



תיק משימטיקה

זהויות מתמטיות

וביטויים נגדיים

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימות הערכה
7	משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים
8	משימה 2: מי צודק?
9	משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים
9	הערכת תוצרי תלמידים
13	פעילות בעקבות ההערכה
13	פעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים
14	עבודה על דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק א'
15	דיון
16	עבודה על דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק ב'
18	דיון



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולות התלמידים לעבוד עם ביטויים נגדיים. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לזהות ביטויים נגדיים.
- ❖ ליצור ביטוי נגדי לביטוי נתון.
- ❖ להשתמש בביטויים נגדיים.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 30-45 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: 30-45 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים.
- ❖ דף משימה 2: מי צודק?
- ❖ דף משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק א'.
- ❖ דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק ב'.

¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בזהויות מתמטיות. שני תיקים – **נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות** – עוסקים בזהויות שהשימוש בהן שכיח. התיק – **ביטויים ומשוואות עם מכנים מספריים** עוסק בזהויות המכילות מכנים והטיפול בהם במהלך פתרון משוואות, והתיק – **זהויות מתמטיות וביטויים נגדיים** עוסק בקשר בין זהויות וביטויים נגדיים.



רקע

איבר הופכי הינו מושג מרכזי בהקשר של מבנים אלגבריים כמו חבורות. בלימודי המתמטיקה בבית הספר יש לאיבר הופכי מופעים שונים, כמו מספר או ביטוי הופכי (כאשר עוסקים בפעולת הכפל בין מספרים או בין ביטויים), פונקציה הופכית (כאשר עוסקים בפעולת ההרכבה של פונקציות), מספר או ביטוי נגדי (כאשר עוסקים בפעולת החיבור בין מספרים או בין ביטויים). תיק זה עוסק בביטויים נגדיים: שני ביטויים אלגבריים שהם הופכיים זה לזה ביחס לפעולת החיבור, כלומר סכומם אפס (שהוא איבר היחידה של פעולת החיבור).

תלמידים מתקשים לעיתים בעבודה עם ביטויים הופכיים, אם משום שאינם קושרים את המונח עם משמעות ההגדרה שלו (סכום אפס) ואם משום שהם מתקשים בטכניקה אלגברית. למשל,

❖ התייחסות לביטויים $(2-x)$ ו- $(-2-x)$ כנגדיים זה לזה על-סמך המחבר הראשון בלבד, או התייחסות

לביטויים $(2-x)^2$ ו- $(x-2)^2$ כנגדיים (ולא כביטויים זהים) על-סמך בסיסי החזקות בלבד.

❖ התייחסות לשתי המכפלות $(x-2)(x-3)$ ו- $(2-x)(3-x)$ או לשני השברים $\frac{x-2}{x-3}$ ו- $\frac{2-x}{3-x}$ ($x \neq 3$)

כנגדיים זה לזה, מכיוון שלכל גורם במכפלה האחת יש גורם נגדי במכפלה השנייה, או מכיוון שגם המונים וגם המכנים בשני השברים הם ביטויים נגדיים זה לזה.

❖ אי-זיהוי של זוג ביטויים נגדיים כתוצאה משינוי מקומם של הרכיבים בביטויים אלה – למשל, $(a-b)$ ו- $(b-a)$.

❖ אי-שימוש בביטויים נגדיים בפעולות פשוטות שונות – כמו למשל, צמצום שברים, ביטול מחוברים נגדיים בחיבור, מציאת מכנה משותף בחיבור שברים, מציאת פתרונות של משוואות באמצעות שיקולים הקשורים לביטויים נגדיים.

התיק **זהויות מתמטיות וביטויים נגדיים** נועד לסייע למורים לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

▪ משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים.

▪ משימה 2: מי צודק?

▪ משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים.

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

❖ משימה 1: **מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים.**

❖ משימה 2: **מי צודק?**

❖ משימה 3: **ביטויים, ביטויים, ביטויים.**

במשימה 1 התלמידים מתבקשים לזהות ביטויים נגדיים, וליצור ביטויים נגדיים לביטוי נתון. במשימה 2 התלמידים נדרשים לקבוע אם הביטויים הרשומים הם נגדיים כשהם מופיעים כתשובות אפשריות של תלמידים. במשימה 3 התלמידים מתבקשים לפתור בעיות המזמנות שימושים בביטויים נגדיים, המתבססים על כך שסכום שני ביטויים נגדיים הוא אפס.

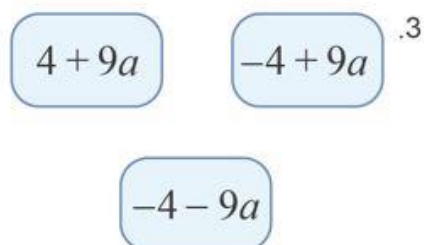
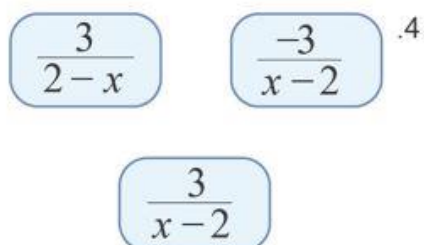
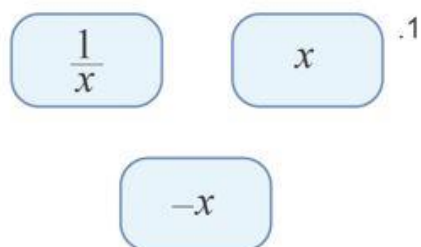
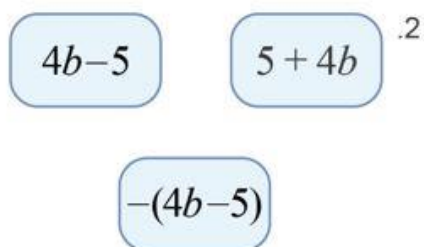
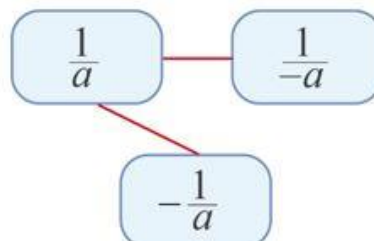


משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים

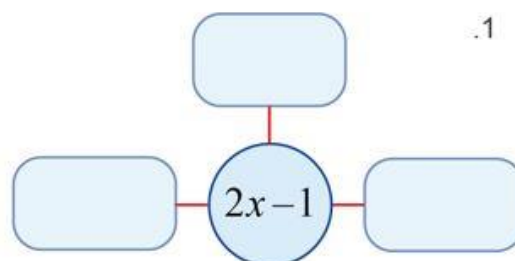
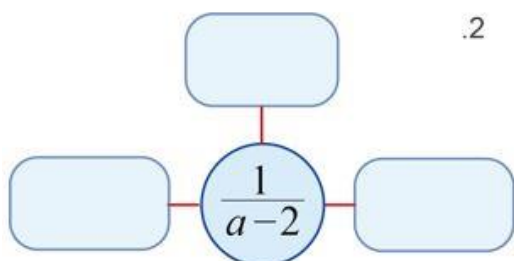
משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים

א. לפניכם שלשות של ביטויים. בכל שלשה סברו בקו זוגות של ביטויים נגדיים זה לזה. (תיתכן יותר מהתאמה אחת – ראו דוגמה.)

דוגמה



ב. כתבו בכל סעיף, שלושה ביטויים נגדיים לביטוי הרשום בעיגול.



למשימה 1 מונגשת



משימה 2: מי צודק?

משימה 2: מי צודק?

א. תלמידי הכיתה התבקשו למצוא ביטוי נגדי לביטוי $\frac{1}{2-x}$ ($x \neq 2$).

בוריס אמר: ביטוי נגדי ל- $\frac{1}{2-x}$ הוא הביטוי $\frac{-1}{x-2}$

אנה אמרה: ביטוי נגדי ל- $\frac{1}{2-x}$ הוא הביטוי $\frac{1}{x-2}$

קבעו: מי צודק? בוריס צודק / אנה צודקת / שניהם צודקים / שניהם טועים

הסבירו תשובתכם:

ב. תלמידי הכיתה התבקשו למצוא ביטוי נגדי לביטוי $(x-2)(x-3)$

חיים אמר: ביטוי נגדי ל- $(x-2)(x-3)$ הוא הביטוי $(2-x)(3-x)$

מיקי אמר: ביטוי נגדי ל- $(x-2)(x-3)$ הוא הביטוי $(-x-2)(x-3)$

קבעו: מי צודק? חיים צודק / מיקי צודק / שניהם צודקים / שניהם טועים

הסבירו תשובתכם:

ג. תלמידי הכיתה התבקשו למצוא ביטוי נגדי לביטוי $(2a-3)^2$

ערן אמר: ביטוי נגדי ל- $(2a-3)^2$ הוא הביטוי $(3-2a)^2$

יעל אמרה: ביטוי נגדי ל- $(2a-3)^2$ הוא הביטוי $-(3-2a)^2$

קבעו: מי צודק? ערן צודק / יעל צודקת / שניהם צודקים / שניהם טועים

הסבירו תשובתכם:

למשימה 2 מונגשת



משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים

משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים

א. עמוס אמר לאבירם שיש לו **קסם**:

לכל ביטוי אלגברי שייתנו לו, הוא יכול למצוא ביטוי, כך שסכום שני הביטויים יהיה אפס.
מהו לדעתכם **הקסם של עמוס**?

הדגימו את **הקסם של עמוס** על הביטויים הבאים:

ביטוי	ביטוי מתאים לקסם
$-2x - 6$	
$(2x - 6)^2$	
$\frac{1}{2x - 6} \quad (x \neq 3)$	

ב. נתון $a - b = 7$.

בכל אחד מהביטויים שלמטה, השתמשו בנתון זה, אם אפשר, כדי למצוא את ערכו המספרי של הביטוי.
אם אי-אפשר, סמנו X.

$$3(b - a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a + b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-a - b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{b - a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a - b)(b - a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ג. איך אפשר להשתמש בביטויים נגדיים כדי לפתור את המשוואה שלפניכם?

$$(x \neq 5) \quad \frac{1}{x - 5} + \frac{1}{5 - x} + 1 = x$$

למשימה 3 מוגשת

הערכת תוצרי תלמידים

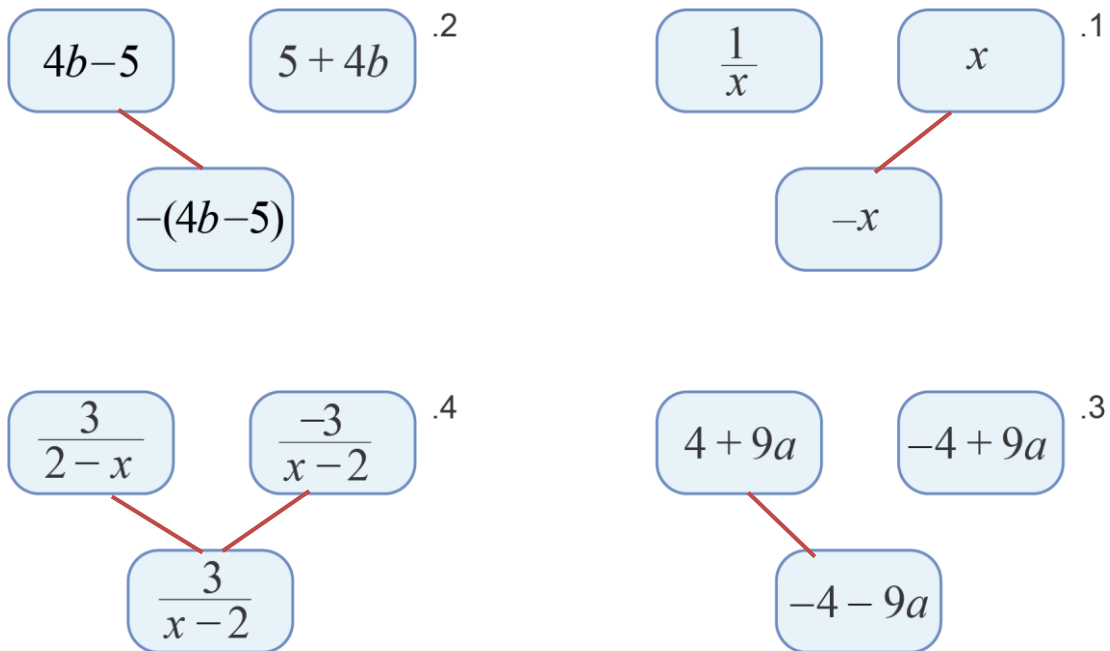
לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	קושי בזיהוי, ביצירה או בשימוש בביטויים נגדיים	הערות
תלמיד/ה 1			
תלמיד/ה 2			
תלמיד/ה 3			
סה"כ			

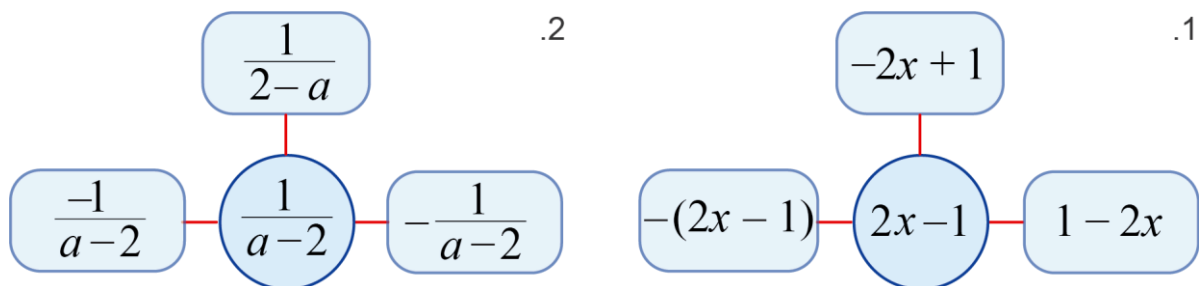
לצורך בדיקת תוצרי ההערכה ניתן להיעזר בפתרונות המשימות, להלן.

פתרון משימה 1: מזהים ויוצרים ביטויים נגדיים

א.



ב. לפניכם דוגמאות לביטויים נגדיים לביטויים הרשומים בעיגולים.



פתרון משימה 2: מי צודק?

א. **אנה צודקת.**

ב. **שניהם טועים.**

ג. **יעל צודקת.**

נימוק: צודק רק מי שהציע ביטוי שהסכום של עם הביטוי הנתון הוא אפס.

פתרון משימה 3: ביטויים, ביטויים, ביטויים

א. הביטויים בקסם של עמוס הם ביטויים נגדיים ולכן סכומם אפס.

לפניכם דוגמאות:

ביטוי	ביטוי מתאים לקסם
$-2x - 6$	$2x + 6$
$(2x - 6)^2$	$-(2x - 6)^2$
$\frac{1}{2x - 6} \quad (x \neq 3)$	$\frac{-1}{2x - 6} \quad (x \neq 3)$

ב.

$$3(b - a) = -21$$

לא ניתן לקבוע $a + b$

לא ניתן לקבוע $-a - b$

$$\frac{1}{b - a} = -\frac{1}{7}$$

$$(a - b)(b - a) = -49$$

ג. שני השברים שבאגף השמאלי של המשוואה הם ביטויים נגדיים, ולכן סכומם אפס, ופתרון המשוואה הוא $x = 1$

פעילות בעקבות ההערכה

להלן מוצעת פעילות בעקבות ההערכה, שמטרתה לסייע למורה לתת מענה לקשיים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.



פעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: **ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק א'.**
2. דיון.
3. עבודה על דף הפעילות: **ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק ב'.**
4. דיון.

דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק א'

1. תלמידים ותלמידות התבקשו למצוא ביטויים נגדיים לביטויים הנתונים. בהמשך תמצאו את הפתרונות שלהם. בדקו מי פתרו נכון והסבירו את קביעתכם.

א. הביטוי הנתון: $4 - 3x$

שולי אמרה: הביטוי $4 - 3x$ נגדי לביטוי הנתון, כי -4 נגדי ל-4.

מישל אמרה: הביטוי $3x - 4$ נגדי לביטוי הנתון, כי סכום שני הביטויים הוא אפס.

רחל אמרה: כדי לקבל ביטוי נגדי לביטוי שהוא סכום או הפרש צריך לרשום ביטוי נגדי לכל אחד מהמחוברים.

מי צודקת? ☐ שולי ☐ מישל ☐ רחל

הסבירו: _____

ב. הביטוי הנתון: $3(2 - x)$

יפה אמרה: הביטוי $3(2 - x)$ נגדי לביטוי הנתון, כי $x - 2$ נגדי ל- $2 - x$ ובמכפלה מספיק שאחד הגורמים הוא נגדי.

שרית אמרה: הביטוי $-3(x - 2)$ נגדי לביטוי הנתון, כי 3 ו- -3 הם נגדיים וגם $x - 2$ נגדי ל- $(2 - x)$.

מרינה אמרה: הביטוי $3(-2 - x)$ נגדי לביטוי הנתון, כי הביטוי $-2 - x$ והביטוי $2 - x$ הם נגדיים זה לזה, ובמכפלה מספיק שאחד הגורמים הוא נגדי.

מי צודקת? ☐ יפה ☐ שרית ☐ מרינה

הסבירו: _____

ג. הביטוי הנתון: $\frac{2}{x+3}$

יורי אמר: הביטוי $\frac{2}{x-3}$ נגדי לביטוי הנתון, כי כדי לקבל ביטוי נגדי למנה אפשר ליצור ביטוי נגדי למכנה.

אלכס אמר: הביטוי $\frac{-2}{-(x+3)}$ נגדי לביטוי הנתון, כי יצרתי נגדיים למונה ולמכנה.

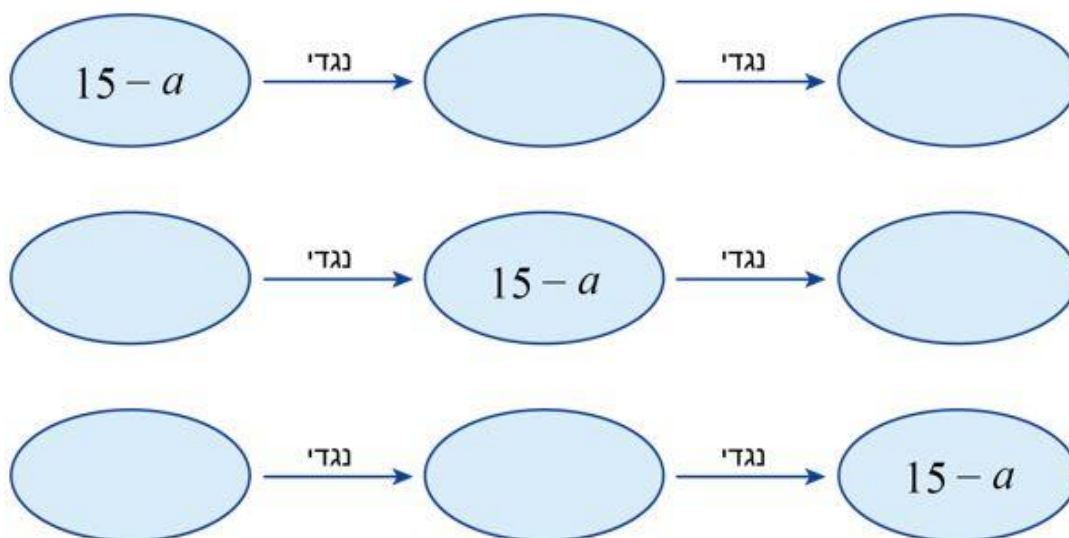
סשה אמר: הביטוי $\frac{2}{-x-3}$ נגדי לביטוי הנתון, כי כדי לקבל ביטוי נגדי למנה אפשר ליצור ביטוי נגדי למכנה.

מי צודק? ☐ יורי ☐ אלכס ☐ סשה

הסבירו: _____

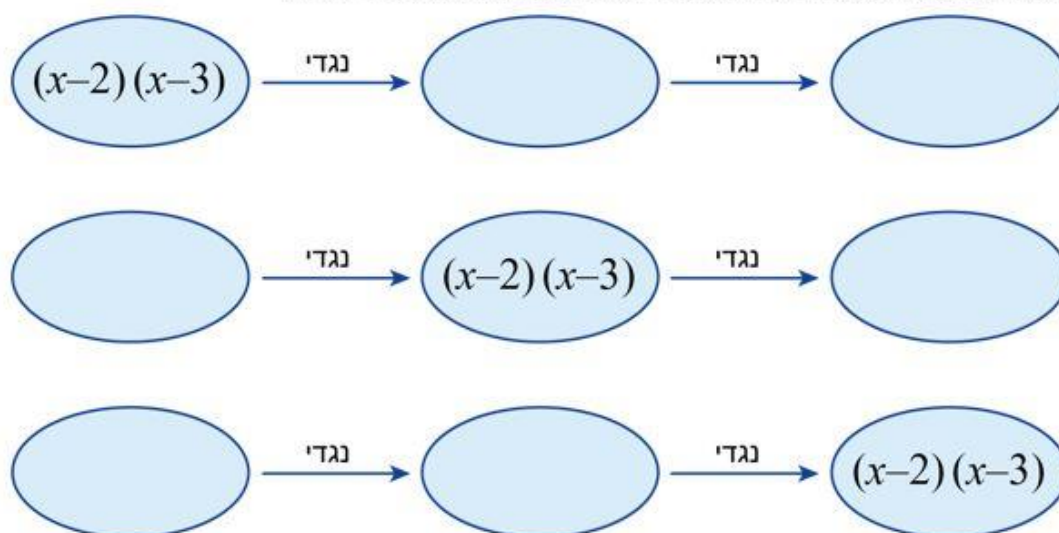
2. א. השלימו בכל שורה ביטויים מתאימים.

מהו הקשר בין הביטוי הרשום משמאל והביטוי הרשום מימין, בכל שורה?



ב. השלימו בכל שורה ביטויים מתאימים.

מהו הקשר בין הביטוי הרשום משמאל והביטוי הרשום מימין, בכל שורה?



[לפעילות חלק א' מונגשת](#)

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ אסטרטגיות לבניית ביטויים נגדיים (למשל, בסכום ניתן לכתוב את הנגדי של כל מחובר, במכפלה ניתן לכתוב ביטוי נגדי לאחד הגורמים בלבד, ובמנה ניתן לכתוב את הביטוי הנגדי למונה או למכנה, אך לא לשניהם).
- ❖ ביטוי נגדי לנגדי של ביטוי נתון, זהה לביטוי הנתון.

דף הפעילות: ביטויים נגדיים וביטויים זהים חלק ב'

1. הקיפו בכל סעיף את כל הביטויים הנגדיים לביטוי שבמשבצת.
מה הקשר בין כל הביטויים הנגדיים לאותו ביטוי? הסבירו מדוע זה מתקיים?
אם יש רק ביטוי נגדי אחד לביטוי הרשום, הוסיפו ביטוי נגדי.

א.	$\frac{a}{b}$	$\frac{-a}{b}$	$\frac{-a}{-b}$	$-\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$
ב.	$a(-b)$	$(-a)b$	$(-a)(-b)$	$-ab$	ab
ג.	$b-a$	$a-b$	$-a+b$	$-a-b$	$a+b$
ד.	$b-a$	$-(a-b)$	$-a+b$	$-a-b$	$a-b$

2. הטענות הבאות נכונות. הסבירו מדוע.

א. $a-b$ ו- $b-a$ הם ביטויים נגדיים.

הסבר:

ב. $(a-b)^2$ ו- $(b-a)^2$ אינם ביטויים נגדיים.

הסבר:

ג. $\frac{4}{a-b}$ ו- $\frac{4}{b-a}$ הם ביטויים נגדיים.

הסבר:

ד. $\frac{4}{a-b}$ ו- $\frac{-4}{-(a-b)}$ אינם ביטויים נגדיים.

הסבר:

3. נתון הביטוי: $\frac{x-5}{5-x} \quad (x \neq 5)$

הציבו בביטוי הנתון את ערכי x הבאים ומצאו את תוצאות ההצבה:

$$x = -3$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

האם אפשר להציב בביטוי הנתון מספר אחר, כך שתתקבל תוצאה שונה מהתוצאה שקיבלתם?

אם כן, הציגו דוגמה.

אם לא, הסבירו תשובתכם.

4. א. הסבירו מבלי לפשט, מדוע תוצאת ההצבה של כל מספר בביטוי $10(x-7)+10(7-x)$ היא אפס.

ב. פתרו את המשוואה $10(x-7)+10(7-x) = 0$

5. א. הסבירו מבלי לפשט, מדוע תוצאת ההצבה של כל מספר, בתחום ההצבה, בביטוי $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x}$ היא אפס.

ב. פתרו את המשוואה $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 0 \quad (x \neq 2)$

ג. פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 7 \quad (x \neq 2)$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 25 \quad (x \neq 2)$$

הסבירו.

[לפעילות חלק ב' מוגשת](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ יש אפשרויות שונות לכתיבת ביטויים נגדיים לביטוי נתון, וכל הביטויים המתקבלים זהים זה לזה.
- ❖ סכום שני ביטויים נגדיים הוא אפס לכל הצבה של מספר שבתחום ההצבה המשותף של אותם ביטויים.
- ❖ משוואה שבה באגף אחד סכום שני ביטויים נגדיים זה לזה ובאגף השני 0, היא זהות (משוואה שפתרונה כל המספרים שבתחום ההצבה). אם באגף אחד סכום שני ביטויים נגדיים זה לזה ובאגף השני יש מספר שונה מאפס, למשוואה אין לה פתרון.

- ❖ המנה של שני ביטויים נגדיים היא (-1) לכל הצבה של מספר שבתחום ההצבה. למשל, המנה $\frac{a-b}{b-a} = -1$ היא (-1) לכל a ו- b ($a \neq b$).