תיק משימטיקה

זיהוי נתונים ומסקנות

להנגשה פרטנית נא לפנות: **st.negishut@weizmann.ac.il**

תוכן עניינים

פתיחה[1]

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לזהות מה הנתונים (ההנחות) ומה המסקנה, בהינתן טענה גאומטרית.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לכתוב בכתיב מתמטי נתונים ומסקנות, בהינתן טענה גאומטרית המנוסחת במילים.
- ❖ לנסח במילים טענה גיאומטרית המנוסחת בכתיב מתמטי.

זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימת ההערכה: 30-20 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 50-40 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: ***ממילים לכתיב מתמטי***.
- ❖ דף משימה 2: ***מכתיב מתמטי למילים***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

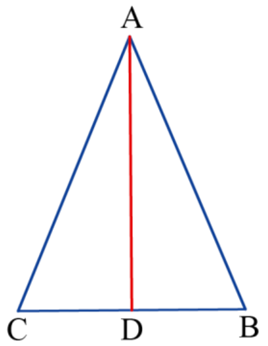
- ❖ דף פעילות 1: ***זיהוי נתונים ומסקנה***.
- ❖ דף פעילות 2: ***רושמים במילים***.

[1] ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים במשפטים הפוכים. התיקים מתמקדים בארבעה נושאים מרכזיים מתכנית הלימודים בגיאומטריה: ***משולשים***, ***מרובעים***, ***מעגל***, ו***פרופורציה ודמיון***. בנוסף, תיק חמישי – ***זיהוי נתונים ומסקנות*** מתמקד בהיבט בסיסי הכרוך בעיסוק במשפטים הפוכים.

רקע

הוכחה והפרכה של טענות היא פעילות מרכזית בכל ענפי המתמטיקה. טענות מתמטיות בכלל, וגיאומטריות בפרט, מנוסחות לעיתים במילים ולעיתים בכתיב מתמטי. דרכי הניסוח השונות מציבות קשיים שונים בפני התלמידים.

כאשר טענות מתמטיות מנוסחות במילים, תלמידים רבים מתקשים לזהות את ההנחות שבבסיס הטענה ואת המסקנה שהטענה קובעת על סמך הנחות אלה. בגיאומטריה מקובל לתאר קושי זה, כך: זיהוי מה נתון ומה צריך להוכיח (או להפריך). זיהוי כזה הוא חיוני לצורך הוכחת טענה נתונה (או הפרכתה). לדוגמה, כשנתונה הטענה *אם משולש הוא שווה שוקיים, אז הגובה לבסיס הוא גם תיכון*, יש תלמידים המתקשים לזהות שהנתונים (הנחות הטענה) ומה שצריך להוכיח(המסקנה) הם:



נתונים:

<u>במילים:</u> משולש, שוויון בין אורכי שתי צלעות במשולש, גובה לצלע השלישית

או

<u>בכתיב מתמטי:</u> ΔABC (ראו שרטוט)

$AB = AC$

$AD \perp BC$

צריך להוכיח:

<u>במילים:</u> הגובה חוצה את הצלע השלישית

או

<u>בכתיב מתמטי:</u> $BD = CD$

אחד הגורמים לקושי לזהות מה נתון ומה צריך להוכיח נעוץ בצורך לכתוב נתונים ומסקנות בכתיב מתמטי, בהינתן טענה גיאומטרית המנוסחת במילים. לדוגמה, קושי לרשום ΔABC , $AB = AC$ וכו' בטענה הנ"ל. גורם אפשרי נוסף נעוץ בצורך לזהות נתונים כאשר הם **אינם** מופיעים בחלק הראשון של הטענה. לדוגמה, ישנם תלמידים שאינם מזהים שהגובה לבסיס הוא אחד הנתונים בטענה שלמעלה, מאחר והוא מופיע בחלק השני של המשפט המנוסח במילים.

כמו כן, כאשר טענה גיאומטרית מנוסחת בכתיב מתמטי, תלמידים רבים מתקשים להבין ולנסח אותה במילים. לדוגמה, לזהות שהנתון $AD \perp BC$ בדוגמה למעלה פירושו גובה לבסיס, ושהנתונים ΔABC ו- $AB = AC$ פירושם שהטענה טוענת משהו על משולש שווה שוקיים, ומכאן שאת מכלול הכתיב המתמטי בדוגמה לעיל ניתן לנסח במילים באופן הבא: *אם משולש הוא שווה שוקיים, אז הגובה לבסיס הוא גם תיכון*, או *הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון*, וכד'.

התיק ***זיהוי נתונים ומסקנות***, נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים לרשום בכתיב מתמטי את הנתונים והמסקנה כאשר הטענה מנוסחת במילים, או לנסח במילים טענה הרשומה בכתיב מתמטי, ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות הערכה:
  - משימה 1 ממילים לכתיב מתמטי.
  - משימה 2 מכתיב מתמטי למילים.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1 ***ממילים לכתיב מתמטי.***
- משימה 2 ***מכתיב מתמטי למילים.***

המשימות נועדו לבדוק את יכולת התלמידים לזהות נתונים ומסקנות בטענות.

במשימה 1 ***ממילים לכתיב מתמטי*** הטענות מוצגות במילים, והתלמידים נדרשים לרשום בכתיב מתמטי מה הנתונים ומה צריך להוכיח. כל הטענות בודקות את יכולת התלמידים לכתוב בכתיב מתמטי נתונים ומסקנות, בהינתן טענה גיאומטרית המנוסחת במילים. טענה ב בודקת בנוסף גם זיהוי נתונים ומה שצריך להוכיח, כאשר חלק מהנתון רשום בחלק השני של הטענה המנוסחת במילים.

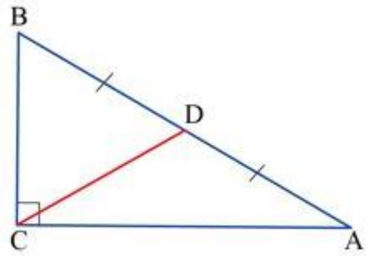
במשימה 2 ***מכתיב מתמטי למילים*** הטענות מנוסחות בכתיב מתמטי, באמצעות "נתון וצריך להוכיח", והתלמידים נדרשים לנסח אותן במילים.

משימה 1: ממילים לכתיב מתמטי

משימה 1: ממילים לכתיב מתמטי

רִשמו בכל סעיף את הנתונים ומה שצריך להוכיח בכתיב מתמטי.

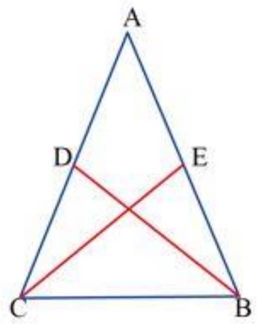
א. **טענה:** התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה באורכו למחצית היתר.



<u>בכתיב מתמטי:</u> **נתון:**

צריך להוכיח:

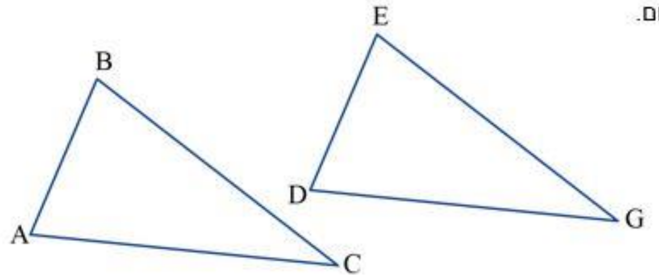
ב. **טענה:** אם המשולש שווה שוקיים, אז התיכונים לשוקיים שווים באורכם.



<u>בכתיב מתמטי:</u> **נתון:**

צריך להוכיח:

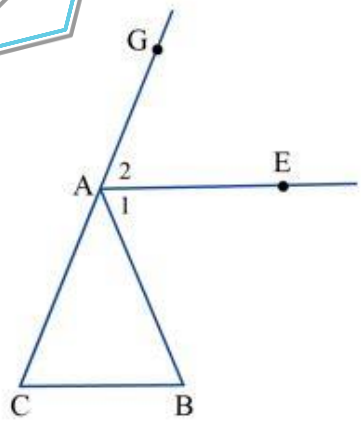
ג. **טענה:** משולשים חופפים שווים בשטחם.



<u>בכתיב מתמטי:</u> **נתון:**

צריך להוכיח:

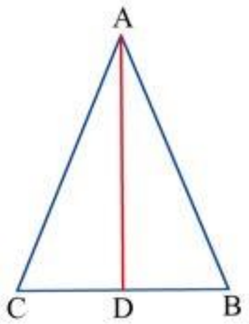
ד. **טענה:** מקביל לבסיס במשולש שווה שוקיים חוצה את הזווית החיצונית הצמודה לזווית הראש.



בכתיב מתמטי: **נתון:**

צריך להוכיח:

ה. **טענה:** חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון.



בכתיב מתמטי: **נתון:**

צריך להוכיח:

למשימה 1 מונגשת

משימה 2: מכתיב מתמטי למילים

משימה 2: מכתיב מתמטי למילים

לפניכם טענות הרשומות בכתיב מתמטי. כל טענה מלווה בשרטוט המתאר את הנתונים.

נסחו במילים את הטענות. שימו לב, יש אפשרויות שונות לניסוח במילים.

<u>דוגמה:</u>

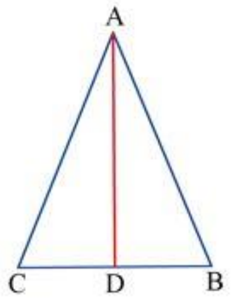
נתון: ΔABC

D נקודה על BC

$AD \perp BC$

$BD = DC$

צריך להוכיח: $AB = AC$



דוגמה לניסוח מילולי של הטענה:

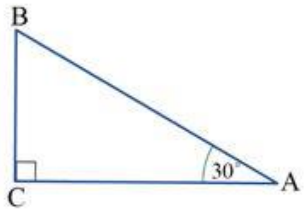
אם AD הוא גובה וגם תיכון במשולש, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

א. **נתון:** ΔABC

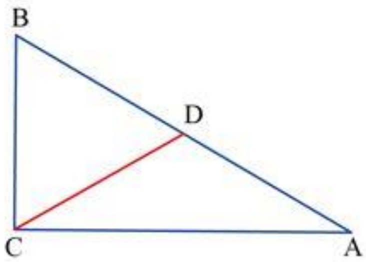
$\measuredangle C = 90°$

$\measuredangle A = 30°$

צריך להוכיח: $BC = \frac{1}{2} AB$



במילים:



ב. **נתון:** ΔABC

D נקודה על BA כך ש:

$AD = BD = CD$

צריך להוכיח: $\measuredangle BCA = 90°$

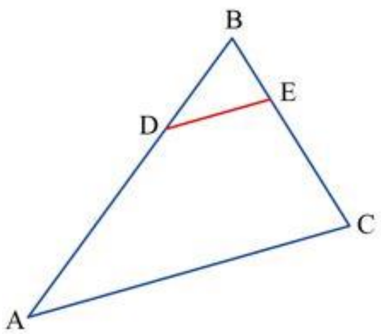
במילים:____

ג. **נתון:** ΔABC

D נקודה על AB ו- E נקודה על BC

$DE \parallel AC$

צריך להוכיח: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$



במילים:

[למשימה 2 מונגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	משימה 1 כל התשובות נכונות	משימה 1 מספר הסעיפים שטעו בהם	משימה 1 הערות	משימה 2 כל התשובות נכונות	משימה 2 מספר הסעיפים שטעו בהם	משימה 2 הערות
תלמיד 1		2		√		
תלמיד 2		1			2	

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות להלן:

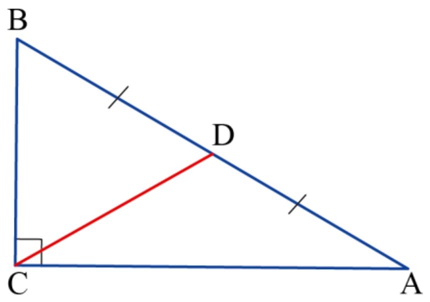
<u>משימה 1</u>

א. **נתון:** ΔABC

$\sphericalangle ACB = 90°$

$BD = AD$

צריך להוכיח: $CD = \frac{1}{2}AB$



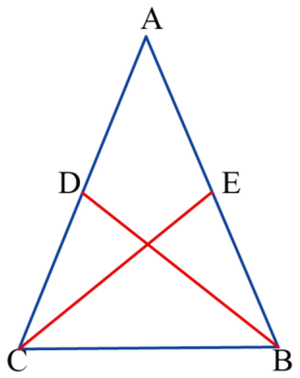
ב. **נתון:** ΔABC

$AB = AC$

$AD = CD$

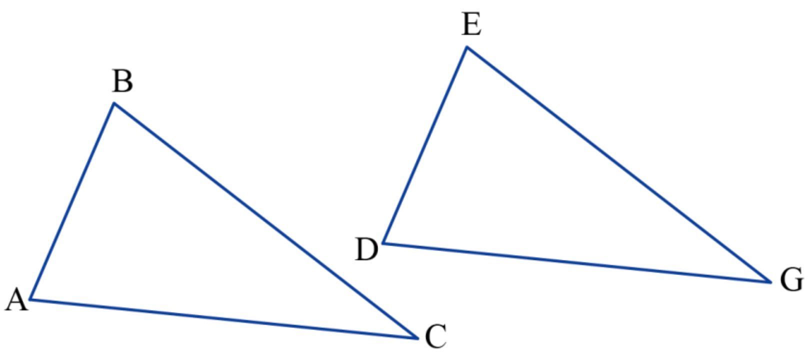
$AE = BE$

צריך להוכיח: $BD = CE$



ג. **נתון:** $\Delta ABC \cong \Delta DEG$

צריך להוכיח: $S\Delta ABC = S\Delta DEG$



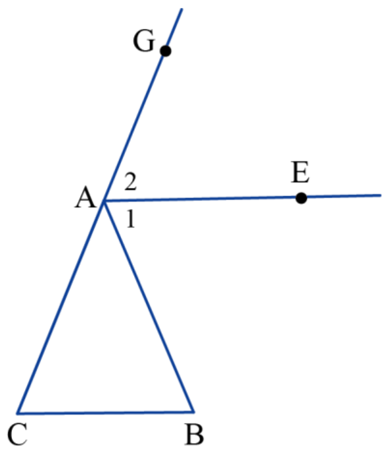
ד. **נתון:** ΔABC

$AB = AC$

$\sphericalangle GAB$ חיצונית למשולש בקודקוד A

$AE \parallel CB$

צריך להוכיח: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$



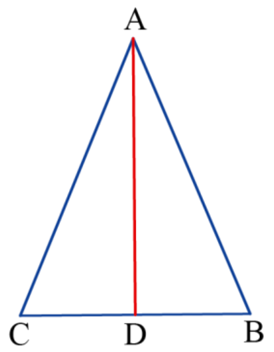
ה. **נתון:** ΔABC

$AB = AC$

D נקודה על BC

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$

צריך להוכיח: $BD = CE$



<u>משימה 2</u>

קיימים ניסוחים מילוליים שונים. להלן דוגמה לכל סעיף.

א. במשולש ישר זווית, הניצב שמול זווית שגודלה 30°, שווה באורכו לחצי אורך היתר.

ב. אם במשולש תיכון לאחת הצלעות שווה באורכו לחצי אורך הצלע אותה הוא חוצה, אז הזווית מול הצלע הזו היא זווית ישרה.

ג. מקביל לצלע של משולש, החותך את שתי הצלעות האחרות של המשולש, יוצר משולש הדומה למשולש הנתון.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

להלן מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שטעו **בכתיבת נתונים ומסקנות בכתיב מתמטי** של טענה גיאומטרית המנוסחת במילים**.**	V	
לתלמידים שטעו **בניסוח במילים** של טענה גיאומטרית המנוסחת בכתיב מתמטי.		V

פעילות 1: זיהוי נתונים ומסקנה

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: ***זיהוי נתונים ומסקנה.***
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1: *זיהוי נתונים ומסקנה*

דף פעילות 1: ***זיהוי נתונים ומסקנה***

1. נסחו כל אחת מהטענות באמצעות "אם ו"אז".

<u>דוגמה:</u> כשיורד גשם כדאי להשתמש במטריה.

אם יורד גשם, **אז** כדאי להשתמש במטריה.

א. אדם שגר בתל-אביב גר במדינת ישראל.

אם ________________ אז ________________

ב. היום שאחרי יום א בשבוע, הוא יום ב.

אם ________________ אז ________________

ג. משולשים חופפים שווים בשטח.

אם ________________ אז ________________

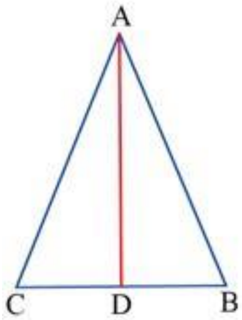
ד. הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים חוצה את זווית הראש.

אם ________________ אז ________________

2. נסחו כל אחת מהטענות הבאות באמצעות "אם" ו"אז"

שרטטו ורשמו בכתיב מתמטי מה **נתון** ומה **צריך להוכיח** בכל טענה.

דוגמה: הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון.



אם במשולש שווה שוקיים נתון גובה לבסיס, אז הוא גם תיכון לבסיס.

נתון: ΔABC

$AB = AC$

$AD \perp BC$

צ"ל: $BD = CD$

א. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות בגודלן.

אם ________________ אז ________________

נתון:

צ"ל:

ב. משולש בו כל הזוויות שוות בגודלן הוא שווה צלעות.

אם ________________ אז ________________

נתון:

צ"ל:

ג. במשולש שווה שוקיים הגבהים לשוקיים שווים באורכם.

אם ________________ אז ________________

נתון:

צ"ל:

לפעילות 1 מונגשת

דיון

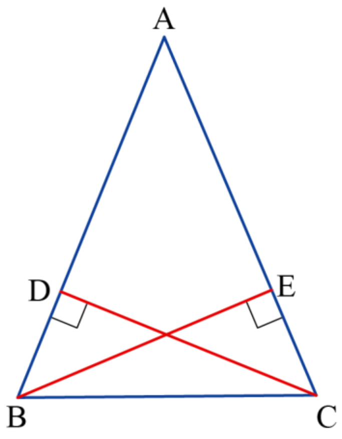
דנים בנקודות הבאות:

- מדוע הניסוח "אם" ו"אז" עוזר לזהות מה הנתונים ומה המסקנה?
- האם הניסוח באמצעות "אם ו"אז" עוזר תמיד? באילו מקרים הניסוח הזה אינו עוזר?

להלן מקרה שניסוח כזה אינו עוזר להבחין בין הנתונים למסקנה.

טענה: *אם המשולש שווה שוקיים אז הגבהים לשוקיים שווים באורכם (סעיף ד בתרגיל 2)*

במקרה זה הגבהים, השייכים לנתונים מופיעים בחלק השני של המשפט (לאחר "אז" וניתן בטעות לחשוב שהם שייכים למסקנה.)



ניסוחים מילוליים אלטרנטיביים לטענה שלעיל:

- *הגבהים לשוקיים במשולש שווה שוקיים שווים באורכם,*

או ניסוח באמצעות שרטוט:

- *אם* BD *ו-* CE *גבהים לשוקיים במשולש שווה שוקיים* ABC *, אז הם שווים באורכם.*

מדוע שני הניסוחים האלה עוזרים בזיהוי הנתונים והמסקנה?

פעילות 2: מה הטענה?

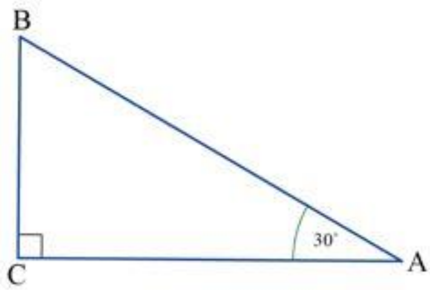
שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 2: ***רושמים במילים.***
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 2: *רושמים במילים*

דף פעילות 2: *רושמים במילים*

1. לפניכם טענה ממשימה 2א ושלושה ניסוחים מילוליים לטענה:



נתון: ΔABC

$\sphericalangle C = 90°$

$\sphericalangle A = 30°$

צריך להוכיח: $BC = \frac{1}{2}AB$

- ניצב מול זווית שגודלה 30º במשולש ישר זווית, שווה באורכו לחצי אורך היתר.
- במשולש ישר זווית ניצב מול זווית שגודלה 30º, שווה באורכו לחצי אורך היתר.
- אם במשולש ישר זווית גודל אחת הזוויות שווה ל- 30º, אז אורך הניצב מול הזווית הזו שווה לחצי אורך היתר.

איזה מהניסוחים מפריד בצורה הברורה ביותר בין הנתונים למסקנה? הסבירו.

2. נסחו את הטענות הבאות באמצעות "אם" ו"אז".

א. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את הזוויות דרכן הוא עובר.

אם ________________ אז ________________

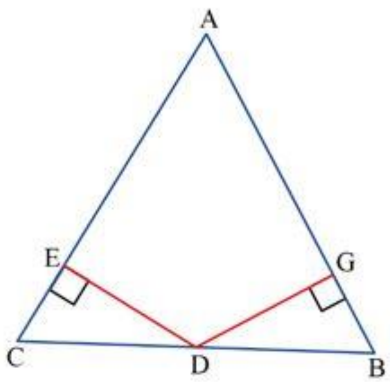
ב. זווית חיצונית למשולש שווה בגודלה לסכום הגדלים של שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה.

אם ________________ אז ________________

ג. במשולשים חופפים הגבהים לצלעות מתאימות שווים באורכם.

אם ________________ אז ________________

3. נסחו במילים כל אחת מהטענות הבאות.



א. **נתון:** ΔABC

D נקודה על הצלע BC

$BD = CD$

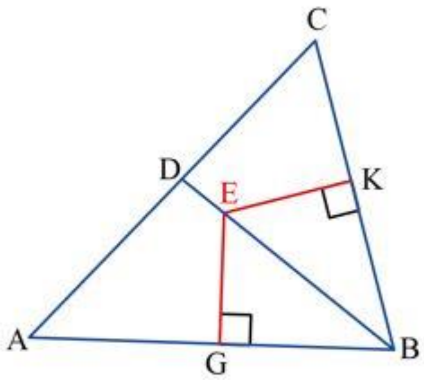
$AB = AC$

$DE \perp AC$

$DG \perp AB$

צריך להוכיח: $DE = DG$

במילים: ______________________________



ב. **נתון:** ΔABC

E נקודה על הקטע BD

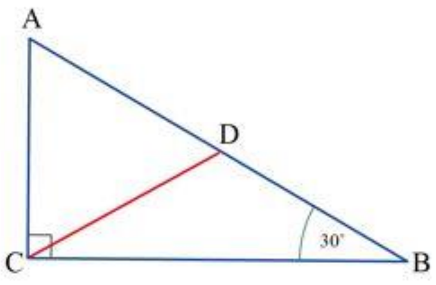
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$

$EK \perp BC$

$EG \perp AB$

צריך להוכיח: $EK = EG$

במילים: ______________________________



ג. **נתון:** ΔABC

$\sphericalangle ACB = 90°$

$\sphericalangle B = 30°$

$AD = BD$

צריך להוכיח: $AC = AD = CD$

במילים: ______________________________

לפעילות 2 מונגשת

דיון

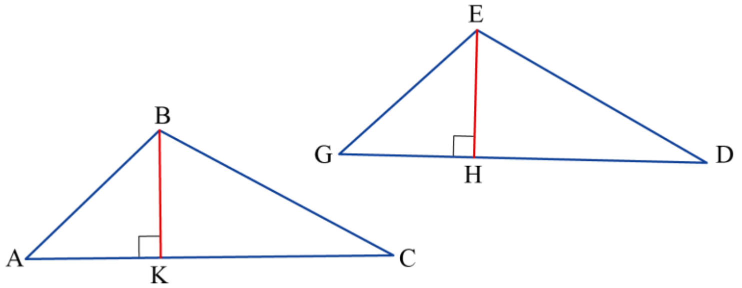
הערה: הדיון שלהלן, כמו הדיון שבפעילות 1 מתמקד בזיהוי ההנחות והמסקנות בטענה גיאומטרית וניסוח הטענה במילים.

- מדוע הניסוח "אם" ו"אז" עוזר לזהות מה הנתונים ומה המסקנה? (כך נוצרת הפרדה טובה ביותר בין נתונים למסקנה.)
- מתי ניסוחים מילוליום באצמעות "אם ו"אז" אינם עוזרים להבחנה בין הנתונים למסקנה?

  (למשל: *אם המשולשים חופפים, אז הגבהים לצלעות מתאימות שווים באורכם.*

  במקרה זה הגבהים, השייכים לנתונים מופיעים בחלק השני של המשפט.)
- האם הניסוח במילים יכול לעזור?

  למשל: ניסוחים מילוליים אלטרנטיבים, לדוגמה שלמעלה:
  - *הגבהים לצלעות מתאימות במשולשים חופפים שווים באורכם.*
  - או ניסוח במילים בליווי שרטוט:



אם BK *ו-* EH *גבהים לצלעות מתאימות במשולשים חופפים* ABC *ו-* GED *, אז הם שווים באורכם.*

- **לסיכום:** הניסוח במילים משקף הבנה של מה שכתוב בכתיב מתמטי, ולכן עשוי לעזור לזהות במה אפשר להשתמש במהלך הוכחה ולמה צריך להגיע בסופה.

לבדיקת תוצרי התלמידים בדפי הפעילויות ניתן להיעזר בפתרונות להלן:

דף פעילות 1: ***זיהוי נתונים ומסקנה***

1. א. אם אדם גר בתל-אביב, אז הוא גר במדינת ישראל.

ב. אם היום יום א בשבוע, אז מחר יום ב.

ג. אם משולשים חופפים אז הם שווים בשטחם.

ד. אם נתון גובה במשולש שווה-שוקיים, אז הוא חוצה את זווית הראש של המשולש.

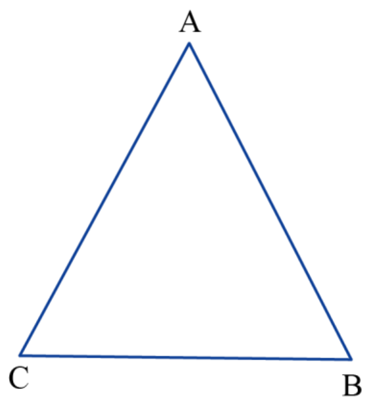
2. א. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות בגודלן.

אם משולש הוא שווה צלעות, **אז** כל זוויותיו שוות בגודלן.

נתון: ΔABC

$AB = BC = CA$

צריך להוכיח: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$



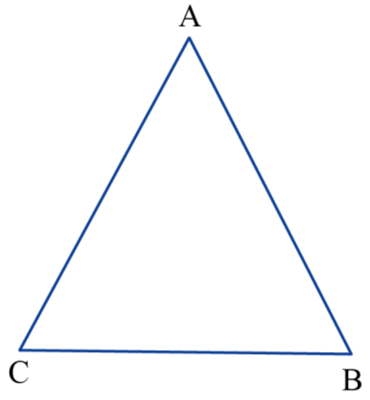
ב. משולש בו כל הזוויות שוות בגודלן הוא שווה צלעות.

אם במשולש כל הזוויות שוות בגודלן, **אז** המשולש שווה צלעות.

נתון: ΔABC

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

צריך להוכיח: $AB = BC = CA$



ג. במשולש שווה שוקיים הגבהים לשוקיים שווים באורכם.

אם נתונים גבהים לשוקיים במשולש שווה שוקיים, **אז** הם שווים בגודלם.

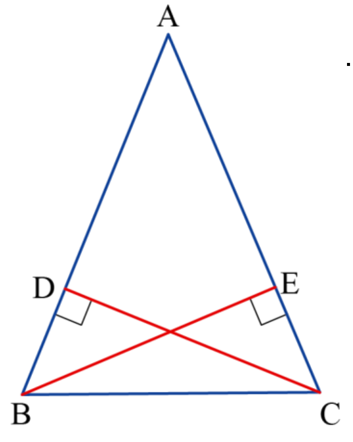
נתון: ΔABC

$AB = AC$

$CD \perp AB$

$BE \perp AC$

צריך להוכיח: $BE = CD$



דף פעילות 2: ***רושמים במילים***

1. הניסוח השלישי מפריד טוב ביותר בין הנתונים למסקנה: אם במשולש ישר זווית גודל אחת הזוויות הוא 30^{o}, אז אורך הניצב מול הזווית הזו שווה לחצי אורך היתר, מאחר שהמסקנה, **אורך הניצב** השווה לחצי אורך היתר, מופיעה בחלק השני של המשפט לאחר "אז".

2. א. אם המרובע הוא דלתון, אז האלכסון הראשי חוצה את הזוויות דרכן הוא עובר.
ב. אם נתונה זווית חיצונית למשולש, אז היא שווה בגודלה לסכום הגדלים של שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה.
ג. אם במשולשים חופפים נתונים גבהים לצלעות מתאימות, אז הם שווים באורכם.

3. א. אנכים לשוקיים מאמצע הבסיס של משולש שווה שוקיים, שווים באורכם.
ב. אנכים לשוקי זווית מנקודה על חוצה זווית במשולש, שווים באורכם.
ג. אם נתון תיכון ליתר במשולש ישר זווית וגודלה של אחת הזוויות החדות הוא 30^{o}, אז התיכון הזה מחלק את המשולש לשני משולשים שאחד מהם שווה צלעות.