



# תיק משימטיקה מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה

להנגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

© כל הזכויות שמורות

## תוכן העניינים

|    |                                                   |
|----|---------------------------------------------------|
| 3  | מטרות התיק                                        |
| 3  | זמני עבודה משוערים                                |
| 4  | החומרים והעזרים הדרושים                           |
| 5  | רקע                                               |
| 5  | הצעה למהלך העבודה                                 |
| 6  | עבודה על משימות ההערכה                            |
| 7  | משימה 1 שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת     |
| 8  | משימה 2 מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה                 |
| 9  | הערכת תוצרי התלמידים                              |
| 10 | פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה               |
| 10 | פעילות 1                                          |
| 11 | דף פעילות 1 סימן הנגזרת והתנהגות הפונקציה         |
| 12 | דף פעילות 2 גרף הנגזרת וגרף הפונקציה              |
| 13 | פעילות 2                                          |
| 14 | דף פעילות 3 מתאימים גרפים של פונקציות לגרף הנגזרת |

# מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה<sup>1</sup>



## מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לשרטט גרפים של פונקציות קדומות, בהינתן גרף הנגזרת<sup>2</sup> של פונקציות אלה, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לשרטט גרף של פונקציה, בהינתן גרף הנגזרת שלה, ובפרט
  - לקשר בין נקודות האפס של גרף הנגזרת לבין נקודות הקיצון ו/או הפיתול של גרף הפונקציה,
  - לקשר בין תחומי החיוביות/השליליות של גרף הנגזרת לבין תחומי העלייה/הירידה של גרף הפונקציה.
- לזהות גרפים של פונקציות, בהינתן גרף הנגזרת שלהן, ובפרט להתחשב בתכונות המשותפות לכל הפונקציות בעלות אותה הנגזרת:
  - שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון,
  - תחומי העלייה והירידה של הפונקציות.



## זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: 15-25 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: 35-45 דקות.

<sup>1</sup> שלושה תיקי משימטיקה עוסקים בקשרי פונקציה-נגזרת. התיק **התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת** עוסק בקשרים שבין התנהגות פונקציה בתחום מסוים ובין סימן הנגזרת שלה בתחום זה. התיק **התנהגות הפונקציה והתנהגות הנגזרת** עוסק, בנוסף לקשרים אלה, גם בסוגי קשרים נוספים בין התנהגות פונקציה ובין התנהגות הנגזרת שלה תוך כדי התמקדות בלינאריות ונקודות פיתול. התיק **מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה** מתמקד בקשרים שבין גרף הנגזרת לגרפים של פונקציות שזוהי נגזרתן (פונקציות קדומות).

<sup>2</sup> התיק מיועד לתלמידים שאינם מכירים את מושג ה'פונקציה הקדומה', ולכן נשתמש במונחים גרף הנגזרת וגרף הפונקציה, כאשר הגרפים הם של פונקציות אינטגרליות.



## החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות

○ משימה 1 [שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת.](#)

○ משימה 2 [מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה.](#)

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

### לפעילות 1

• דף פעילות 1 [סימן הנגזרת והתנהגות הפונקציה.](#)

• דף פעילות 2 [גרף הנגזרת וגרף הפונקציה.](#)

### לפעילות 2

• דף פעילות 3 [מתאימים גרפים של פונקציות לגרף הנגזרת.](#)



## רקע

הפונקציה הנגזרת מהווה כלי חשוב המסייע לחקור התנהגות של פונקציות. במהלך לימודי האנליזה נעשה שימוש רב בקשרים שבין התנהגות פונקציה לבין תכונות הנגזרת שלה. לדוגמה, בהינתן פונקציה בייצוג אלגברי, ניתן למצוא את תחומי העלייה והירידה שלה, בהתבסס על הקשר ביניהם ובין סימן הנגזרת: בתחום שבו סימן הנגזרת חיובי הפונקציה עולה, ובתחום שבו סימן הנגזרת שלילי הפונקציה יורדת. בדרך זו ניתן גם לקבוע היכן מתקבלות נקודות הקיצון שלה.

תלמידים רבים מתקשים בהבנת הקשר שבין גרף הפונקציה לתכונות הנגזרת, ועוד יותר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת. אחד הגורמים לקושי זה הוא בלבול בין המושגים עליה/ירידה למושגים חיוביות/שליליות. גורם אפשרי נוסף הוא קושי בהבנת המשמעות של ערך הנגזרת בנקודה, כשיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו. בנוסף, קיים קושי בהבנה, שקיימות אינסוף פונקציות, בעלות אותה הנגזרת. פונקציות אלו שונות זו מזו בקבוע בלבד, וההצגה הגרפית שלהן היא הזזה אנכית זו של זו. מכאן ישנן אינסוף אפשרויות לשרטוט גרף פונקציה בהינתן גרף של נגזרת. הבנה זו חשובה במיוחד כאשר עוסקים בחשבון אינטגרלי ומחפשים פונקציה קדומה לפונקציה נתונה.

התיק **מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה** נועד לסייע למורה להעריך את היכולות והקשיים של התלמידים בנושא זה ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
  - משימה 1 [שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת.](#)
  - משימה 2 [מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה.](#)
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.



## עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1 שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת.
- משימה 2 מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה.

במשימה 1 שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת על התלמידים לשרטט סקיצה אפשרית של גרף פונקציה בהינתן גרף של נגזרת הפונקציה.

במשימה 2 מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה מקבלים התלמידים גרף של נגזרת, גרף של פונקציה אפשרית מתאימה וארבעה גרפים נוספים של פונקציות. התלמידים מתבקשים לקבוע איזה מבין הגרפים הנוספים יכול להיות גם הוא גרף פונקציה המתאימה לנגזרת.

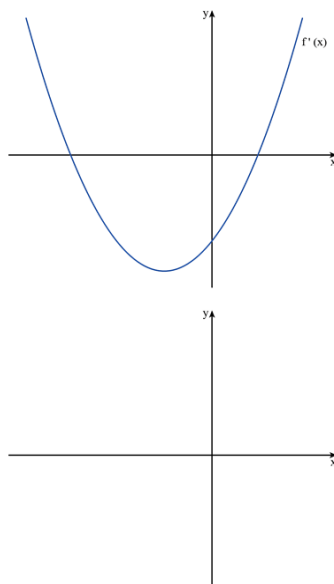
שתי המשימות מיועדות לעבודה עצמית של התלמידים

## שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת

א. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ממשי.

בשרטוט שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

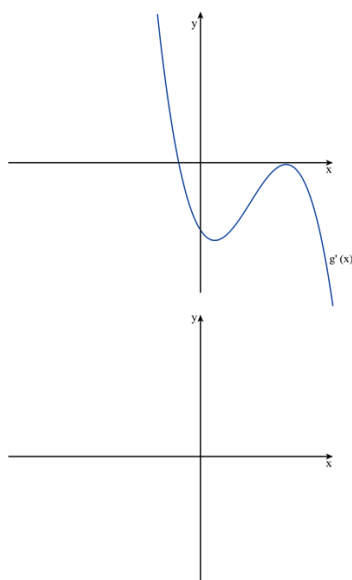
שרטטו במערכת הצירים המצורפת סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .



ב. הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ממשי.

בשרטוט שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת  $g'(x)$ .

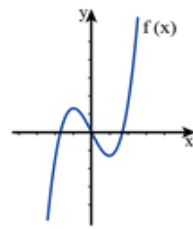
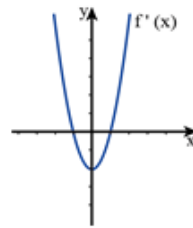
שרטטו במערכת הצירים המצורפת סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $g(x)$ .



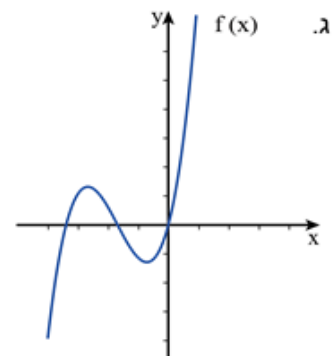
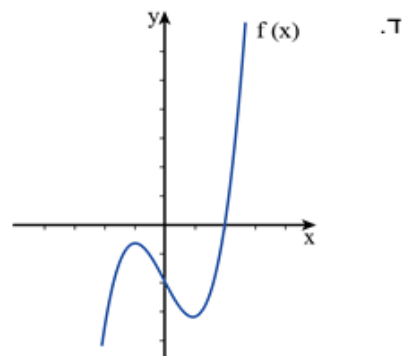
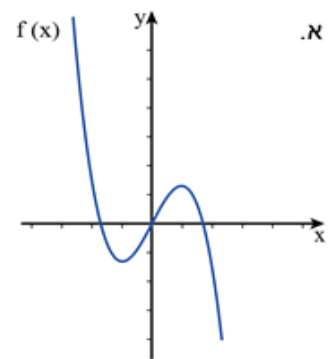
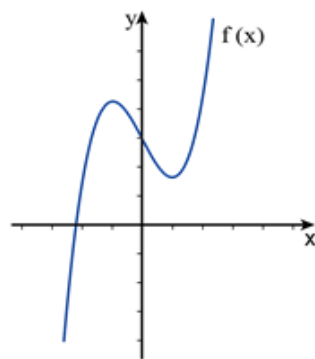
[למשימה 1 מונגשת](#)

## מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה

נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  וסקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$  המתאימה לו:



סמנו אילו מבין הגרפים הבאים יכולים גם הם להיות גרף הפונקציה  $f(x)$  (אם ישנם כאלה):



ה. לא ייתכן גרף נוסף שיכול להתאים לפונקציה  $f(x)$  כי לכל נגזרת מתאימה פונקציה יחידה.

[למשימה 2 מוגשת](#)





## הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

| משימה 2<br>מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה |    |    |    |    | משימה 1<br>שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת |    | שם התלמיד/ה             |
|--------------------------------------|----|----|----|----|--------------------------------------------------|----|-------------------------|
| ה'                                   | ד' | ג' | ב' | א' | ב'                                               | א' |                         |
|                                      | X  |    | ✓  |    | X                                                | ✓  | <a href="#">תלמיד 1</a> |
|                                      | ✓  |    | ✓  |    | X                                                | ✓  | <a href="#">תלמיד 2</a> |
|                                      | ✓  |    | ✓  |    | X                                                | ✓  | <a href="#">תלמיד 3</a> |
|                                      | ✓  |    | ✓  |    | ✓                                                | ✓  | <a href="#">תלמיד 4</a> |
|                                      |    |    |    |    |                                                  |    |                         |
|                                      |    |    |    |    |                                                  |    | סך-הכל                  |

במשימה 1 שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת נסמן  $\checkmark$  אם התלמיד שרטט את הגרף באופן נכון, אחרת נסמן X.

במשימה 2 מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה נסמן  $\checkmark$  עבור כל סעיף שאותו סימנו התלמידים.

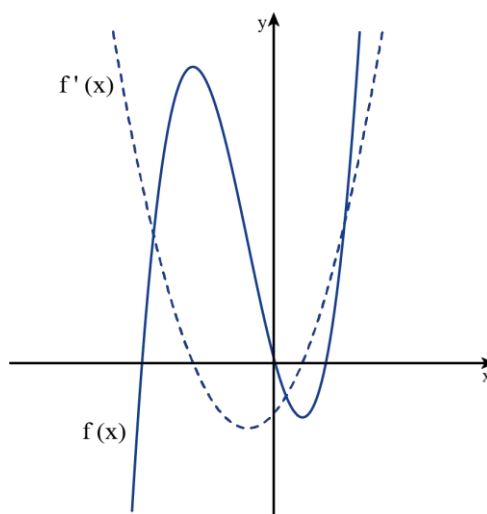
לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1 שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת

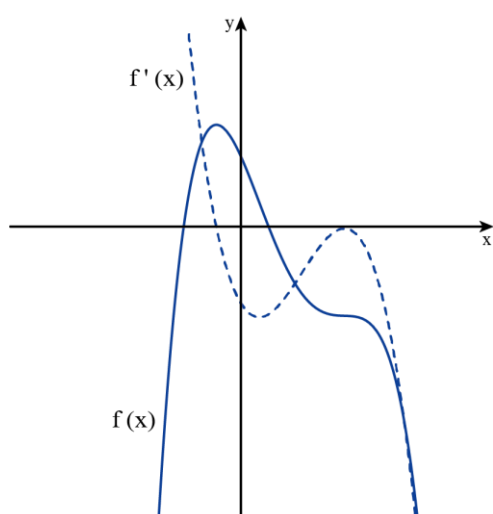
א.

ב.

גרף אפשרי של הפונקציה



גרף אפשרי של הפונקציה





## פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים, שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

| למי מיועדת הפעילות?                                                                                          | פעילות 1 | פעילות 2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| לתלמידים ששרטטו באופן שגוי גרף אחד או יותר במשימה 1 (מסומנים ב- x בטבלת ההערכה).                             | V        |          |
| לתלמידים אשר ענו במשימה 2 כי לגרף של נגזרת מתאימה פונקציה אחת ויחידה או שסימנו כנכון רק גרף אחד מבין הגרפים. |          | V        |

## פעילות 1

פעילות זו מיועדת לתלמידים ששרטטו באופן שגוי גרף אחד או יותר במשימה 1.

### שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 סימן הנגזרת והתנהגות הפונקציה.
- עבודה על דף פעילות 2 גרף הנגזרת וגרף הפונקציה.
- דיון

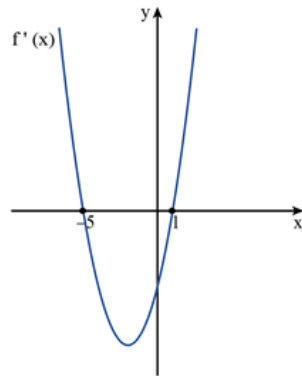
### מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 סימן הנגזרת והתנהגות הפונקציה.
- עבודה על דף פעילות 2 גרף הנגזרת וגרף הפונקציה.

## סימן הנגזרת והתנהגות הפונקציה

1. לפנים גרף של הפונקציה הנגזרת  $f'(x)$ . על כל אחד מההיגדים הבאים קבעו האם הוא נכון או לא,

והסבירו את תשובתכם:

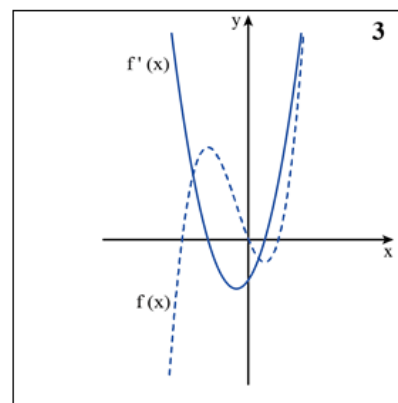
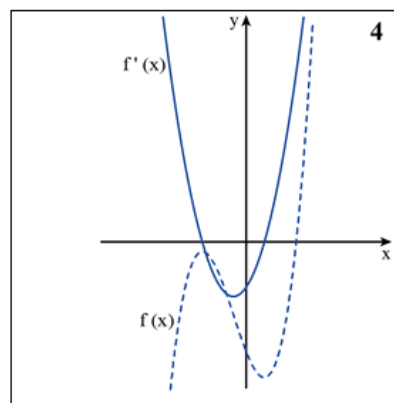
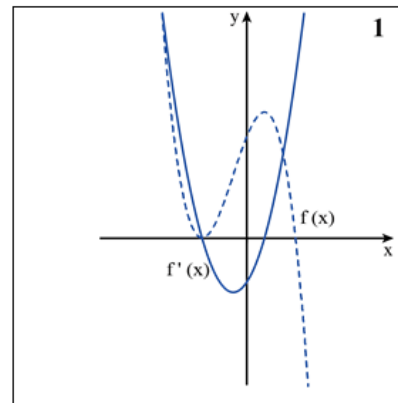
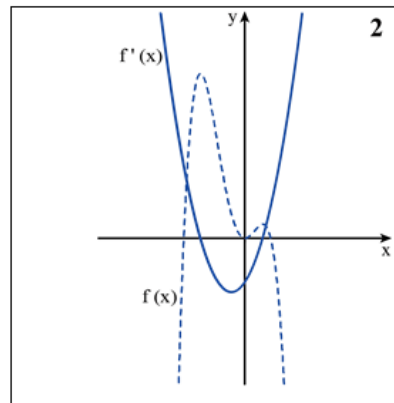


- לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות קיצון.
- בנקודה שבה  $x = -5$  יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת מינימום.
- הפונקציה הנגזרת  $f'(x)$  חיובית כאשר  $x < -5$ .
- הפונקציה  $f(x)$  יורדת כאשר  $-5 < x < 1$ .

2. התלמידים קיבלו את המשימה שרטוט גרף של פונקציה על פי גרף הנגזרת ושרטטו את הגרף של  $f(x)$  (בדיוק).

מקווקו) באותה מערכת צירים שבה שורטט גרף הנגזרת.

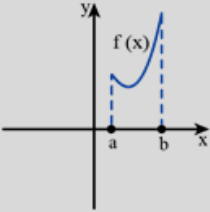
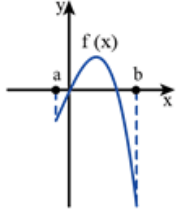
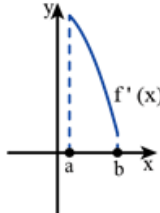
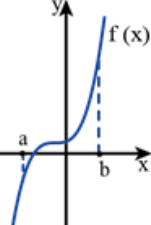
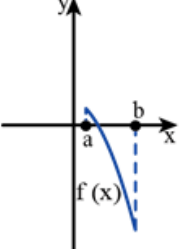
קבעו לגבי כל אחד מהגרפים אם הוא יכול להיות גרף הפונקציה  $f(x)$ . נמקו את קביעתכם.



לפעילות 1 מונגשת

### גרף הנגזרת וגרף הפונקציה

הגרפים שבטבלה הבאה מתארים פונקציות המוגדרות בקטע  $[a, b]$ .  
השלימו את הטבלה הבאה (היעזרו בדוגמה).

| הפונקציה הנגזרת       | שרטוט גרף הפונקציה הנגזרת              | הפונקציה                   | שרטוט גרף הפונקציה                                                                  |
|-----------------------|----------------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| ד<br>ו<br>ג<br>מ<br>ה | הגרף חותך את ציר ה- $x$ .<br>(לא משיק) | לפונקציה יש נקודת מינימום. |    |
| 1                     | הגרף חותך את ציר ה- $x$ .<br>(לא משיק) |                            |    |
| 2                     |                                        | עולה                       |  |
| 3                     | הגרף משיק לציר ה- $x$                  |                            |  |
| 4                     | שלילית                                 |                            |  |

[לפעילות 2 מונגשת](#)

## • דיון

בדיון כדאי להתייחס לנקודה הבאה:

שרטוט גרף הפונקציה על-פי גרף הפונקציה הנגזרת ולהיפך הוא מורכב, לכן כדאי להיעזר בכתיבת או באמירת התכונות המקשרות בין הגרפים.

אפשר לבקש מן התלמידים לפרט את התכונות בהתאם לנקודות הבאות:

- אמרו תכונות של פונקציה הגוררות בהכרח תכונות של הפונקציה הנגזרת שלה.

- אמרו תכונות של הפונקציה הנגזרת הגוררות בהכרח תכונות של הפונקציה.

לכל גרירה כזו לבקש דוגמאות **משורטטות**.



למשל, הפונקציה הנגזרת חיובית  $\Leftarrow$  הפונקציה עולה

בשלב שני כדאי להתייחס לתכונה של התאפסות הפונקציה הנגזרת שאינה גוררת בהכרח נקודת קיצון בפונקציה, וכדי לדעת כיצד נראה גרף הפונקציה יש לברר מה קורה משני צידי נקודות האפס של גרף הנגזרת.

## פעילות 2

פעילות זו מיועדת לתלמידים אשר ענו במשימה 2 כי לגרף של נגזרת מתאימה פונקציה אחת ויחידה או שסימנו כנכון רק גרף אחד מבין הגרפים.

### שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 3 **מתאימים גרפים של פונקציות לגרף הנגזרת**.
- דיון

### מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 3 **מתאימים גרפים של פונקציות לגרף הנגזרת**.

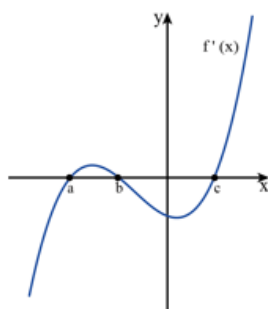
## מתאימים גרפים של פונקציות לגרף הנגזרת

נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$

שלוש תלמידים שרטטו גרפים אפשריים של הפונקציה  $f(x)$ ,

אך שניים מהם נמחקו.

השלימו את הטבלה הבאה והיעזרו בה כדי לשחזר את הגרפים החסרים.



| גרף אפשרי של הפונקציה $f(x)$ | שיעורי $y$ של נקודות הקיצון                                                    | שיעורי $x$ של נקודות הקיצון | תחומי שליליות | תחומי חיוביות      | תחומי ירידה | תחומי עלייה |            |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------|--------------------|-------------|-------------|------------|
|                              | $y = 1$<br>$y = 1.5$<br>$y = -2.5$                                             |                             |               | $x < 0$<br>$x > d$ |             |             | תלמיד<br>1 |
|                              | $y = 4$<br>$y = 4.5$<br>$y = 0.5$                                              |                             | אף $x$        | כל $x$             |             |             | תלמיד<br>2 |
|                              | $y = -1.5$<br>$y = \underline{\hspace{1cm}}$<br>$y = \underline{\hspace{1cm}}$ |                             |               | $x > g$<br>$x < e$ |             |             | תלמיד<br>3 |

לאחר שהשלמתם את הטבלה ענו על השאלות הבאות:

- אילו תכונות משותפות לכל הגרפים האפשריים של הפונקציה  $f(x)$ ?
- אילו תכונות אינן נשמרות בין הגרפים השונים?
- כיצד ניתן היה לדעת את ערכי ה-  $y$  של נקודות הקיצון אצל תלמיד 3?

[לפעילות 3 מוגשת](#)

• דיון

מומלץ להתבונן גם בייצוג האלגברי לצורך הכללת המסקנות לאינסוף גרפים של פונקציות שהן הזזה אנכית זו של זו. לדוגמה :

○ נתבונן בפונקציה כלשהי, למשל:  $y = -5x^3 + 2x^2$  . מה הנגזרת שלה?

ומה הנגזרת של הפונקציות:  $y = -5x^3 + 2x^2 + 1$        $y = -5x^3 + 2x^2 + 25$  ?

$y = -5x^3 + 2x^2 - 12$  ?       $y = -5x^3 + 2x^2 + c$  ?

○ מהו הקשר הגרפי בין כל הפונקציות שיש להן אותה הנגזרת?

○ כמה פונקציות כאלו ישנן?

**מסקנה :** בהינתן פונקציית נגזרת, ישנן אינסוף פונקציות שזוהי נגזרתן, וכל הפונקציות הללו הן הזזה אנכית זו של זו.