



תיק משימטיקה

זהויות מתמטיות:

ביטויים ומשוואות

עם מכנים מספריים

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: משוואות שקולות
7	משימה 2: ביטויים זהים
8	הערכת תוצרי תלמידים
9	פעילות בעקבות ההערכה
9	פעילות: ביטויים אלגבריים ומשוואות עם מכנים מספריים
10	עבודה על דף פעילות חלק א': אוהד פותר משוואות
10	דיון
11	עבודה על דף פעילות חלק ב': אוהד מפשט ביטויים
11	דיון
12	עבודה על דף פעילות חלק ג': משוואה או ביטוי
13	דיון מסכם



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לעבוד עם משוואות וביטויים אלגבריים עם מכנים מספריים, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ למצוא ביטוי אלגברי זהה לביטוי אלגברי נתון המכיל מכנים מספריים.
- ❖ למצוא משוואה שקולה למשוואה נתונה המכילה מכנים מספריים.
- ❖ להבחין בין פעולות מותרות לעבודה עם משוואות המכילות מכנים (מספריים) לפעולות מותרות לעבודה עם ביטויים אלגבריים המכילים מכנים (מספריים).



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 30-45 דקות.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה: 45-60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1 [משוואות שקולות](#).
- ❖ דף משימה 2 [ביטויים זהים](#).

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות: **ביטויים אלגבריים ומשוואות עם מכנים מספריים:**

- ❖ דף פעילות חלק א' [אוהד פותר משוואות](#).
- ❖ דף פעילות חלק ב' [אוהד מפשט ביטויים](#).
- ❖ דף פעילות חלק ג' [משוואה או ביטוי](#).

¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בזהויות מתמטיות. שני תיקים – **נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות** – עוסקים בזהויות שהשימוש בהן שכיח. התיק – **ביטויים ומשוואות עם מכנים מספריים** עוסק בזהויות המכילות מכנים והטיפול בהם במהלך פתרון משוואות, והתיק – **ביטויים נגדיים** עוסק בקשר בין זהויות וזוגות של ביטויים נגדיים.



רקע

ביצוע פעולות עם עצמים מתמטיים, כגון ביטויים אלגבריים ומשוואות, הוא פעילות שכיחה במתמטיקה בכלל ובאלגברה בפרט. בתיק זה נעסוק בבצוע פעולות הקשורות לפישוט ביטויים אלגבריים ולפתרון משוואות. תלמידים רבים נתקלים בקשיים כאשר הם עוסקים בביטויים אלגבריים ובמשוואות עם מכנים מספריים. חלק מהקשיים עלולים לנבוע מאי-הבחנה בין הפעולות הקשורות לביטויים אלגבריים ובין הפעולות הקשורות למשוואות. קושי נפוץ כרוך בניסיון של תלמידים "להיפטר מהמכנה" על-ידי כפל העצם המתמטי במספר שיאפשר ביטול המכנה (או המכנים). ביצוע פעולה כזאת מתאים במהלך פתרון משוואות, שכן הוא מייצר משוואה שקולה שפתרונותיה זהים לאלה של המשוואה המקורית, אך אינו מתאים במהלך פישוט ביטויים אלגבריים בעלי מכנה. כך, למשל, ישנם תלמידים הכופלים ביטוי,

$$\text{כמו } \frac{x}{2} + \frac{3}{5} \text{ ב-} 10 \text{ (מכנה משותף), ומקבלים את הביטוי } 5x + 6, \text{ שאינו זהה לביטוי המקורי.}$$

קושי נוסף של תלמידים בהקשר זה הוא ביצוע שגוי של כפל העצם המתמטי במספר שיאפשר ביטול המכנה (או המכנים) במכנה משותף של השברים המופיעים במשוואה, בלי להכפיל מחוברים שאין להם מכנים.

למשל, יש תלמידים המתכוונים להכפיל ב-10 את אגפי המשוואה $\frac{x^2}{5} + x = \frac{3x}{2} - 1$ ומקבלים באופן שגוי את המשוואה $2x^2 + x = 15x - 1$ שאינה שקולה למשוואה המקורית.

עבודה עם ביטויים אלגבריים ומשוואות בעלי מכנים מעלה קשיים כאלה ואחרים אשר מפריעים לתלמידים במהלך לימודי המתמטיקה בשלבים השונים.

התיק **זהויות מתמטיות: ביטויים ומשוואות עם מכנים מספריים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימות ההערכה:
- משימה 1 [משוואות שקולות](#).
- משימה 2 [ביטויים זהים](#).
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1 משוואות שקולות.

❖ משימה 2 ביטויים זהים.

במשימה 1 **משוואות שקולות** התלמידים נדרשים למצוא משוואות שקולות למשוואה נתונה עם מכנים מספריים.

במשימה 2 **ביטויים זהים** התלמידים נדרשים למצוא ביטויים אלגבריים זהים לביטוי נתון עם מכנים מספריים.



משימה 1: משוואות שקולות

משימה 1: משוואות שקולות

הקיפו בכל סעיף משוואה שקולה למשוואה שבמסגרת.

אין צורך לפתור את המשוואות.

1.

$$\frac{x}{2} + \frac{4x}{3} = 1$$

א. $3x + 8x = 1$

ב. $x + 4x = 6$

א. $\frac{3x}{6} + \frac{8x}{6} = 1$

2.

$$\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}$$

א. $\frac{2x}{6} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6}$

ב. $2x - 30 = 3$

א. $2x - 5 = 3$

3.

$$\frac{1}{2}x^2 - 8x = 40$$

א. $\frac{x^2 - 8x}{2} = 40$

ב. $x^2 - 16x = 80$

א. $x^2 - 8x = 40$

4.

$$x^2 + \frac{3x}{5} = 6$$

א. $\frac{5x^2}{5} + \frac{3x}{5} = \frac{30}{5}$

ב. $x^2 + 3x = 6$

א. $5x^2 + 15x = 30$

[למשימה 1 מונגשת](#)



משימה 2: ביטויים זהים

משימה 2: ביטויים זהים

הקיפו בכל סעיף ביטוי זהה לביטוי שבמסגרת.

1.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5}$$

ג. $5x + 3x$

ג.

ב. $\frac{5x}{3} + \frac{3x}{5}$

ב.

א. $\frac{5x + 3x}{15}$

א.

2.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$$

ג. $5x + 2$

ג.

ב. $\frac{2}{10}x + \frac{5}{10}$

ב.

א. $2x + 5$

א.

3.

$$\frac{2x^2}{3} - 1 + x$$

ג. $\frac{2x^2 - 3 + 3x}{3}$

ג.

ב. $2x^2 - 3 + 3x$

ב.

א. $\frac{2x^2 - 1 + x}{3}$

א.

4.

$$\frac{3}{4}x^2 - 1$$

ג. $\frac{3x^2 - 4}{4}$

ג.

ב. $3x^2 - 4$

ב.

א. $3x^2 - 1$

א.

[למשימה 2 מונגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	טעו במציאת משוואה שקולה	טעו במציאת ביטוי אלגברי זהה	הערות
תלמיד/ה 1	✓			
תלמיד/ה 2		✓	✓	
תלמיד/ה 3			✓	
סה"כ				

לצורך בדיקת תוצרי ההערכה ניתן להיעזר בפתרונות המשימות, להלן.

פתרון משימה 1: משוואות שקולות

התשובות הנכונות: (1) א (2) ב (3) ב (4) ג

פתרון משימה 2: ביטויים זהים

התשובות הנכונות: (1) א (2) ב (3) ג (4) ג

פעילות בעקבות ההערכה

מוצעת פעילות בעקבות ההערכה, שמטרתה לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.



פעילות: ביטויים אלגבריים ומשוואות עם מכנים מספריים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות חלק א': **אוהד פותר משוואות.**
2. דיון.
3. עבודה על דף פעילות חלק ב': **אוהד מפשט ביטויים.**
4. דיון.
5. עבודה על דף פעילות חלק ג': **משוואה או ביטוי.**
6. דיון מסכם.

פעילות חלק א': אוהד פותר משוואות

לפניכם שיעורי בית שקיבל אוהד.

פתרו את המשוואות הבאות.

$$1. \quad \frac{x^2}{3} = 2x \quad 2. \quad \frac{1}{4}x^2 - 3 = 6$$

א. אוהד פתר את המשוואות. אחד מהפתרונות שלו שגוי. קבעו לכל פתרון אם הוא נכון או לא נכון.

הפתרונות של אוהד:

1.	$\frac{x^2}{3} = 2x$	2.	$\frac{1}{4}x^2 - 3 = 6$
	כדי לבטל את המכנה, כפלתי 3-2 את המשוואה:		כדי לבטל את המכנה, כפלתי 4-2 את המשוואה:
	$\frac{x^2}{3} = 2x \quad / \cdot 3$		$\frac{1}{4}x^2 - 3 = 6 \quad / \cdot 4$
	$x^2 = 6x$		$x^2 - 3 = 6 \quad / +3$
	$x^2 - 6x = 0$		$x^2 = 9$
	$x(x-6) = 0$		$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$
	$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$		

קבעו: נכון/לא נכון

קבעו: נכון/לא נכון

ב. כתבו פתרון משלכם במקום הפתרון השגוי.

[לפעילות חלק א' מוגשת.](#)

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הטעות המופיעה בפתרון המשוואות בשיעורי הבית של אוהד, ומקור הטעות. מהו הפתרון הנכון?
- ❖ מהן הפעולות המותרות לעבודה בפתרון משוואה עם מכנים? על אילו כללים צריך להקפיד?

פעילות חלק ב': אוהד מפשט ביטויים

לפניכם שיעורי בית שקיבל אוהד.

פשטו את הביטויים הבאים.

$$1. \quad \frac{x(x-2)}{2} + x \quad 2. \quad \frac{1}{5}x(x-10) + 3x$$

א. אוהד פישט את הביטויים. הוא שגה בפישוט של אחד מהביטויים.

קבעו בכל מקרה אם הפישוט נכון או לא נכון.

הפתרונות של אוהד:

$2. \quad \frac{1}{5}x(x-10) + 3x$ פישטתי על-ידי פתיחת הסוגריים: $\frac{1}{5}x^2 - 2x + 3x =$ $\frac{1}{5}x^2 + x$	$1. \quad \frac{x(x-2)}{2} + x$ כפלתי 2-2 את הביטוי כדי לבטל את המכנה: $\frac{x(x-2)}{2} + x = / 2$ $x(x-2) + 2x =$ $x^2 - 2x + 2x =$ x^2
---	--

קבעו: נכון/לא נכון

קבעו: נכון/לא נכון

ב. כתבו פתרון משלכם במקום הפתרון השגוי.

[לפעילות חלק ב' מוגשת](#)

דיון

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ הטעות המופיעה בפישוט הביטויים האלגבריים בשיעורי הבית של אוהד, ומקור הטעות. מהו הפישוט הנכון?
- ❖ מהן הפעולות המותרות בפישוט ביטויים אלגבריים עם מכנים?
- ❖ מה משותף ומה שונה בין פישוט הביטויים בדף פעילות זה ובין פתרון המשוואות בדף הפעילות חלק א'?

פעילות חלק ג': משוואה או ביטוי

1. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$	ב. $\frac{x^2}{4} - x = 0$	ג. $\frac{x^2}{4} - x = 3$

2. פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$	ב. $\frac{x^2}{4} + x^2$	ג. $x^2 - \frac{x^2}{2} + 3$

[לפעילות חלק ג' מוגשת](#)

דיון מסכם

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

❖ הפעולות המותרות לביצוע בכל אחת מהמטלות הבאות.

א. פשטו את הביטוי:

$$\frac{1}{8}x^2 + x - \frac{1}{2}x$$

ב. פתרו את המשוואה:

$$\frac{1}{8}x^2 + x - \frac{1}{2}x = 0$$

❖ אפשר למיין את הפעולות לשלוש קבוצות:

- פעולות המותרות לביצוע על ביטויים אלגבריים עם מכנים. (הצבת מספר במקום המשתנה לקבלת תוצאת ההצבה, פישוט, מציאת מכנה משותף.)
- פעולות המותרות לביצוע על משוואות עם מכנים. (מציאת פתרון, הצבת מספר במקום המשתנה לצורך בדיקת פתרון, פישוט כל אחד מאגפי המשוואה, מציאת מכנה משותף, חיבור או כפל שני האגפים במספר או בביטוי שונה מאפס.)
- פעולות המותרות לביצוע על ביטויים אלגבריים וגם על משוואות, עם מכנים. (פישוט, הצבה, מציאת מכנה משותף. הפעולות על ביטויים ועל משוואות עם מכנים יכולות לפעמים להיות אותן פעולות עם מטרה שונה – למשל: מציאת מכנה משותף בביטויים היא פעולה שנועדה "לארגן" את הביטוי לצורך פישוט. מציאת מכנה משותף במשוואות היא שלב בפתרון המשוואה לפני כפל שני אגפי המשוואה במכנה המשותף לצורך מציאת הפתרון.)