תיק משימטיקה

שיקופים של פונקציה

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

מטרות התיק 3

זמני עבודה משוערים 3

החומרים והעזרים הדרושים 3

רקע 4

הצעה למהלך העבודה 4

עבודה על משימת ההערכה 5

מתאימים שיקופים 5

הערכת תוצרי התלמידים 6

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה 7

פעילות 1 8

דף פעילות 1 **שיקוף ביחס לציר ה- x** 9

פעילות 2 12

דף פעילות 2 **שיקוף ביחס לציר ה-y** 12

פעילות 3 14

דף פעילות 3 **ערך מוחלט** 15

שיקופים של פונקציה

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים בין ייצוגים גרפיים, סימבוליים ומילוליים של שיקופים של פונקציות ביחס לציר ה- x וביחס לציר ה- y, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להתאים בין שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ **ביחס לציר ה- x** לבין ביטוי סימבולי מהצורה $-f(x)$.
- להתאים בין שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ **ביחס לציר ה- y** לבין ביטוי סימבולי מהצורה $f(-x)$.
- להתאים בין גרף המתאר את **הערך המוחלט** של הפונקציה $f(x)$ לבין ביטוי סימבולי מהצורה $|f(x)|$.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: 10-15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 45 דקות לכל פעילות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת הערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף הוראות למשימה ***מתאימים שיקופים***.
- ערכת כרטיסים למשימה ***מתאימים שיקופים***.

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות 1 ***שיקוף ביחס לציר ה- x***.
- יישומון שיקופים – פעילות 1.

לפעילות 2

- דף פעילות 2 ***שיקוף ביחס לציר ה- y***.
- יישומון שיקופים – פעילות 2.

לפעילות 3

- דף פעילות 3 ***ערך מוחלט***.
- יישומון שיקופים – פעילות 3.

רקע

במסגרת המבוא ללימודי אנליזה של פונקציות עוסקים בפעולות שונות על פונקציות (הזזות, מתיחות וכיווצים, שיקופים ועוד) ובייצוגים המילולי, הגרפי והאלגברי של פעולות אלה. בעזרת פעולות על פונקציות ניתן להשתמש בידע קודם על פונקציה אחת כדי להסיק על תכונותיה של פונקציה אחרת. בנוסף שימוש בפעולות אלה מאפשר לבצע בקרה על תוצאות חקירה של פונקציה המתקבלת מפונקציה מוכרת אחרת על ידי הרכבה של פעולות כאלה. לדוגמה, ניתן לשרטט בקלות את גרף הפונקציה $y=-x^2$ אם מתייחסים אליו כאל שיקוף ביחס לציר ה- x של גרף הפונקציה $y=x^2$.

הפעולות המתבצעות על פונקציות כוללות שיקופים ביחס לצירים. שיקופים כאלה מופיעים בפרקי לימוד שונים ובהקשרים שונים, ביניהם פרבולות, הפונקציות $y=\sqrt{x}$ ו- $y=\sqrt{-x}$ (וכנ"ל $y=\ln(x)$ ו- $y=\ln(-x)$), פונקציות זוגיות ואי זוגיות ועוד.

בעוד שפעולת השיקוף של פונקציה ביחס לצירים בייצוג הגרפי היא פעולה קלה יחסית לתלמידים, הבנת הייצוג הסימבולי שלה בדרך כלל קשה יותר. כמו כן פעמים רבות הבנת משמעות הביטוי $-f(x)$ כשיקוף של הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- x קלה יותר מאשר הבנת משמעות הביטוי $f(-x)$ כשיקוף ביחס לציר ה- y. בנוסף לכך ישנם תלמידים המתקשים בהבנת ההשלכות של שיקוף הפונקציה ביחס לציר כלשהו על תכונות הפונקציה החדשה. למשל, במקרה של שיקוף פונקציה ביחס לציר ה- x, נקודות האפס נשמרות, אך סוג נקודות הקיצון מתהפך (נקודת מקסימום הופכת למינימום ולהפך), וכן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה מתחלפים. בביצוע פעולת ערך מוחלט על פונקציה, כלומר, $|f(x)|$, מתבצע שיקוף ביחס לציר ה- x. במקרה זה השיקוף אינו חל על כל הפונקציה, אלא רק על תחום חלקי שלה – תחום השליליות. עובדה זאת מהווה מקור לקשיים אצל תלמידים רבים.

התיק ***שיקופים של פונקציה*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בעבודה עם שיקופים של פונקציה ביחס לצירים, ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***מתאימים שיקופים***.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

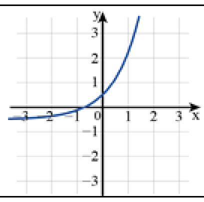
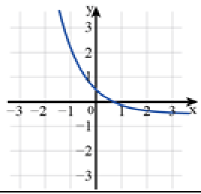
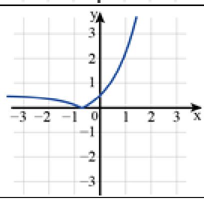
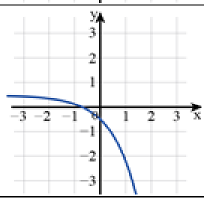
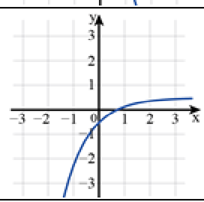
עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***מתאימים שיקופים*** מוצגות חמש פונקציות: פונקציית מקור וארבע פונקציות שהתקבלו משיקופים שלה ביחס לצירים. כל אחת מחמש הפונקציות מתוארת באופן גרפי, מילולי וסימבולי, וכל תיאור מופיע על כרטיס נפרד. התלמידים מתבקשים ליצור שלושות כרטיסים, כך שכל שלשה כוללת דרכים שונות לתאר אותה פונקציה.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

מתאימים שיקופים

לפניכם שלוש קבוצות של כרטיסים. בכל קבוצה חמישה כרטיסים.
בקבוצה אחת יש תיאורים גרפיים, בקבוצה שנייה תיאורים מילוליים, ובקבוצה השלישית ביטויים סימבוליים.
בשורה הראשונה שבטבלה שלפניכם מופיעה פונקציית מקור בשלושת התיאורים (גרפי, מילולי וסימבולי). בעמודה הראשונה מופיעים גרפים המתקבלים כתוצאה משיקופים שונים של פונקציית המקור.
עליכם ליצור שלשות של כרטיסים כך שלכל גרף יותאם תיאור מילולי וביטוי סימבולי שלו.
מלאו את הטבלה לפי השלשות שהרכבתם.

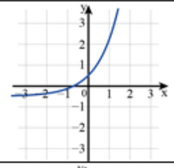
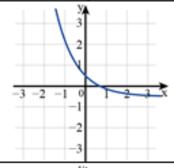
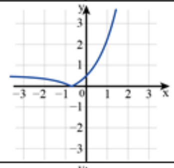
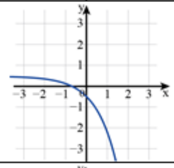
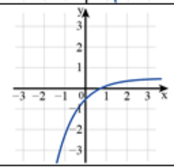
	תיאור גרפי	תיאור מילולי	ביטוי סימבולי
1		פונקציית המקור	$f(x)$
2			
3			
4			
5			

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובה נכונה	טעויות				הערות
		בשיקוף בציר ה- x	**בשיקוף בציר ה- y**	**בשיקופים בשני הצירים**	**בערך מוחלט**	
תלמיד 1		V	V	V	V	תיאור סימבולי נכון ותיאור מילולי לא נכון
תלמיד 2	V					
תלמיד 3		V	V			
תלמיד 4		V	V	V	V	תיאור מילולי נכון וסימבולי לא נכון
סך-הכל						

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

תיאור גרפי	תיאור מילולי	ביטוי סימבולי
1 	פונקציית המקור	$f(x)$
2 	שיקוף ביחס לציר y	$f(-x)$
3 	שיקוף "החלק השלילי" של הגרף ביחס לציר x	$\lvert f(x)\rvert$
4 	שיקוף ביחס לציר x	$-f(x)$
5 	שיקוף ביחס לשני הצירים בזה אחר זה	$-f(-x)$

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שלוש פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2	פעילות 3
לתלמידים שלא התאימו בין גרף 4 לבין הביטוי $-f(x)$ (מסומנים בטבלת ההערכה בעמודה שיקוף בציר ה- x).	V		
לתלמידים שלא התאימו בין גרף 2 לבין הביטוי $f(-x)$ (מסומנים בטבלת ההערכה בעמודה שיקוף בציר ה- y).		V	
לתלמידים שלא התאימו בין גרף 3 לבין הביטוי $\lvert f(x)\rvert$ (מסומנים בטבלת ההערכה בעמודה ערך *מוחלט*).			V

פעילות 1

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***שיקוף ביחס לציר ה- x***.
- דיון מלווה ביישומון שיקופים – פעילות 1.

מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***שיקוף ביחס לציר ה- x***.

מטרת הדף לסייע לתלמידים להבין את המשמעות האלגברית והגרפית של הפונקציה $-f(x)$ ביחס לפונקציה $f(x)$
.

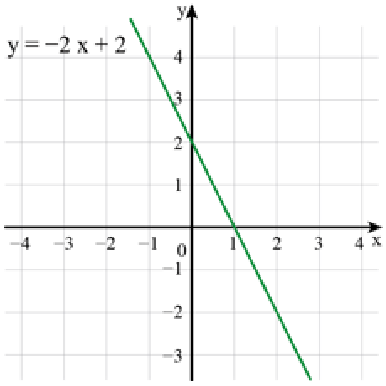
במהלך הפעילות התלמידים נעזרים בידע קודם על ייצוגים אלגבריים של ישרים ופרבולות על מנת להסיק מסקנה כללית בנוגע לייצוג האלגברי של פונקציה שהיא שיקוף של פונקציה אחרת ביחס לציר ה- x.

שיקוף ביחס לציר ה- x

לפניכם גרפים של ישרים ופרבולות.

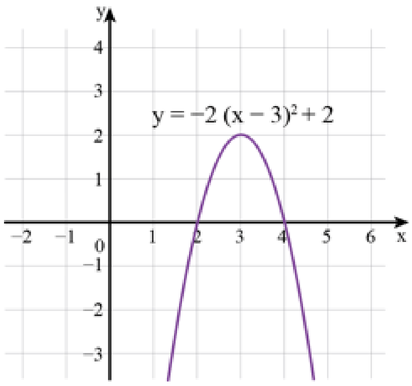
1. שרטטו לכל גרף, באותה מערכת צירים, את השיקוף שלו ביחס לציר ה- x.
2. כתבו ייצוג אלגברי מתאים לכל אחת מהפונקציות ששרטטתם.
3. מה תוכלו לומר על הקשר בין הייצוגים האלגבריים של כל זוג פונקציות?

א.



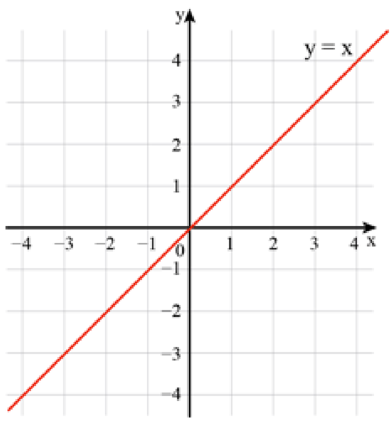
הפונקציה לאחר השיקוף:

ג.



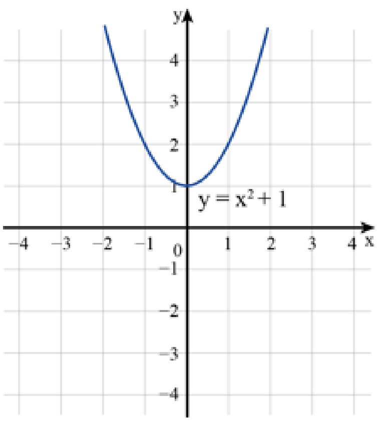
הפונקציה לאחר השיקוף:

ב.



הפונקציה לאחר השיקוף:

ד.



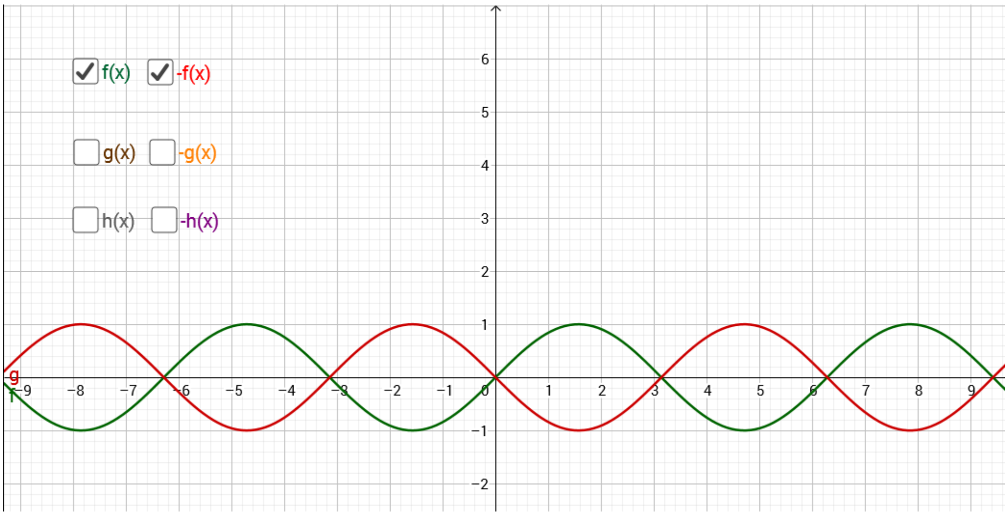
הפונקציה לאחר השיקוף:

- **דיון מלווה ביישומון** [**שיקופים – פעילות 1**]

בסיום העבודה על דף הפעילות מומלץ לדון בנקודות הבאות:

- מהו הקשר שמצאתם בין הייצוגים האלגבריים של כל זוג פונקציות שהאחת היא שיקוף של השנייה?
- האם, לדעתכם, הפונקציה $-f(x)$ **תמיד** מייצגת את השיקוף ביחס לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$? נסו להסביר מדוע.

בשלב זה מומלץ להיעזר ביישומון שיקופים – פעילות 1 כדי לראות דוגמאות לפונקציות נוספות ושיקופן בציר ה- x.
מקרינים את היישומון על הלוח. עבור כל גרף של פונקציה ביישומון, למשל f , מבקשים מתלמיד לשרטט על הלוח את גרף הפונקציה $-f$, ולאחר מכן בודקים את התשובה באמצעות היישומון.



סיכום ביניים

- גרף הפונקציה $g(x)=-f(x)$ מתקבל מגרף הפונקציה $f(x)$ על ידי שיקופו ביחס לציר ה- x.
- משמעות הסימון $g(x)=-f(x)$ היא שהפונקציה $g(x)$ מתאימה לכל x את ערך ה- y **הנגדי** לזה של הפונקציה $f(x)$.

המשך הדיון עוסק בתכונות של פונקציית השיקוף ביחס לציר ה-x בהשוואה לפונקציה המקורית. מבררים **מה נשמר ומה משתנה?**

לצורך הדיון כדאי לחזור ולהיעזר ביישומון שיקופים – פעילות 1.

- השוו את גרף הפונקציה המקורית עם גרף הפונקציה לאחר פעולת השיקוף בציר ה-x ומלאו את הטבלה הבאה:[1]

	נשמר	**השתנה**	**אם השתנה , כיצד השתנה**
סוג הקיצון			
שיעור ה-x של נקודות הקיצון			
שיעור ה- y של נקודת הקיצון			

[1] ניתן להוסיף פרמטרים נוספים כגון: זוגיות/אי-זוגיות של פונקציה, אסימפטוטות אנכיות/אופקיות ועוד. זאת בהתאם לחומר הנלמד בכיתה.

	נשמר	השתנה	אם השתנה , כיצד השתנה
תחומי עלייה וירידה			
נקודות אפס			
תחומי חיוביות ושליליות			
שיעורי נקודה כלשהי			

- אילו נקודות **נשמרות** (אינן משתנות) בפעולת השיקוף בציר ה-x? מדוע?

לסיכום

- בפעולת השיקוף בציר ה- x נשמרות כל נקודות האפס של הפונקציה (נקודות החיתוך עם ציר ה- x), אם קיימות כאלה, והן בלבד. כלומר: $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-f(x)$ (המספר 0 נגדי לעצמו, והוא המספר היחיד שמקיים תכונה זו.)
- לכל נקודת מינימום (מקסימום) בפונקציה המקורית מתאימה נקודת מקסימום (מינימום) בפונקציה שלאחר השיקוף כך ששיעור ה- x של שתיהן שווה ושיעורי ה- y נגדיים.
- בהתאם להבדל בסוג נקודות הקיצון, תחומי העלייה והירידה "מתהפכים" ביניהם. כלומר, תחום ירידה של פונקציה אחת הוא תחום עלייה של הפונקציה האחרת ולהיפך.
- בגלל שנקודות האפס נשמרות, אך ערכי ה- y הפוכים בסימן, "מתהפכים" גם תחומי החיוביות והשליליות. כלומר, תחום חיוביות "הופך" לתחום שליליות ולהיפך.
- פעולת השיקוף היא פעולה סימטרית. כלומר, אם הפונקציה f היא שיקוף של הפונקציה g אז גם g היא שיקוף של f.

כדאי לשים לב לטעות נפוצה המתרחשת במהלך חקירת פונקציה f. תלמידים המחפשים נקודת קיצון, גוזרים את הפונקציה, משווים את הנגזרת לאפס, ובמהלך פתרון המשוואה לפעמים **מחלקים את אגפי המשוואה במספר שלילי**. במקרה כזה אם יתייחסו לביטוי המתקבל כאל הנגזרת לצורך מציאת סימן הנגזרת ב"טבלת עלייה וירידה", סוג הקיצון וכן תחומי העלייה והירידה יתאימו לפונקציה $-f$ (השיקוף בציר ה-x) ולא לפונקציה המבוקשת f .

פעילות 2

שלבי הפעילות

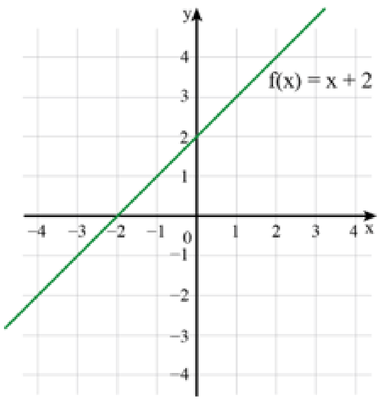
- עבודה על דף פעילות 2 ***שיקוף ביחס לציר ה- y***.
- דיון מלווה ביישומון שיקופים – פעילות 2.

מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 ***שיקוף ביחס לציר ה- y***.

מטרת הדף לסייע לתלמידים להבין את המשמעות האלגברית והגרפית של הפונקציה $f(-x)$ ביחס לפונקציה $f(x)$.

דף פעילות 2 – שיקוף ביחס לציר ה- y



1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x+2$.

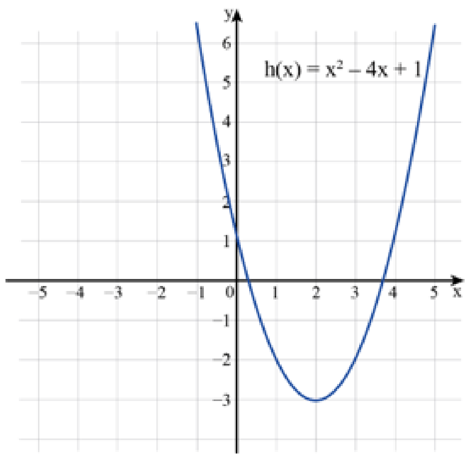
מגדירים פונקציה חדשה g כך ש: $g(x)=f(-x)$.

א. כתבו את הייצוג האלגברי של הפונקציה $g(x)$.

____

ב. שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מסקנה: גרף הפונקציה $f(-x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה __________ ביחס לציר ה-_____.



2. לפניכם גרף הפונקציה $h(x)=x^2-4x+1$

מגדירים פונקציה חדשה k כך ש: $k(x)=h(-x)$.

א. כתבו את הייצוג האלגברי של הפונקציה $k(x)$.

____

ב. השלימו את טבלת הערכים הבאה:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	3
k(x)		-2					

ג. שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $k(x)$.

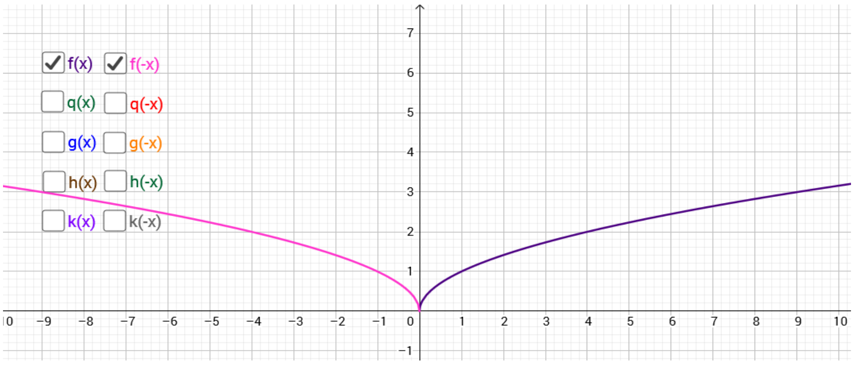
ד. מסקנה: גרף הפונקציה $h(-x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה __________ ביחס לציר ה-_____.

- **דיון מלווה ביישומון** [שיקופים – פעילות 2](#)

בסיום העבודה על דף הפעילות מומלץ לדון בנקודות הבאות:

- מה תוכלו לומר על הקשר בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$? $h(x)$ ו- $h(-x)$?
- האם, לדעתכם, הפונקציה $q(-x)$ **תמיד** מייצגת את השיקוף ביחס לציר ה-y של הפונקציה $q(x)$? נסו להסביר מדוע.

בשלב זה מומלץ להיעזר ביישומון [שיקופים – פעילות 2](#). ביישומון מוצגות דוגמאות לפונקציות שונות והשיקופים שלהן ביחס לציר ה-y. מקרינים את היישומון על הלוח. עבור כל גרף של פונקציה ביישומון, $f(x)$ למשל, מבקשים מתלמיד לשרטט על הלוח את גרף הפונקציה $f(-x)$, ולאחר מכן בודקים את התשובה באמצעות היישומון.



ניתן להמשיך את הדיון בסיוע טבלה הדומה לזו שבדיון של פעילות 1, או באמצעות השאלות הבאות:

- באילו מקרים גרף הפונקציה המקורית וגרף פונקציית השיקוף בציר ה- y זהים? (למשל, הפונקציה k ביישומון.)
- איזו נקודה **נשמרת** (אינה משתנה) בפעולת השיקוף בציר ה- y? מדוע?
- במה שונות נקודות הקיצון של פונקציית השיקוף מאלו של הפונקציה המקורית?
- האם אפשר לדעת מהן נקודות האפס ואת תחומי העלייה והירידה של פונקציית השיקוף?

לסיכום

- גרף הפונקציה $g(x)=f(-x)$ מתקבל מגרף הפונקציה $f(x)$ על ידי שיקופו ביחס לציר ה-y.
- משמעות הסימון $g(x)=f(-x)$ היא שהפונקציה $g(x)$ מתאימה לכל x את הערך שהפונקציה $f(x)$ מתאימה ל- $-x$.
- בפעולת השיקוף בציר ה-y נשמרת נקודת החיתוך עם ציר ה-y (אם קיימת כזו). הסיבה היא שבנקודה זו $x=0$ וברור ש- $f(0)=f(-0)$.
- לכל נקודת קיצון בפונקציה המקורית מתאימה נקודת קיצון בפונקציה שלאחר השיקוף כך ששתיהן מאותו סוג, יש להם אותו ערך קיצון, אך שעורי ה- x שלהם נגדיים. לדוגמה, אם בפונקציה $f(x)$ קיימת נקודת מקסימום בנקודה $(a, f(a))$, אז לפונקציה $f(-x)$ יש נקודת מקסימום בנקודה $(-a, f(a))$.

- גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף פונקציית השיקוף בציר ה-y, $f(-x)$, יהיו זהים אם ורק אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית (שכן, לפי הגדרת פונקציה זוגית מתקיים $f(-x)=f(x)$ לכל x).

פעילות 3

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 3 ***ערך מוחלט***.
- דיון מלווה ביישומון [שיקופים – פעילות 3](#).

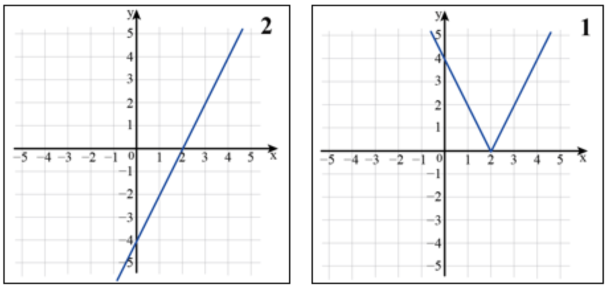
מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 3 ערך *מוחלט***

מטרת הדף לסייע לתלמידים להבין את המשמעות הגרפית של הפונקציה $|f(x)|$ – לזהות גרף של פונקציית ערך מוחלט ולשרטט גרף של פונקציה כזו.

ערך מוחלט

1. לפניכם שני גרפים. אחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ והאחר את הפונקציה $|f(x)|$.

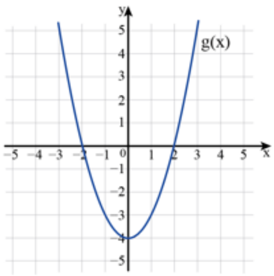


התאימו לכל פונקציה את מספר הגרף המתאר אותה:

$f(x)$ - ____________ $|f(x)|$ - ____________

נמקו:

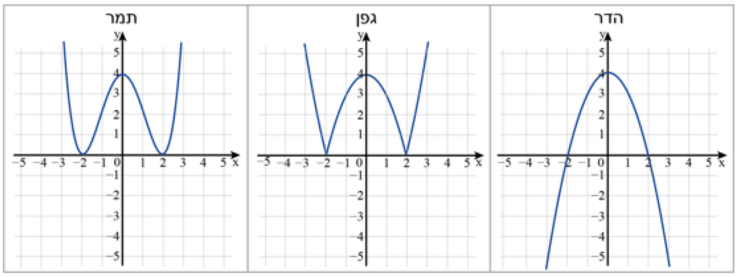
2. נתון גרף הפונקציה $g(x)$.



הדר, גפן ותמר שרטטו את גרף הפונקציה $|g(x)|$. מי מהן צודקת?

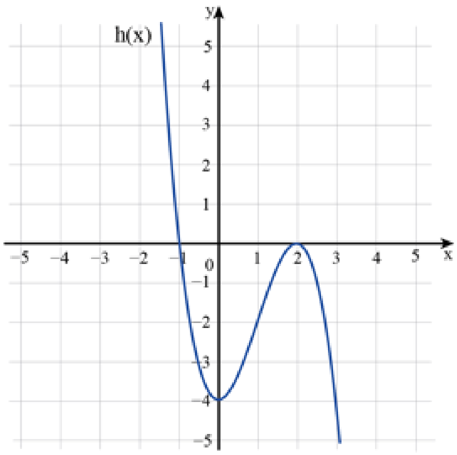
____

נמקו:



3. נתון גרף הפונקציה $h(x)$.

שרטטו על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $|h(x)|$.



- **דיון מלווה ביישומון** [שיקופים – פעילות 3](#)

בסיום העבודה על דף הפעילות, מומלץ לדון בנקודות הבאות:

הגדרת הפונקציה $|f(x)|$

- מהי משמעות הפונקציה $|f(x)|$? נסו להגדיר אותה במילים.
- ההגדרה המתמטית של פונקציית הערך המוחלט: $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0 \\ -f(x), & f(x)<0 \end{cases}$

כלומר, בתחום שבו $f(x)$ חיובית (או אפס) - גרף הפונקציה $|f(x)|$ זהה לזה של $f(x)$. ובתחום שבו $f(x)$ שלילית - גרף הפונקציה $|f(x)|$ הוא שיקוף ביחס לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

- מתוך ההגדרה ניתן להסיק שפונקציית הערך המוחלט היא אי שלילית (חיובית או אפס) בכל תחום הגדרתה.

שרטוט גרף הפונקציה $|f(x)|$

בשלב זה מומלץ להיעזר ביישומון [שיקופים – פעילות 3](#). ביישומון מוצגות דוגמאות לפונקציות ופונקציות הערך המוחלט שלהן. מקרינים את היישומון על הלוח. עבור כל גרף של פונקציה ביישומון, $f(x)$ למשל, מבקשים מתלמיד לשרטט על הלוח את גרף הפונקציה $|f(x)|$, ולאחר מכן בודקים את התשובה באמצעות היישומון.

מסקנות מההתנסות ביישומון:

- גרף הפונקציה $f(x)$ זהה לגרף הפונקציה $|f(x)|$, (כלומר, $f(x) = |f(x)|$) אם ורק אם הפונקציה $f(x)$ אי שלילית בכל תחום הגדרתה (למשל, הפונקציה f ביישומון).
- גרף הפונקציה $|f(x)|$ הוא שיקוף ביחס לציר ה-x של הפונקציה $f(x)$ אם ורק אם הפונקציה $f(x)$ שלילית או אפס בכל תחום הגדרתה (למשל, הפונקציה g ביישומון).
- בפעולת הערך מוחלט נשמרות כל נקודות האפס של הפונקציה המקורית. הסיבה לכך היא שבנקודות אלו $f(x) = |f(x)| = 0$ (למשל, הפונקציות h, k, q ביישומון).
- בפעולת הערך המוחלט כל נקודות האפס של הפונקציה המקורית "הופכות" לנקודות מינימום. הסיבה היא שבפונקציית הערך המוחלט הערך המינימלי הוא 0 ולכן אם קיימת נקודת אפס - היא הנמוכה ביותר בסביבתה (למשל, הפונקציות g, h, k, q ביישומון).
- בפעולת הערך מוחלט כל נקודת חיתוך עם ציר ה- x **שאינה נקודת השקה** בפונקציה המקורית "הופכת" לנקודת "שפיץ" (למשל, הפונקציות h, k, q ביישומון).