖ מה מייצג כל אחד מהביטויים בהקשר של הבעיה?
- ❖ מה מתארת המשוואה בהקשר של הבעיה?
- ❖ מה משמעות הפתרונות של המשוואה בהקשר של הבעיה?
- ❖ כמה קבוצות היו אחרי השינוי?
- ❖ כמה תלמידים היו בכל קבוצה אחרי השינוי?

### הפתרון של עמרי

$x$  מייצג את מספר הקבוצות לפי התכנון המקורי ( $x$  מספר טבעי)

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{240}{x}$  מייצג \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{240}{x+3}$  מייצג \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה המשוואה  $4 - \frac{240}{x} = \frac{240}{x+3}$  מתארת \_\_\_\_\_

פתרונות המשוואה הם:  $x_2 = 12$      $x_1 = -15$

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_1$  \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_2$  \_\_\_\_\_

כמה קבוצות היו אחרי השינוי? \_\_\_\_\_ כמה תלמידים היו בכל קבוצה אחרי השינוי? \_\_\_\_\_

**ב. השלימו בפתרון של גליה:**

- ❖ מה מייצג כל אחד מהביטויים בהקשר של הבעיה?
- ❖ מה מתארת המשוואה בהקשר של הבעיה?
- ❖ מה משמעות הפתרונות של המשוואה בהקשר של הבעיה?
- ❖ כמה קבוצות היו אחרי השינוי?
- ❖ כמה תלמידים היו בכל קבוצה אחרי השינוי?

**הפתרון של גליה**

$x$  מייצג את מספר התלמידים בקבוצה לפי התכנון המקורי ( $x$  מספר טבעי גדול מ-4)

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{240}{x}$  מייצג \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{240}{x-4}$  מייצג \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה המשוואה  $\frac{240}{x-4} = \frac{240}{x} + 3$  מתארת \_\_\_\_\_

פתרונות המשוואה הם:  $x_1 = -16$   $x_2 = 20$

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_1$  \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_2$  \_\_\_\_\_

כמה קבוצות היו אחרי השינוי? \_\_\_\_\_ כמה תלמידים היו בכל קבוצה אחרי השינוי? \_\_\_\_\_

[למשימה מונגשת](#)

## הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובות נכונות	טעו בקישור בין הביטויים/המשוואה ובין הבעיה	טעו בקישור בין פתרון המשוואה ובין פתרון הבעיה	הערות
תלמיד א	√			
תלמיד ב			√	
תלמיד ג		√		
סך-הכול				

**לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה: מקטינים קבוצות**

הפתרון של גליה	הפתרון של עמרי
<p><math>x</math> מייצג את מספר התלמידים בקבוצה לפי התכנון המקורי (<math>x</math> מספר טבעי גדול מ-4)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{240}{x}</math> מייצג את מספר הקבוצות לפי התכנון המקורי</p> <p><math>\frac{240}{x-4}</math> מייצג את מספר הקבוצות <b>בעקבות שינוי</b></p> <p style="text-align: center;"><b>התכנית</b></p> <p>מתארת קשר בין מספר הקבוצות לפי התכנון ובין מספרן בעקבות השינוי</p> <p><math>x_1 = -16</math> פתרון שלילי שאינו מתאים לאילוצי הבעיה</p> <p><math>x_2 = 20</math> מייצג את מספר התלמידים בקבוצה לפי התכנון המקורי</p>	<p><math>x</math> מייצג את מספר הקבוצות לפי התכנון המקורי (<math>x</math> מספר טבעי)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{240}{x}</math> מייצג את מספר התלמידים בקבוצה לפי התכנון המקורי</p> <p><math>\frac{240}{x+3}</math> מייצג את מספר התלמידים בקבוצה <b>בעקבות שינוי</b></p> <p style="text-align: center;"><b>התכנית</b></p> <p>מתארת קשר בין מספר התלמידים בקבוצה לפי התכנון ובין מספרם בעקבות השינוי</p> <p><math>x_1 = -15</math> פתרון שלילי שאינו מתאים לאילוצי הבעיה.</p> <p><math>x_2 = 12</math> מייצג את מספר הקבוצות לפי התכנון המקורי</p>

בעקבות שינוי התכנית היו 12 קבוצות ובכל קבוצה 20 תלמידים.

## פעילות בעקבות ההערכה

מוצעת פעילות שמטרתה לסייע למורה לתת מענה לקשיים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.



### פעילות: הסברים לשלבים בפתרון

#### שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: **הסברים לשלבים בפתרון.**
2. דיון.

## עבודה על דף הפעילות: הסברים לשלבים בפתרון

### דף הפעילות: הסברים לשלבים בפתרון

בשיעור מתמטיקה, המורה רוחמה ביקשה לפתור שלוש בעיות.

#### הבעיה הראשונה

שלושה אחים נולדו כולם ב-1 בספטמבר.  
האח הבכור מבוגר מהאח האמצעי בארבע שנים, ומהאח הצעיר בשמונה שנים.  
הבכור אמר להוריו:  
"בעוד שנתיים גילי יהיה שווה לסכום הגילים של שני האחים שלי".  
מה יהיה הגיל של כל אחד משלושת האחים בעוד שנתיים?

$x$  מציג את גילו של האח הבכור השנה ( $x \geq 8$ ,  $x$  מספר שלם).

א. התאימו לכל ביטוי את מה שהוא מייצג.

מייצג את	הביטוי
• גיל האח הבכור בעוד שנתיים	• $x - 8$
• גיל האח הצעיר בעוד שנתיים	• $x - 6$
• גיל האח הצעיר השנה	• $x - 4$
• גיל האח האמצעי בעוד שנתיים	• $x - 2$
• גיל האח האמצעי השנה	• $x + 2$

ב. המשוואה  $x + 2 = (x - 2) + (x - 6)$  מתארת קשר:

- ❖ בין סכום גילי האחים הצעירים ובין גיל הבכור השנה.
- ❖ בין סכום גילי האחים הבנים הצעירים ובין גיל הבכור בעוד שנתיים.
- ❖ בין סכום גילי האחים הבנים הצעירים השנה ובין גיל הבכור בעוד שנתיים.
- ❖ בין סכום גילי האחים הבנים הצעירים בעוד שנתיים, ובין גיל הבכור השנה.

ג. מהו פתרון המשוואה? \_\_\_\_\_  
מה המשמעות של פתרון זה בהקשר של הבעיה?

ד. התשובה לשאלה "מה יהיה הגיל של כל אחד משלושת האחים בעוד שנתיים?" היא:

- ❖ האחים יהיו בני 4, 6 ו-10
- ❖ האחים יהיו בני 2, 6 ו-10
- ❖ האחים יהיו בני 4, 8 ו-12
- ❖ האחים יהיו בני 6, 10 ו-14

### הבעיה השנייה

ארבעה אחים נולדו ב-1 בינואר, בהפרשי גיל של ארבע שנים זה מזה שלפניו. באחד מימי ההולדת שלהם, אחד האחים אמר: "הסכום של גיל הבכור וגיל הצעיר שווה לסכום הגילים של שני האחים האמצעיים". מה יכול להיות הגיל של כל אחד מארבעת האחים?

$x$  מייצג את הגיל של האח הבכור ( $12 \leq x \leq 120$ ,  $x$  מספר טבעי).

הקיפו את התיאור המתאים לכל אחד משלבי הפתרון:

א. הביטוי  $x - 8$  מייצג את:

- הגיל של האח שנולד שני.
- הגיל של האח שנולד שלישי.
- הגיל של האח הצעיר.

ב. המשוואה  $x + (x - 12) = (x - 4) + (x - 8)$  מתארת קשר:

- בין סכום הגילים של ארבעת האחים ובין מספר המתאים לסכום זה.
- בין סכום הגילים של שני האחים הצעירים יותר ובין סכום הגילים של ארבעת האחים.
- בין סכום הגילים של הבכור והצעיר ובין סכום הגילים של שני האחים האמצעיים.

ג. פתרון המשוואה הוא:

- $x = 0$
- אין פתרון.
- כל המספרים הממשיים.
- $x \geq 12$ , מספר שלם.

ד. מה יכול להיות הגיל של כל אחד מארבעת האחים?

**נאווה אמרה:** המספרים המתאימים לגילים של האחים יכולים להיות כל ארבעה מספרים שלמים לא שליליים שהם בהפרשים של 4 זה מזה.

**חוה אמרה:** לפי דבריך האחים יכולים להיות בני 200, 196, 192 ו-188. זה לא ייתכן.

מי צודקת? נאווה/ חוה/ שתייהן צודקות/ שתייהן טועות

הסבירו: \_\_\_\_\_

### הבעיה השלישית

בסיטונאות **מקור הקפה** מקבלים בכל משלוח 90 ק"ג קפה ואורזים אותו בצנצנות ובפחיות, בהתאם להזמנות המתקבלות עבור כל משלוח.

מנהלת הסיטונאות מתכננת לרכוש מראש את האריזות הדרושות לכל סוגי ההזמנות האפשריות: להזמנות הכוללות אריזות משני הסוגים, ולהזמנות הכוללות אריזה מסוג אחד בלבד – רק צנצנות או רק פחיות.

מספר הפחיות הדרושות לאריזת כל הכמות של 90 ק"ג קפה, גדול ב-15 ממספר הצנצנות הדרושות למטרה זו.

משקל הקפה בפחית קטן ב-0.5 ק"ג ממשקלו בצנצנת.

כמה צנצנות וכמה פחיות צריכה מנהלת הסיטונאות לרכוש כדי להיות מוכנה לכל סוג הזמנה אפשרי? מה משקל הקפה בצנצנת? מה משקל הקפה בפחית?

נב, אלונה וברוש הגישו פתרונות חלקיים.

א. קראו את הפתרון של **נבו**, השלימו את המקומות הריקים, וענו על השאלה.

### הפתרון של נבו

$x$  מייצג את מספר הצנצנות הדרושות ( $x$  מספר טבעי).

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x}$  מייצג את משקל הקפה בצנצנת אחת.

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x+15}$  מייצג את: \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה, המשוואה  $\frac{90}{x} = \frac{90}{x+15} + 0.5$  מתארת קשר בין משקל הקפה בצנצנת אחת ובין משקל הקפה בפחית אחת.

פתרונות המשוואה הם:  $x_1 = -60$   $x_2 = 45$

בהקשר של הבעיה, משמעות הפתרון  $x_1$ : פתרון שלילי לא בתחום, לכן לא מתאים לבעיה.

בהקשר של הבעיה, משמעות הפתרון  $x_2$ : \_\_\_\_\_

כמה אריזות ומה משקל הקפה באריזה אחת, עבור כל אחת משתי האפשרויות?

אפשרות אחת: \_\_\_\_\_ **צנצנות**. משקל הקפה בכל **צנצנת**: \_\_\_\_\_ ק"ג.

אפשרות שנייה: \_\_\_\_\_ **פחיות**. משקל הקפה בכל **פחית**: \_\_\_\_\_ ק"ג.

ב. השלימו את הפתרון של אלונה.

### הפתרון של אלונה

$x$  מייצג את מספר הפחיות הדרושות ( $x > 15$ ,  $x$  מספר טבעי).

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x}$  מייצג את \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x-15}$  מייצג את \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה:

המשוואה  $\frac{90}{x} = \frac{90}{x-15} - 0.5$  מתארת קשר בין \_\_\_\_\_ ובין \_\_\_\_\_

פתרונות המשוואה הם:  $x_1 = -45$   $x_2 = 60$

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_1$ : \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_2$ : \_\_\_\_\_

כמה אריזות ומה משקל הקפה באריזה אחת, עבור כל אחת משתי האפשרויות?

אפשרות אחת: \_\_\_\_\_

אפשרות שנייה: \_\_\_\_\_

ג. השלימו את הפתרון של ברוש.

### הפתרון של ברוש

$x$  מייצג את משקל הקפה בפחית אחת ( $x$  מספר טבעי).

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x}$  מייצג את: \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה הביטוי  $\frac{90}{x+0.5}$  מייצג את: \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה המשוואה  $\frac{90}{x} = \frac{90}{x+0.5} + 15$  מתארת קשר \_\_\_\_\_

פתרונות המשוואה הם:  $x_1 = -2$   $x_2 = 1.5$

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_1$ : \_\_\_\_\_

בהקשר של הבעיה משמעות הפתרון  $x_2$ : \_\_\_\_\_

כמה אריזות ומה משקל הקפה באריזה אחת עבור כל אחת משתי האפשרויות?

אפשרות אחת: \_\_\_\_\_

אפשרות שנייה: \_\_\_\_\_

[לפעילות מונגשת](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ לביטויים אלגברים ולמשוואות שנוצרים במהלך פתרון בעיות, יש משמעות בהקשר של הבעיה.
- ❖ התייחסות למשמעות בכל שלב עוזרת לפתור את הבעיה.
- ❖ הבנת המשמעות של פתרון המשוואה מאפשרת לפתור את הבעיה
- ❖ הבנת המשמעות של פתרון המשוואה מאפשרת בדיקה של פתרון הבעיה על ידי שילוב הפתרון בתוך ההקשר של הבעיה.
- ❖ התשובה לבעיה חייבת להתאים לאילוצי הבעיה ולהיות הגיונית. למשל: ידוע שאנשים לא חיים לנצח. לכן, בתשובה לבעיה שעוסקת בגיל של אנשים צריך לקחת בחשבון שהתשובה לא יכולה להיות יותר מ-120.