תיק משימטיקה

משפטים הפוכים –
פרופורציה ודמיון

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

משפטים הפוכים – פרופורציה ודמיון

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במהלך פתרון בעיות בגיאומטריה במשפט מתאים כנימוק לטענה, ולא במשפט ההפוך לו, ולתת מענה לקשיים המתגלים. התיק עוסק בנושא פרופורציה ודמיון.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לזהות מה נתון ומה צריך להוכיח במשפט מתמטי הכתוב בצורה מילולית.
- לנמק טענה בגיאומטריה באמצעות משפט מתאים ולא באמצעות המשפט ההפוך לו.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות הערכה: 20-30 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 30 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
  - משימה 1 *מה נתון ומה יש להוכיח?*
  - משימה 2 *מוסיפים נימוקים.*
  - משימה 3 *בוחרים נימוק.*

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות 1 *משפטים הפוכים.*

לפעילות 2

- דף פעילות 2 *מהו הנימוק הנכון?*

רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. לעיתים במהלך הוכחה תלמידים מנמקים טענות בצורה שגויה, באמצעות המשפט ההפוך למשפט המתאים. למעשה, במקרים רבים התלמידים אינם מבחינים בין השניים. למשל, כנימוק להיסק שזוג ישרים הם מקבילים, תלמידים רושמים לעתים כנימוק: "זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו" במקום "אם שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו, אז הישרים מקבילים". בהחלפה בין המשפט המתאים ובין המשפט ההפוך לו מתרחש כשל לוגי, שכן מסתמכים על המסקנה שאותה רוצים להוכיח. אחד הגורמים לחוסר ההבחנה של תלמידים בין שני משפטים שהם הפוכים זה לזה, הוא שהתלמידים אינם מזהים את הנתון ואת מה שצריך להוכיח במשפט מסוים. זיהוי זה הוא תנאי מוקדם להבחנה בין שני משפטים שהם הפוכים זה לזה.

הנושא פרופורציה ודמיון הוא נושא מרכזי בתכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק ***משפטים הפוכים – פרופורציה ודמיון*** מסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים להחליף בין משפט ובין המשפט ההפוך לו ולתת מענה לקושי זה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
  - משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
  - משימה 2 ***מוסיפים נימוקים.***
  - משימה 3 ***בודקים נימוקים.***
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
- משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***.
- משימה 3 ***בוחרים נימוק***.

שלוש המשימות מיועדות לעבודה עצמית של תלמידים, ומומלץ לבצע אותן ברצף בזו אחר זו.

המשימה הראשונה היא משימה שמטרתה לבדוק אם התלמידים מזהים במשפט מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח. התלמידים נדרשים לכתוב זאת במילים או בכתיב מתמטי. מיומנות זו היא בסיסית.

בשתי המשימות הנוספות שבתיק זה נתונות הוכחות קצרות לבעיות העוסקות בפרופורציה ודמיון. התלמידים נדרשים לנמק את שלבי ההוכחה או לבדוק את הנימוקים. על-פי תשובות התלמידים ניתן לבדוק אם הם מבחינים בין שני משפטים ההפוכים זה לזה.

מה נתון ומה יש להוכיח?

רשמו במילים **או** בכתיב מתמטי מה **נתון** ומה **צריך להוכיח** עבור כל אחד מהמשפטים הבאים:

דוגמה: בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

אפשרות ראשונה: במילים

נתון: טרפז שווה-שוקיים

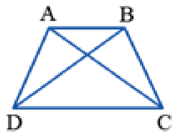
צריך להוכיח: אלכסוני הטרפז שווים.

אפשרות שנייה: בכתיב מתמטי

נתון: ABCD טרפז (AB || DC)

AD = BC

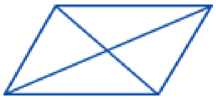
צריך להוכיח: AC = BD



א. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

נתון:______________________________

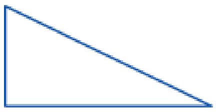
צריך להוכיח:________________________



ב. במשולש ישר זווית שיש לו זווית של 30^0 - הניצב שמול זווית זו שווה למחצית היתר.

נתון:______________________________

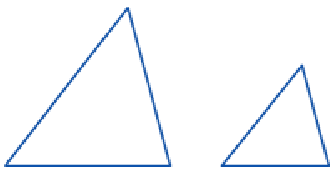
צריך להוכיח:________________________



ג. במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

נתון:______________________________

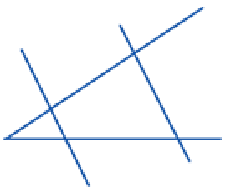
צריך להוכיח:________________________



ד. שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

נתון:______________________________

צריך להוכיח:________________________

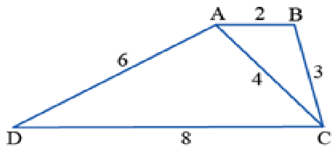


למשימה 1 מונגשת

מוסיפים נימוקים

נתון מרובע ABCD עם הנתונים הרשומים בשרטוט.

צריך להוכיח: $AB \parallel DC$



רחל רשמה הוכחה נכונה לבעיה, אך לא הספיקה להשלים את הנימוקים.

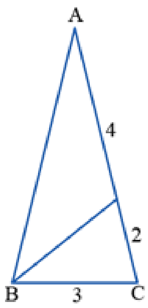
השלימו בכל שורה **נימוק מלא**.

	טענה	נימוק
א.	$\frac{AD}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BA}$	$\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=2$
ב.	$\Delta BAC \sim \Delta ACD$	
ג.	$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$	
ד.	$AB \parallel DC$	

למשימה 2 מונגשת

בוחרים נימוק

נתון: AB = AC



א. קבעו אם BD הוא חוצה זווית. הסתמכו גם על הנתונים שבשרטוט.

הקיפו: כן / לא / אי אפשר לדעת

ב. סמנו את הנימוק לקביעתכם.

☐ חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

☐ ישר העובר דרך קודקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר.

☐ אין מספיק נתונים כדי לקבוע.

למשימה 3 מונגשת

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם במשימה 1, ניתן להיעזר בטבלה הבאה. משתמשים בסימונים שונים עבור תשובה נכונה ותשובה שגויה.

טבלת הערכה 1

שם התלמיד/ה	משימה 1 *מה נתון ומה יש להוכיח?*								
	משפט א		משפט ב		משפט ג		משפט ד		הערות
	נתון	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	
תלמיד 1	V	V	V	V	V	V	V	V	
תלמיד 2	V	V	V	V	V	V	X	X	
תלמיד 3	X	V	X	X	X	X	X	X	
סך-הכל									

טבלת הערכה 2

שם התלמיד/ה	משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***			משימה 3 ***בוחרים נימוק***			הערות
	תשובה נכונה	**טעויות בנימוקים ב ו-ד: כתב נימוק הפוך או חלקי**	**טעויות בנימוקים ב ו-ד: אחר**	**תשובה נכונה**	**בחר נימוק הפוך לקביעה נכונה**	**אחר**	
תלמיד 1	V			**V**			
תלמיד 2		**V**		**V**			
תלמיד 3		**V**				הנימוק מתאים לקביעה השגויה של התלמיד	
סך-הכל							

ההערכה אינה מתייחסת לטענות אלא רק לחלק מן הנימוקים (ראו בטבלה). בנימוקים אלה קיימת אפשרות לבלבול בין המשפט המתאים לבין המשפט ההפוך לו.

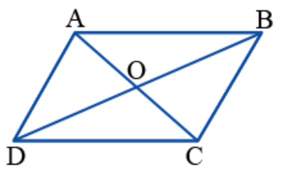
מקרא

נימוק "הפוך" – נימוק באמצעות המשפט ההפוך לנדרש.
נימוק "חלקי" – נימוק באמצעות חלק של המשפט הנכון כמו "זוויות מתחלפות".

הערה: נימוק **אחר** עשוי להצביע על חוסר הבנה של ההוכחה או על בעיה בהכרת המשפטים שבאמצעותם יש לנמק או בזכירתם. התיק אינו עוסק במקרה זה.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות שלהלן:

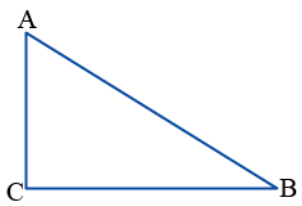
פתרון משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***



א. **נתון:** מרובע ABCD, O מפגש האלכסונים.

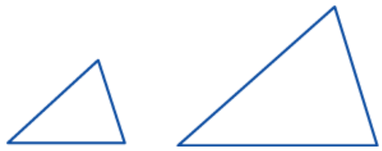
$BO = OD \quad , \quad AO = OC$

צריך להוכיח: המרובע הוא מקבילית.



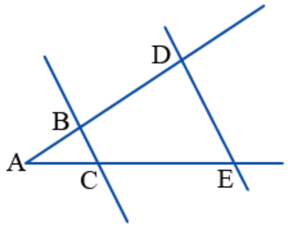
ב. **נתון:** משולש ישר זווית ABC, C היא הזווית הישרה, $\measuredangle B = 30^o$.

צריך להוכיח: $AC = \frac{AB}{2}$.



ג. **נתון:** שני משולשים דומים.

צריך להוכיח: יחס שטחי המשולשים שווה לריבוע יחס הדמיון.

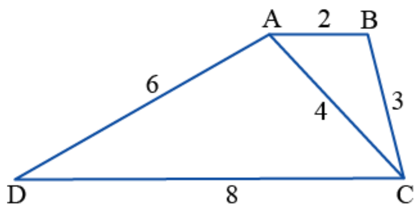


ד. **נתון:** $\measuredangle A$, $BC \parallel DE$

צריך להוכיח: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$.

פתרון משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***

הוכחה:



טענה	נימוק
א. $\frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BA}$	$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$
ב. $\Delta BAC \sim \Delta ACD$	משפט דמיון צ.צ.צ.
ג. $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$	כי במשולשים דומים הזוויות המתאימות שוות; או: לפי הגדרת הדמיון.
ד. $AB \parallel DC$	כי אם בין שני ישרים וחותך יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים.

פתרון משימה 3 *בוחרים נימוק*

א. הקיפו: כן / לא / אי אפשר לדעת

ב. הנימוק הנכון הוא הנימוק השני: ישר העובר דרך קודקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

בתיק שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שלא זיהו נתון ומסקנה במשפט גיאומטרי (התקשו במשימה 1).	V	
לתלמידים שנימקו באמצעות משפט הפוך למשפט הנדרש (מסומנים בטבלת ההערכה בטור צבוע במשימות 2 או 3).		V

פעילות 1

פעילות זו מיועדת לתלמידים שהתקשו לזהות את הנתון ואת מה שיש להוכיח במשפט גיאומטרי.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***משפטים הפוכים***.
- דיון.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 1 *משפטים הפוכים***

  בדף הפעילות:
  - ניסוח משפטים נתונים באמצעות המילים "אם" ו"אז".
  - ניסוח טענות הפוכות למשפטים נתונים.
  - בדיקת נכונות טענות הפוכות למשפטים.

משפטים הפוכים

1. רשמו את המשפטים הבאים באמצעות המילים "אם" ו"אז".

א. במשולשים דומים יחס הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון.

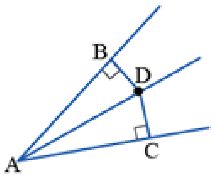
ב. שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.

ג. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

2. בכל סעיף מנוסחת טענה באמצעות נתון ומסקנה הנובעת ממנו.

- נסחו במילים את המשפט המתאים לטענה.

- נסחו את המשפט ההפוך.



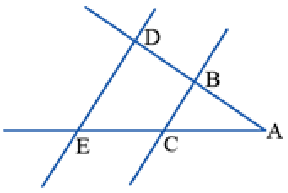
א. **נתון:** AD חוצה זווית A.

מסקנה: הנקודה D נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית A

המשפט: ___________________________________

____

המשפט ההפוך: ___________________________________



ב. **נתון:** הישרים CB ו- ED חותכים את שוקי הזווית A ומקבילים זה לזה.

מסקנה: הישרים CB ו- ED מקצים על שוקי הזווית A קטעים פרופורציוניים.

המשפט: ___________________________________

____

המשפט ההפוך: ___________________________________

____

3. בכל סעיף רשום משפט **נכון.**

נסחו במילים את הטענה ההפוכה למשפט. האם הטענה שניסחתם נכונה?

א. במרובע שהוא דלתון אחד משני האלכסונים מחלק אותו לשני משולשים חופפים.

הטענה ההפוכה: ___________________________________

הקיפו: הטענה ההפוכה נכונה / הטענה ההפוכה אינה נכונה

ב. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

הטענה ההפוכה: ___________________________________

הקיפו: הטענה ההפוכה נכונה / הטענה ההפוכה אינה נכונה

לפעילות 1 מונגשת

- **דיון**

מתייחסים לאסטרטגיה של ניסוח משפט באמצעות המילים "אם" ו"אז". ניסוח כזה מארגן את המשפט מחדש ומאפשר לזהות את הנתון והמסקנה של המשפט, וכך עשוי לסייע גם בניסוח המשפט ההפוך.

חשוב לבדוק את נכונות הטענות ההפוכות. אפשר לבקש מן התלמידים לתת דוגמאות נוספות למשפטים שהטענות ההפוכות להם אינן נכונות. (דוגמאות: זוויות קודקודיות שוות זו לזו, שני משולשים חופפים הם בעלי שטחים שווים וכו'). דוגמאות כאלה עשויות לחדד את ההבדל בין טענה ובין טענה הפוכה לה ולהבהיר מדוע חשוב לנמק באמצעות המשפט המתאים ולא באמצעות המשפט ההפוך לו.

פעילות 2

הפעילות מיועדת לתלמידים שנימקו באמצעות המשפט ההפוך למשפט הדרוש.
נימוק באמצעות המשפט ההפוך למשפט המתאים יכול לנבוע מכשל לוגי בסיסי בשלב ההוכחה או ממתן חשיבות מועטה לניסוח הנימוק. הפעילות תיתן מענה בשני המקרים. גם תלמידים שנימוקיהם אינם מדויקים יפיקו תועלת מן הפעילות.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 ***מהו הנימוק הנכון?***
- דיון.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 2 *מהו הנימוק הנכון?***

התלמידים נדרשים לבחור נימוק לטענה מבין שני משפטים הפוכים זה לזה או לבדוק אם הנימוקים מתאימים. המשפטים נרשמו במפורש כי המטרה איננה לברר אם התלמידים מכירים, זוכרים או יודעים לקשר אותם לבעיה.

מהו הנימוק הנכון?

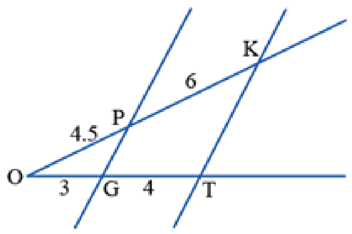
1. במשולש ABC הנקודה D היא אמצע קטע AB, והנקודה E היא אמצע קטע AC.

רועי טוען: מהנתונים האלו נובע שהקטע DE מקביל ל- BC.

באיזה מהמשפטים הבאים הוא צריך לבחור כנימוק לטענתו?

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית.
- קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, הוא קטע אמצעים.

2. א. קבעו אם GP מקביל ל-TK. הסתמכו על הנתונים שבשרטוט.



הקיפו: כן / לא / אי אפשר לדעת

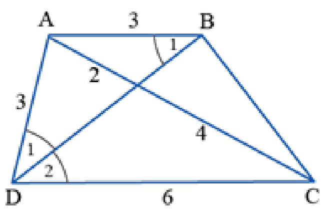
ב. סמנו את הנימוק לקביעתכם.

☐ שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

☐ שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

☐ אין מספיק נתונים כדי לקבוע.

3. יוני רצה להוכיח כי במרובע ABCD שבשרטוט $AB \parallel DC$.



כל הטענות שכתב יוני נכונות בהתייחס לאורכים הנתונים בשרטוט.

תקנו את **הנימוקים** השגויים.

	טענה	**נימוק**
א.	זווית D_1 שווה לזווית B_1	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות.
ב.	זווית D_1 שווה לזווית D_2	חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שממול לשני חלקים שהיחס ביניהם שווה ליחס בין הצלעות הכולאות את הזווית (היחס 2 : 1).
ג.	זווית D_2 שווה לזווית B_1	כלל המעבר.
ד.	AB מקביל ל-DC	זוויות מתחלפות בין מקבילים.

לפעילות 2 מונגשת

- **דיון**
  - מתייחסים לאפשרויות שונות לכתיבת נימוקים באופן שמבהיר שמתכוונים למשפט המתאים ולא להפוך לו.

    – ניסוח מלא של המשפט (ולא חלקי כמו הנימוק בשאלה 3 בדף פעילות 2).

    – שמו של המשפט (אם יש לו שם) כמו משפט פיתגורס.

    – שימוש בביטוי המדגיש את הסיבתיות. דוגמה: המרובע הוא מלבן **כי**...
  - דנים בכשל הלוגי של הסתמכות על טענה שרוצים להוכיח. לכן לא ייתכן, למשל, להסיק ששני ישרים מקבילים (בעיה 2 בדף פעילות 2) על סמך נימוק המתחיל במילים "שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית".

הצעה לפתרון דפי הפעילות

פתרון דף פעילות 1 משפטים הפוכים

1. א. **אם** המשולשים דומים, **אז** יחס הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון.
ב. **אם** שני ישרים מקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, **אז** הם ישרים מקבילים.
ג. **אם** קטע הוא חוצה זווית פנימית במשולש, **אז** הוא מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית, בהתאמה.

2. א. **המשפט**: כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית.
המשפט ההפוך: כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית, נמצאת על חוצה הזווית.

ב. **המשפט**: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים על שוקי הזווית קטעים פרופורציוניים.
המשפט ההפוך: שני ישרים המקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים, הם מקבילים.

3. א. **הטענה ההפוכה**: אם אחד משני האלכסונים במרובע מחלק אותו לשני משולשים חופפים - המרובע הוא דלתון.
טענה זו אינה נכונה. המרובע יכול להיות מקבילית.
ב. **הטענה ההפוכה**: כל **נקודה** הנמצאת על האנך האמצעי לקטע נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
טענה זו נכונה.

פתרון דף פעילות 2 מהו הנימוק הנכון?

1. **הנימוק**: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

2. $PG \parallel KT$.

הנימוק: המשפט ההפוך למשפט תאלס.

3. בשורה ב הנימוק הנכון: המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית.

בשורה ד הנימוק חלקי. הנימוק הנכון: בין שני ישרים וחותך, אם הזוויות המתחלפות שוות, הישרים מקבילים.