



# תיק משימטיקה

## קצב השתנות של תופעה

להגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

© כל הזכויות שמורות

## תוכן העניינים

|    |                                     |
|----|-------------------------------------|
| 2  | תוכן העניינים                       |
| 3  | מטרות התיק                          |
| 3  | זמני עבודה משוערים                  |
| 3  | החומרים והעזרים הדרושים             |
| 4  | רקע                                 |
| 4  | הצעה למהלך העבודה                   |
| 5  | עבודה על משימות ההערכה              |
| 6  | משימה 1 גרף לכלי ולהפך (טור א)      |
| 6  | משימה 1 גרף לכלי ולהפך (טור ב)      |
| 7  | משימה 2 מהו הגרף המתאים? (טור א)    |
| 7  | משימה 2 מהו הגרף המתאים? (טור ב)    |
| 8  | הערכת תוצרי התלמידים                |
| 10 | פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה |
| 10 | פעילות 1                            |
| 11 | דף פעילות 1 המסע                    |
| 13 | פעילות 2                            |
| 14 | דף פעילות 2 מהו הקצב?               |

# קצב השתנות של תופעה



## מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים בין תופעה דינאמית מחיי היום-יום בעלת מאפיינים ויזואליים, לסקיצה של גרף המתאר קצב שינוי של פונקציה, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להבחין בין גרף המקשר בין משתנים בתופעה ויזואלית, לבין תמונת התופעה עצמה.
- לזהות קצב שינוי של תופעה.
- לקשר בין קצב שינוי של תופעה לגרף שלה.



## זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 45 דקות.



## החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות

○ משימה 1 [גרף לכלי ולהפך](#).

○ משימה 2 [מהו הגרף המתאים?](#)

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

### לפעילות 1

- דף פעילות 1 [המסע](#).

### לפעילות 2

• דף פעילות 2 [מהו הקצב?](#)

- יישומוני גאוגברה:

○ [צובעים מלבן](#)

○ [צובעים משולש 1](#)

○ [צובעים משולש 2](#)



## רקע

אחד הדגשים בלימוד האנליזה הוא העמקת ההבנה של מושג הפונקציה ופיתוח "חוש לפונקציות", כלומר, זיהוי וניתוח פונקציות באופן איכותני. אחד המושגים הבסיסיים בהבנה של מושג הפונקציה הוא קצב ההשתנות שלה. מושג זה מלווה את התלמידים במשך כל שנות הלימודים בתיכון באמצעות הנגזרת ככלי לניתוח גרף הפונקציה. קישור בין קצב השתנות של תופעה לגרף מאפשר שרטוט גרף איכותני בעבור תופעה דינאמית. יכולת זו חשובה, למשל, להבנת הדינאמיות בבעיות קיצון.

ידועים מספר קשיים בקרב תלמידים בנושא זה. קושי נפוץ קשור בבלבול שבין הגרף המתאר את ההשתנות לבין התמונה הקשורה בתופעה. תלמידים נוטים לצפות שצורת הגרף תהיה דומה לצורת התמונה. למשל, בתופעה של מילוי כלים ישנם תלמידים המצפים שהגרף המתאר את גובה המים בכלי יהיה דומה לצורת הכלי. קושי נוסף טמון במושג קצב ההשתנות. זהו מושג מורכב השייך גם לתופעה וגם לגרף. הקושי נובע מריבוי המקרים השונים שיש להבחין ביניהם: קצב אחיד וקצב משתנה, קצב שהולך וגדל, קצב שהולך וקטן וקצב שמשתנה ממצב אחד לאחר. בנוסף לעתים התופעה מזמנת קשיים יחודיים לה, הגורמים לקושי בזיהוי קצב ההשתנות של התופעה. למשל, בתופעה של מילוי כלים קיימת אינטואיציה לפיה ככל שהכלי רחב יותר, גובה המים עולה מהר יותר. זוהי אינטואיציה מוכרת בתחומים רבים במתמטיקה.

התיק **קצב השתנות של תופעה** מסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה
  - משימה 1 [גרף לכלי ולהפך](#).
  - משימה 2 [מיהו הגרף המתאים?](#)
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.



## עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1 **גרף לכלי ולהפך**
- משימה 2 **מיהו הגרף המתאים?**

בכל אחת משתי המשימות מתוארת תופעה מן המציאות ונתונים ארבעה גרפים. על התלמידים לבחור את הגרף המתאים לתופעה. בנוסף במשימה הראשונה התלמידים נדרשים לבצע פעולה הפוכה, כלומר, ליצור תופעה עבור גרף.

כל אחת משתי המשימות מוצגת בשתי גרסאות (שני טורים), באופן שאינו מכביד על ההערכה של תוצרי התלמידים. שתי המשימות מיועדות לעבודה עצמית של תלמידים. מומלץ לבצע תחילה משימה אחת ולאחר איסוף הדפים לבצע את המשימה האחרת.

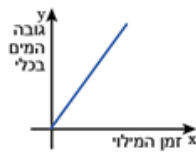
### משימה 1 גרף לכלי ולהפך (טור א)



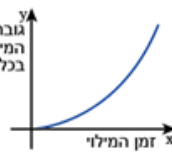
כאשר הכלי שלפניכם ריק, ממלאים אותו במים בקצב קבוע. ארבע בנות שרטטו גרפים המתארים, לדעתן, את גובה המים בכלי (y) כפונקציה של זמן המילוי שלו (x).

א. רשמו (מתחת לכלי) את שם הבת ששרטטה את הגרף הנכון.

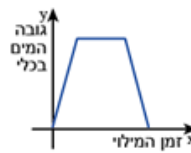
הגרף של גילה



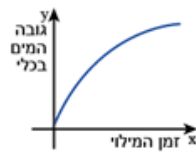
הגרף של אורית



הגרף של בתיה



הגרף של דליה



ב. בחרו אחד מהגרפים שלא התאמתם לכלי – קבעו אם קיים כלי אחר שהגרף יכול לתאר אותו. אם כן, ציירו את הכלי. אם לא, נמקו.

### משימה 1 – גרף לכלי ולהפך (טור ב)



כאשר הכלי שלפניכם ריק, ממלאים אותו במים בקצב קבוע. ארבע בנות שרטטו גרפים המתארים, לדעתן, את גובה המים בכלי (y) כפונקציה של זמן המילוי שלו (x).

א. רשמו (מתחת לכלי) את שם הבת ששרטטה את הגרף הנכון.

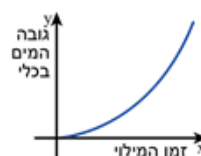
הגרף של בינה



הגרף של דינה



הגרף של אלישבע



הגרף של גבריאלה



ב. בחרו אחד מהגרפים שלא התאמתם לכלי – קבעו אם קיים כלי אחר שהגרף יכול לתאר אותו. אם כן, ציירו את הכלי. אם לא, נמקו.

## משימה 2 מהו הגרף המתאים? (טור א)

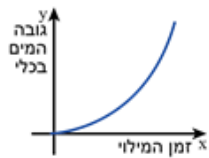


כאשר הכלי שלפניכם ריק, ממלאים אותו במים בקצב קבוע.

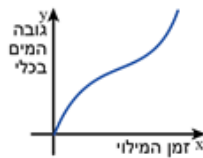
ארבע בנות שרטטו גרפים המתארים, לדעתן, את גובה המים בכלי (y) כפונקציה של זמן המילוי שלו (x).

רשמו (מתחת לכלי) את שם הבת ששרטטה את הגרף הנכון.

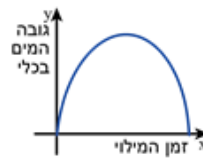
הגרף של ג'ודי



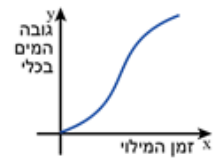
הגרף של אביבה



הגרף של ברוריה



הגרף של דורית



## משימה 2 מהו הגרף המתאים? (טור ב)

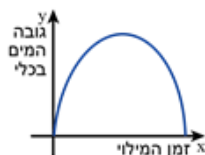


כאשר הכלי שלפניכם ריק, ממלאים אותו במים בקצב קבוע.

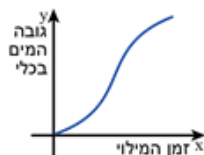
ארבע בנות שרטטו גרפים המתארים, לדעתן, את גובה המים בכלי (y) כפונקציה של זמן המילוי שלו (x).

רשמו (מתחת לכלי) את שם הבת ששרטטה את הגרף הנכון.

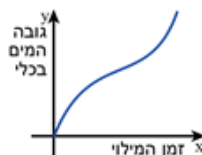
הגרף של בת-שבע



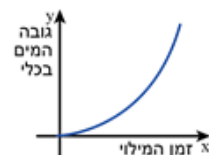
הגרף של דיקלה



הגרף של אדוה



הגרף של גלית





## הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

| משימה 2<br>מהו הגרף המתאים?            |  |                                     | משימה 1 גרף לכלי ולהפך                                 |                                 |   |  |  |                                     | שם התלמיד/ה             |
|--|--|-------------------------------------|--|---------------------------------|---|--|--|-------------------------------------|-------------------------|
|  |  |                                     | סעיף ב   |                                 |   | סעיף א                                 |  |                                     |                         |
| לא נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות ד | לא נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות ב<br>או ג | נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות א | לא נכון<br>בחרו גרף<br>מתאים<br>וציירו כלי לא<br>מתאים | לא נכון<br>בחרו גרף<br>לא מתאים | נכון<br>בחרו גרף<br>מתאים<br>וציירו לו כלי<br>מתאים | לא נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות ד | לא נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות ב<br>או ג | נכון<br>רשמו שם<br>שמתחיל<br>באות א |                         |
|  |  | v                                   |  |                                 | v   |  |  | v                                   | <a href="#">תלמיד 1</a> |
| v                                      |  |                                     |  |                                 | v   |  |  | v                                   | <a href="#">תלמיד 2</a> |
|  |  | v                                   | v  |                                 |   |  | v  |                                     | <a href="#">תלמיד 3</a> |
|  |  |                                     |  |                                 |   |  |  |                                     |                         |
|  |  |                                     |  |                                 |   |  |  |                                     | סך-הכל                  |

הטבלה מחולקת לשלוש שלשות של עמודות בהתאם למשימות.

**בעמודה האמצעית** בכל שלשה מסומנים תלמידים ששגו ובחרו צורת גרף דומה לצורת הכלי.

**בעמודה השמאלית** בכל שלשה מסומנים תלמידים שהתקשו בזיהוי קצב השינוי של התופעה או בהבנת השאלה.



## לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן.

### פתרון משימה 1 גרף לכלי ולהפך

א. הגרף הנכון הוא של בנות ששמן מתחיל באות א. הכלי הולך וצר, ולכן קצב עליית הגובה הולך וגדל (פונקציה קעורה כלפי מעלה).

ב. לא קיים כלי המתאר את הגרף של בנות ששמן מתחיל באות ב. מספר נימוקים אפשריים:

– גובה המים לפי הגרף מגיע שוב לערך אפס כלומר הכלי מתרוקן.

– משמעות הירידה בגרף היא ירידה בגובה המים.

– משמעות הקטע המקביל לציר ה- $x$  היא הפסקה במילוי המים לפרק זמן מסוים.

– במשימה נאמר שהכלי מתמלא בקצב קבוע כך שלא ייתכן שהגובה יורד או מגיע ל- $0$ . בנוסף הכלי אינו מפסיק להתמלא בפרק זמן מסוים.

לגרף של בנות ששמן מתחיל באות ג מתאים למשל הכלי  וכן כל כלי ששטח חתך הרוחב שלו קבוע כמו מנסרה.

לגרף של בנות ששמן מתחיל באות ד מתאים למשל הכלי  וכן כל כלי שמתרחב באופן אחיד, כמו פירמידה קטומה "הפוכה".

### פתרון משימה 2 מהו הגרף המתאים?

הגרף הנכון הוא של בנות ששמן מתחיל באות א, כי בתחילה הכלי הולך ומתרחב ולכן קצב עליית הגובה הולך וקטן (פונקציה קעורה כלפי מטה), ואח"כ הכלי הולך וצר, וקצב עליית הגובה הולך וגדל (פונקציה קעורה כלפי מעלה).



## פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצגות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

| פעילות 2 | פעילות 1 | למי מיועדת הפעילות?   |
|----------|----------|---|
| V        | V        | לתלמידים שזיהו גרף עם תמונת התופעה (מסומנים בטבלת ההערכה באפור בהיר)                                |
| V        |          | לתלמידים שהתקשו בזיהוי הקשר בין קצב השינוי בתופעה לקצב השינוי בגרף (מסומנים בטבלת ההערכה באפור כהה) |

### פעילות 1

פעילות זו מיועדת לתלמידים שהתייחסו אל הגרף כאל תמונת התופעה הוויזואלית המתוארת בבעיה במקום כקשר בין שני משתנים.

#### שלבי הפעילות

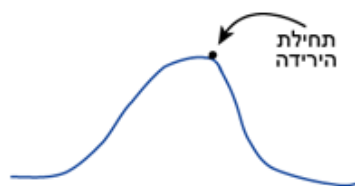
- עבודה על דף פעילות 1 **המסע**.
- דיון.

#### מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 **המסע**

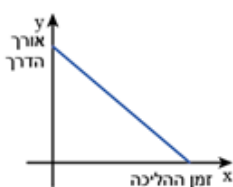
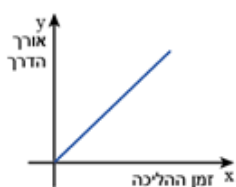
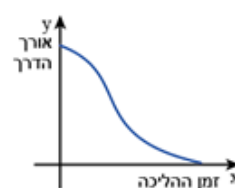
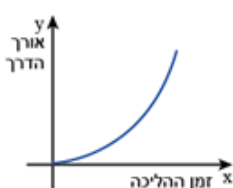
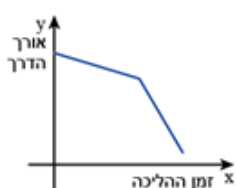
בדף הפעילות מוצג "סיפור" מתפתח (שמוצגת בו תמונת גבעה) המספק מספר קשרים בין משתנים: קשר בין זמן לבין אורך הדרך, קשר בין זמן לבין מהירות ההליכה, וקשר בין זמן לבין הגובה מתחתית הגבעה. מטרת הפעילות היא להמחיש שכל גרף מתאר קשר אחד בין משתנים בבעיה, ואותו בלבד, ואין לצורת הגרף קשר עם תמונת הגבעה המוצגת בבעיה.

## המסע



תלמידי הכיתה יצאו למסע. הם הגיעו לראש גבעה והתחילו לרדת ממנה. בתחילה הייתה הירידה תלולה מאוד, ולכן הלכו לאט. בהמשך הייתה הירידה מתונה יותר, ולכן הלכו מהר.

1. איזה מן הגרפים מתאר באופן הטוב ביותר את הקשר בין **זמן ההליכה בירידה** מהגבעה לבין **אורך הדרך שהלכו בירידה?**

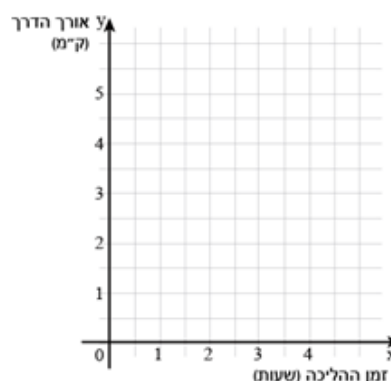


א. הסבירו מדוע בחרתם בגרף זה.

ב. הסבירו ליד כל גרף אחר מדוע אינו מתאר את הקשר בין זמן ההליכה בירידה לבין אורך הדרך שהלכו בירידה?

2. נניח שהתלמידים הלכו במשך 4 שעות. נניח כי בתחילת הירידה הלכו התלמידים לאט בקצב קבוע של 0.5 קמ"ש, במשך שעתיים, ובהמשך הלכו מהר יותר בקצב קבוע של 2 קמ"ש במשך שעתיים נוספות.  
א. הכינסו טבלה ושרטטו גרף המתאר את הקשר בין הזמן שהלכו לבין אורך הדרך שהלכו.

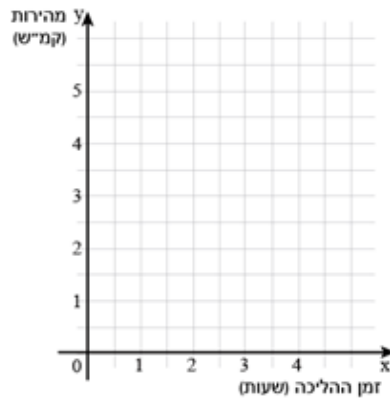
| זמן ההליכה (שעות) | אורך הדרך (ק"מ) |
|-------------------|-----------------|
|                   |                 |
|                   |                 |
|                   |                 |
|                   |                 |
|                   |                 |
|                   |                 |



ב. השוו את הגרף ששרטטתם לגרף שבחרתם בבעייה 1.

ג. הכינו טבלה ושרטטו את גרף הקשר בין הזמן שהלכו לבין מהירותם באותו זמן.

| מהירות<br>(קמ"ש) | זמן ההליכה<br>(שעות) |
|------------------|----------------------|
|                  |                      |
|                  |                      |
|                  |                      |
|                  |                      |
|                  |                      |
|                  |                      |
|                  |                      |



ד. בכל רגע נתון היו התלמידים בגובה מסוים מתחתית הגבעה. איזה מן הגרפים משאלה 1 מתאר באופן הטוב ביותר את הקשר בין **זמן ההליכה של התלמידים בירידה מהגבעה לבין גובהם מתחתית הגבעה?**

#### • דיון

מומלץ למקד את הדיון בעובדה שסיפור יכול לספק קשרים שונים בין משתנים, בעוד שגרף מתאר **קשר אחד בין משתנים**, ואותו בלבד. הגרף אינו מתאר תמונה המוצגת בסיפור. כדאי להתייחס לנקודות הבאות.

- הגרף של הקשר בין זמן הצעידה לאורך הדרך, **עולה** למרות שהתלמידים **יורדים**.
  - הסיפור מספק מספר קשרים:
  - הקשר בין זמן הצעידה לאורך הדרך שהלכו,
  - הקשר בין זמן הצעידה למהירות הצעידה,
  - הקשר בין זמן הצעידה לגובה מקומם מתחתית הגבעה.
- ולכל קשר כזה מתאים גרף אחר.

פעילות זו מיועדת לתלמידים שלא זיהו את קצב השינוי בתופעה, ובמיוחד את הקשר בינו לבין קצב השינוי של הגרף המתאר את התופעה. (תלמידים שהתייחסו לגרף כאל תמונה כשפתרו את המשימה, לא נחשפו לצורך לזהות את קצב השינוי בתופעה, לכן מומלץ שגם הם ישתתפו בפעילות זו).  
 התלמידים נדרשים לשער כיצד קצב שינוי של תופעות פשוטות או מורכבות מתבטא בגרף. שימוש ביישומון מאפשר להם לבדוק חלק מהשערותיהם. הבדיקה והתיקון המידיים מאפשרים שיפור בביצועים בהמשך.

### שלבי הפעילות

- שיגור.
  - עבודה על דף פעילות 2 מהו הקצב?
- מלווה ביישומונים: צובעים מלבן, צובעים משולש 1, צובעים משולש 2.

### מהלך הפעילות

#### שיגור

השיגור הוא הקדמה לדף הפעילות. מטרת השיגור לפרק לחלקים פשוטים את המורכבות של שרטוט סקיצה של גרף המקשר בין משתנים בתופעה ויזואלית.  
 בשיגור מבררים אם התלמידים מזהים:

- קצב גידול **קבוע** בתופעה ובגרף.
- קצב גידול **משתנה** בתופעה פשוטה ובגרף (למשל, ככל ש- $x$  גדל,  $y$  גדל יותר ויותר מהר).
- קצב גידול **משתנה** בתופעה מורכבת (שבה קצב ההשתנות הוא בניגוד לאינטואיציה או "מתהפך" – לגרף יש נקודת פיתול). ניתן לעשות זאת באמצעות משימות ההערכה.

#### עבודה על דף פעילות 2 מהו הקצב?

בדף הפעילות התלמידים נדרשים לנסח במילים קשרים בין משתנים בתופעות שונות המתוארות באופן מילולי, ולשרטט סקיצה של גרף לכל קשר. לאחר מכן על התלמידים לשער ולשרטט סקיצות של גרפים המתארים קשרים בתופעות שונות שהם בעצמם יוצרים ביישומונים באופן ויזואלי. הצגת הקשר בניסוח מילולי עשויה לעזור להם בשרטוט הגרף.

## מהו הקצב?

1. הקיפו בעיגול את המילים הנכונות להשלמת המשפטים ושרטטו סקיצה של גרף המתאר את הקשר בכל סעיף.



א. כאשר ממלאים כלי בקצב קבוע, ככל שעובר הזמן  
**כמות המים בכלי גדלה בקצב הולך וגדל / הולך וקטן / קבוע.**

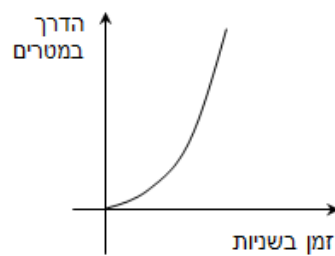


ב. כאשר ממלאים כלי **הולך וצר** במים בקצב קבוע,  
ככל שעובר הזמן, **גובה המים** עולה בקצב **הולך וגדל / הולך וקטן / קבוע.**



ג. תלמיד נוסע באופניים לביה"ס.  
בתחילת הדרך יש ירידה ואחר כך יש עלייה.  
ככל שהזמן עובר, קצב הנסיעה **הולך וגדל / הולך וקטן / קבוע.**

2. בחרו את התופעה המתוארת על-ידי הגרף הבא:



- א. זורקים כדור כלפי מעלה
- ב. מפילים כדור מגובה
- ג. זורקים כדור באלכסון.

שרטטו גרף לאחת התופעות שלא בחרתם.



3. בכל אחד מן היישומים הבאים יש צורה המתמלאת בצבע. הפעילו כל יישומון ופעלו על-פי ההוראות שבדף.

**היישומון: צובעים מלבן**

לפניכם מלבן ABCD שחלקו (מלבן ABEF) צבוע.

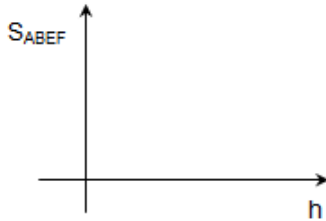
א. גררו את E ותארו במילים איך משתנה השטח הצבוע ככל שאורך הקטע h (גובה המלבן) גדל.

ב. שרטטו גרף משוער של השתנות השטח.

ג. בדקו את השערתכם:

סמנו ביישומון את תיבת "הצג גרף".

גררו את E והגרף יצטייר. השוו עם הגרף ששרטטתם.



**היישומון: צובעים משולש 1**

לפניכם משולש ABC שחלקו (משולש ADE) צבוע.

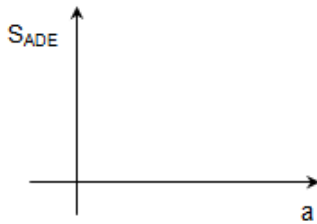
א. גררו את D ותארו במילים איך משתנה השטח הצבוע ככל שאורך הקטע a גדל.

ב. שרטטו גרף משוער של השתנות השטח על-פי הצלע a.

ג. בדקו את השערתכם:

הציגו ביישומון את "גרף השטח".

גררו את D והגרף יצטייר. השוו עם הגרף ששרטטתם.



**היישומון: צובעים משולש 2**

לפניכם משולש ABD שחלקו (טרפז ABEF) צבוע.

א. גררו את E ותארו במילים איך משתנה השטח הצבוע כשגובה הטרפז h גדל.

ב. שרטטו גרף משוער של השתנות השטח.

ג. בדקו את השערתכם.

הציגו ביישומון את הגרף.

גררו את E והגרף יצטייר. השוו עם הגרף ששרטטתם.

