



תיק משימטיקה

שימוש במשפט מזויר

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: בודקים נימוקים
8	משימה 2: טענה שגויה
9	הערכת תוצרי תלמידים
10	פעילות בעקבות ההערכה
10	פעילות: כל התנאים שבמשפט
11	עבודה על דף הפעילות: כל התנאים שבמשפט חלק א'
12	עבודה על דף הפעילות: כל התנאים שבמשפט חלק ב'
14	דיון מסכם

פתיחה¹



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במשפט במהלך הוכחה של טענה גיאומטרית, רק אם מתקיימים כל התנאים ההכרחיים לשימוש במשפט.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

❖ לפסול נימוק לטענה גיאומטרית כאשר מתקיימים רק חלק מהתנאים ההכרחיים לשימוש בו.



זמני עבודה משוערים

❖ עבודה על משימות הערכה: 30-40 דקות.

❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 40-60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ דף משימה 1: [בודקים נימוקים](#).

❖ דף משימה 2: [טענה שגויה](#).

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ לפעילות חלק א'

▪ דף הפעילות: [כל התנאים שבמשפט חלק א'](#).

▪ יישומון: [ניצב אחד גדול פי 2 מהשני](#).

❖ לפעילות חלק ב'

▪ דף הפעילות: [כל התנאים שבמשפט חלק ב'](#).

▪ יישומון: [האם המשולש ישר זווית?](#)

▪ יישומון: [שטחים שווים או לא שווים](#).

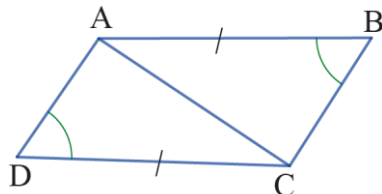
¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בשימוש במשפטים ידועים במהלך הוכחה. שלושה תיקים – **שימוש במשפט מזויף, שימוש במשפט מזויף: משולשים, שימוש במשפט מזויף: מרובעים** – מתמקדים בתנאים הדרושים לשימוש במשפט. תיק נוסף – **מציאת משפט מתאים: פרופורציה ודמיון** מתמקד בבחירה מושכלת של משפטים מתאימים.



רקע

הוכחה והפרכה של טענות היא פעילות מרכזית בכל ענפי המתמטיקה. במהלך הוכחה של טענות מתמטיות בכלל וגיאומטריות בפרט, מתבססים לעיתים קרובות, על הסקה דדוקטיבית, תוך שימוש במשפטים ידועים. קושי נפוץ של תלמידים במהלך הוכחה בגיאומטריה הוא הסקת מסקנה תוך התבססות על משפט ידוע, כאשר חלק מהתנאים המאפשרים שימוש במשפט לא מתקיימים.

לדוגמה:



נתון: במרובע ABCD

$$AB = CD$$

$$\angle B = \angle D$$

ישנם תלמידים שמסיקים מהנתונים שמשולש ABC חופף למשולש CDA, ומנמקים זאת באמצעות חפיפה לפי שוויון שתי צלעות וזווית מול אחת מהן בשני המשולשים.

הנימוק של התלמידים מתבסס על משפט שהתנאים לשימוש בו אינם מתקיימים: המשפט קובע שניתן להסיק חפיפה רק אם הזוויות השוות בגודלן, נמצאות מול הצלע הארוכה מבין שתי הצלעות השוות באורכן, בכל אחד משני המשולשים. לכן הנימוק של התלמידים, מתבסס על "משפט מזויף".

התיק **שימוש במשפט מזויף** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים להתחשב בכל התנאים שבמשפט, כשהם מנמקים או מסיקים מסקנות במהלך הוכחה, ולתת מענה לקושי זה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

▪ משימה 1: [בודקים נימוקים](#).

▪ משימה 2: [טענה שגויה](#).

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1: **בודקים נימוקים**.

❖ משימה 2: **טענה שגויה**.

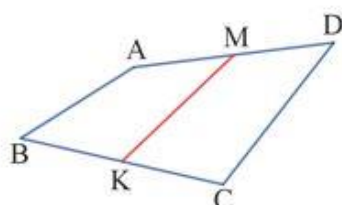
בשתי המשימות התלמידים צריכים לזהות נימוקים שבהם משתמשים ב"משפט מזויף", כלומר נתונים רק חלק מהתנאים המאפשרים שימוש במשפט.



משימה 1: בודקים נימוקים

משימה 1: בודקים נימוקים

לפניכם טענות של תלמידים עם נימוקים להצדקתן. חלק מהטענות נכונות וחלק אינן נכונות. קבעו לכל טענה אם הנימוק מצדיק אותה. אם אינו מצדיק, הסבירו.



א. הטענה של אלעד:

אם במרובע ABCD, M אמצע הצלע AD, K אמצע הצלע BC, ו-AD לא מקביל ל-BC, אז המרובע ABKM הוא טרפז.

הנימוק של אלעד:

KM הוא קטע אמצעים במרובע ABCD, לכן KM מקביל ל-AB. נתון ש-AD לא מקביל ל-BC, לכן למרובע ABKM יש זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות. מרובע שיש בו זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות הוא טרפז, ולכן המרובע ABKM הוא טרפז.

האם הנימוק של אלעד מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר: _____

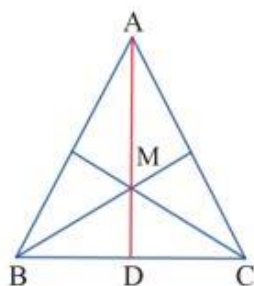
ב. הטענה של מירי:

אם $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים ($AB=AC$), וחוצי זוויות הבסיס נפגשים בנקודה M, אז הגובה לבסיס עובר דרך M.

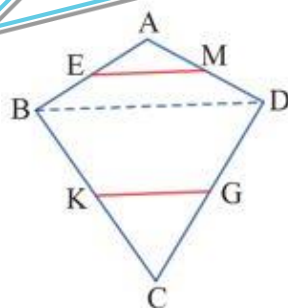
הנימוק של מירי:

נקודת הפגישה של חוצי הזוויות היא גם נקודת הפגישה של הגבהים, ושלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

האם הנימוק של מירי מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא



הסבר: _____



ג. הטענה של רמי:

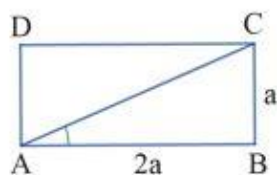
אם בדלתון ABCD, E היא אמצע הצלע AB, M היא אמצע הצלע AD, G היא אמצע הצלע DC, ו-K היא אמצע הצלע BC, אז $EM = KG$.

הנימוק של רמי:

$EM = KG$ כי קטע אמצעים במשולש שווה למחצית אורכה של הצלע השלישית, ולכן במשולשים ABD ו-CBD, שני הקטעים EM ו-KG שווים באורכם לחצי אורך האלכסון BD.

האם הנימוק של רמי מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר: _____



ד. הטענה של יוני:

אם במלבן אחת הצלעות שווה באורכה לחצי אורך צלע אחרת, אז גודל הזווית בין האלכסון לצלע הארוכה שווה ל- 30° .

הנימוק של יוני:

אם במשולש ישר זווית ABC אורך אחת הצלעות שווה למחצית אורך צלע אחרת, אז הזווית מול הצלע הקצרה שווה ל- 30° .

האם הנימוק של יוני מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר: _____

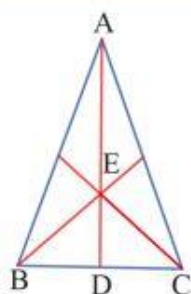
[למשימה 1 מונגשת](#)



משימה 2: טענה שגויה

משימה 2: טענה שגויה

נעמה ניסתה להוכיח טענה. המורה בדקה ומצאה טעות בהוכחה.
במסגרת שלפניכם הטענה שנעמה ניסתה להוכיח ולאחר המסגרת ההוכחה שהציעה נעמה.
בדקו את ההוכחה שנעמה הציעה וציינו מהי הטעות.



הטענה שנעמה ניסתה להוכיח:

אם במשולש שווה שוקיים ($AC = AB$)

הנקודה E היא נקודת המפגש של שלושת הגבהים,

אז שטח $\triangle EBC$ שווה ל- $\frac{1}{3}$ שטח $\triangle ABC$.

ההוכחה שנעמה הציעה:

AD תיכון ב- $\triangle ABC$ (הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון לבסיס)
 $\Downarrow$

$ED = \frac{1}{3} \cdot AD$ (כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים, כך שאורך הקטע

הקרוב לקודקוד הוא $\frac{2}{3}$ מאורך התיכון, ואורך הקטע הקרוב לצלע הוא $\frac{1}{3}$ מאורך התיכון)

(לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$

(לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש) $S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot ED$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle EBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC}$$

מהי הטעות בהוכחה שנעמה הציעה?

[למשימה 2 מונגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	לא פסלו נימוקים המבוססים על משפט מזויף	הערות
תלמיד 1			
תלמיד 2			
תלמיד 3			
סה"כ			

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות להלן:

משימה 1: בודקים נימוקים

- נימוק שגוי לטענה שגויה: במשפט עליו מתבסס אלעד מדובר בקטע אמצעים בטרפז ולא במרובע שלא נתון שהוא טרפז.
- נימוק שגוי לטענה נכונה: נקודת הפגישה של חוצי הזוויות במשולש מתלכדת עם נקודת הפגישה של הגבהים רק במשולש שווה צלעות.
- נימוק מתאים לטענה הוא: הגובה AD לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית, וכחוצה זווית הוא עובר דרך הנקודה M שהיא נקודת המפגש של חוצי הזוויות.
- נימוק נכון לטענה נכונה: הנימוק של רמי מצדיק אותה.
- נימוק שגוי לטענה שגויה: במשפט עליו מתבסס יוני מדובר במשולש ישר זווית בו אורך ניצב השווה למחצית אורך היתר, ולא למחצית אורך "צלע שנייה" כאשר במקרה זה יוני התייחס לניצב השני, במקום ליתר.

משימה 2: טענה שגויה

נעמה משתמשת בהוכחה במשפט: כל שני תכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שאורך הקטע הקרוב לקודקוד הוא $\frac{2}{3}$ מאורך התיכון, ואורך הקטע הקרוב לצלע הוא $\frac{1}{3}$ מאורך התיכון. נעמה מתייחסת אל הנקודה E, שהיא נקודת מפגש הגבהים, גם כנקודת מפגש התיכונים במשולש הנתון. אבל הנקודות האלה זהות רק במשולש שווה צלעות, ולא נתון שמשולש ABC הוא שווה צלעות, לכן, המסקנה אינה נכונה.

פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות בעקבות ההערכה מיועדת לתלמידים שלא פסלו נימוקים או הוכחה המבוססים על "משפט מזויף", כלומר, קיבלו נימוקים כאשר לא כל התנאים הנדרשים במשפט הגיאומטרי מתקיימים.



פעילות: כל התנאים שבמשפט

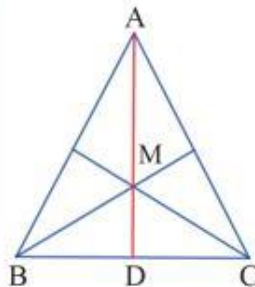
שלבי הפעילות

1. עבודה על דף הפעילות: **כל התנאים שבמשפט חלק א'.**
2. עבודה על דף הפעילות: **כל התנאים שבמשפט חלק ב'.**
3. דיון מסכם.

עבודה על דף הפעילות: כל התנאים שבמשפט חלק א'

דף הפעילות: כל התנאים שבמשפט חלק א'

1. במסגרת שלפניכם הטענה והנימוק של מירי כפי שהוצגה במשימה 1.



הטענה של מירי:

אם $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$),

וחוצי זוויות הבסיס נפגשים בנקודה M,

אז הגובה לבסיס AD עובר דרך M.

הנימוק של מירי:

נקודת הפגישה של חוצי הזוויות היא גם נקודת הפגישה של הגבהים, וגם שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

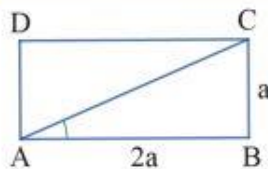
יוליה אמרה: הטענה של מירי נכונה, אבל הנימוק שלה שגוי.

האם יוליה צודקת?

אם כן, מצאו את הטעות בנימוק של מירי.

אם לא, הסבירו.

2. במסגרת שלפניכם הטענה והנימוק של יוני כפי שהוצגה במשימה 1.



הטענה של יוני:

אם במלבן אחת הצלעות שווה באורכה לחצי אורך צלע אחרת,

אז גודל הזווית בין האלכסון לצלע הארוכה שווה ל- 30° .

הנימוק של יוני:

כי אם במשולש ישר זווית ABC אורך אחת הצלעות שווה למחצית אורך צלע אחרת,

אז הזווית מול הצלע הקצרה שווה ל- 30° .

א. מיכאל אמר: הטענה של יוני אינה נכונה.

האם מיכאל צודק?

אם כן, מצאו את הטעות בנימוק של יוני.

אם לא, הסבירו.

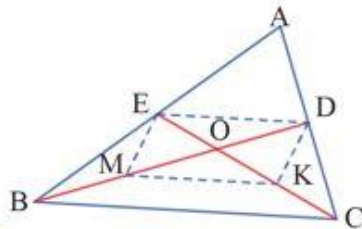
ב. שמוליק אמר: אני יכול להראות שלא ייתכן שגודל $\angle CAB$ שווה ל- 30° .

בדקו את טענתו של שמוליק באמצעות היישומון: [ניצב אחד גדול פי 2 מהשני](#).

[לדף פעילות 1 מונגש](#)

דף הפעילות: כל התנאים שבמשפט חלק ב'

1. במסגרת שלפניכם **טענה נכונה** ולאחריה הצעה שגויה של מישל.
מצאו את השגיאה בהצעה של מישל, ותקנו אותה.



נתון: BD ו- CE תיכונים ב- $\triangle ABC$

ו- O נקודת המפגש שלהם

M אמצע BO

K אמצע CO

מסקנה: המרובע $EDKM$ הוא מקבילית

ההצעה של מישל:

ED קטע אמצעים ב- $\triangle ABC$ (E ו- D) אמצעי הצלעות AB ו- AC)

$ED \parallel BC$ (קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית של המשולש)

↓

MK קטע אמצעים ב- $\triangle OBC$ (M ו- K) אמצעי הצלעות OB ו- OC ב- $\triangle OBC$)

↓

$MK \parallel BC$ (קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית של המשולש)

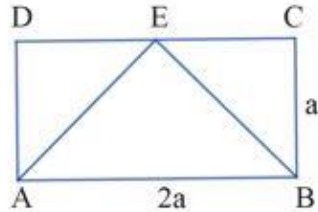
↓

המרובע $EDKM$ הוא מקבילית (כי יש במרובע זוג צלעות נגדיות מקבילות)

2. במסגרת שלפניכם טענה של נדב,

א. האם הטענה נכונה? תוכלו להיעזר ביישומון: האם המשולש ישר זווית?

הטענה של נדב:



אם במלבן ABCD נתון ש- $AB = 2 \cdot BC$ ו- E אמצע הצלע CD, אז $\triangle AEB$ הוא משולש ישר זווית.

ב. לפניכם הצעה של נדב להוכחה של הטענה בסעיף א. בדקו את ההצעה של נדב. האם הוא הוכיח את הטענה? הסבירו.

ההצעה של נדב:

אסמן $BC = a$

$DE = EC = a$ (כי E אמצע קטע שאורכו 2a)

↓

המשולשים EDA ו- ECB הם משולשים ישרי זווית שווי שוקיים

↓

$\angle DEA = \angle CEB = 45^\circ$

↓

$\angle AEB = 90^\circ$ (השלמה לזווית שטוחה $\angle DEC$)

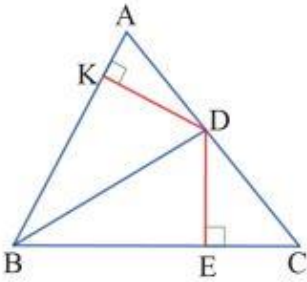
↓

$\triangle AEB$ הוא ישר זווית.

האם נדב הוכיח את הטענה? הסבירו.

3. במסגרת שלפניכם הטענה של בוריס.

א. האם הטענה נכונה? תוכלו להיעזר ביישומון: שטחים שווים או לא שווים.



הטענה של בוריס

אם BD חוצה את זווית B במשולש ABC , והקטעים DE ו- DK מאונכים לצלעות המשולש, כך שהנקודה E נמצאת על הצלע BC , והנקודה K נמצאת על הצלע AB , אז שטח $\triangle BDC$ שווה לשטח $\triangle BDA$.

ב. לפניכם הצעה של בוריס להוכחת הטענה שלו בסעיף א.

אם הטענה שלו נכונה, האם ההוכחה שלו נכונה?

אם הטענה אינה נכונה, הסבירו מה השגיאה בהוכחה של בוריס.

ההוכחה של בוריס

$DE = DK$ (כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחק שווה משוקי הזווית)

$S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BDA}$ (DE ו- DK הם גבהים שווים, לכן השטחים שווים לפי הנוסחה של שטח משולש)

[לדף פעילות 2 מונגש](#)

דיון מסכם

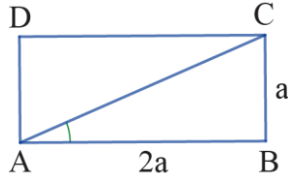
לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ כדי להשתמש במשפט גיאומטרי במהלך הוכחת טענה, יש לוודא שכל התנאים שבמשפט מתקיימים.
- ❖ שימוש ב"משפט מזויף" (שבו לא כל התנאים הנדרשים מתקיימים) עלול להביא למסקנה שאינה נכונה.
- ❖ במקרה של מסקנה נכונה נימוק באמצעות "משפט מזויף" מוביל להוכחה שגויה.

הצעה לפתרון דפי הפעילות

תשובות לדף הפעילות חלק א': דנים בנימוקים שבמשימות

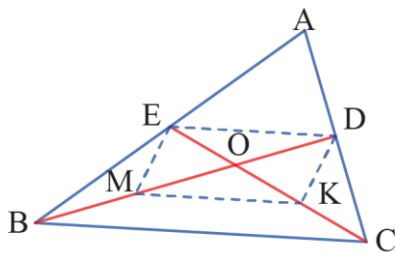
1. יוליה צודקת. הטענה של מירי נכונה אבל הנימוק שלה שגוי. נקודת הפגישה של חוצי הזוויות במשולש מתלכדת עם נקודת הפגישה של הגבהים רק במשולש שווה צלעות. נימוק מתאים לטענה הוא: הגובה AD לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית, וכחוצה זווית הוא עובר דרך הנקודה M שהיא נקודת המפגש של חוצי הזוויות.
2. מיכאל צודק. אם אורך היתר AC היה גדול פי 2 מאורך הניצב BC אז גודל $\angle CAB < 30^\circ$ לפי המשפט המתאים. לפי הנתונים אורך היתר גדול ביותר מפי 2 מאורך הניצב BC, כי אורך היתר גדול מאורך הניצב AB. לכן גודל הזווית לא יכול להיות 30° .



גודל $\angle CAB < 30^\circ$ קבוע מאחר שכל המשולשים ישרי-הזווית בהם אחד הניצבים גדול פי 2 מאורך הניצב השני דומים זה לזה. המשולשים דומים כי הם שווים ביחס בין הצלעות ובזווית שבין הצלעות האלה. גודל הזווית CAB, כפי שניתן לראות ביישומון (או לחשב באמצעות פונקציית הטנגנס) שווה ל- 26.6° .

תשובות לדף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים והוכחות

1. א. מישל הוכיחה ש- $ED \parallel MK$ ו אבל לא הוכיחה ששתי הצלעות האלה גם שוות באורכן כפי שנדרש במשפט.



ב. ED מקביל ל-BC ושווה למחצית אורכו, כי הוא קטע אמצעים ב- $\triangle ABC$.

MK מקביל ל-BC ושווה למחצית אורכו, כי הוא קטע אמצעים ב- $\triangle OBC$.

$ED = MK$ כי שניהם שווים באורכם לחצי אורך BC.

$ED \parallel MK$ כי שניהם מקבילים ל-BC.

כעת ניתן להסיק שמרובע DEMK הוא מקבילית לפי המשפט הקובע שמרובע

שיש בו זוג צלעות מקבילות ושוות באורכן, הוא מקבילית.

2. הטענה של נדב נכונה והוא אכן הוכיח אותה.

3. הטענה של בוריס אינה נכונה: כדי ששטחי משולשים יהיו שווים לא מספיק שאורכי הגבהים DE ו-DK יהיו שווים בשני המשולשים, יש צורך שגם אורכי הצלעות אליהם מועברים הגבהים יהיו שווים, וכאן AB אינו שווה בהכרח ל-BC.

