תיק משימטיקה

הנחות המבוססות על שרטוט –
דמיון משולשים

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

מטרות התיק 3
זמני עבודה משוערים 3
החומרים והעזרים הדרושים 3
רקע 4
הצעה למהלך העבודה 4
עבודה על משימות ההערכה 5
האם דומים? האם חופפים? 6
הערכת תוצרי התלמידים 7
פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה 9
פעילות 1 9
פעילות 2 10
דף פעילות **הפתרון של דניאל** 10
דף פעילות **משרטטים ומוכיחים** 12

הנחות המבוססות על שרטוט – דמיון משולשים

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להסתמך במהלך הוכחה של בעיה בגיאומטריה רק על נתונים ועל משפטים ידועים, ולא להסיק תכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד. התיק עוסק בדמיון משולשים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ליצור שרטוט הנמצא בהלימה עם נתוני הבעיה.
- ליצור שרטוט הנמצא בהלימה עם נתוני הבעיה ואינו כולל מאפיינים התקפים רק במקרים מסוימים.
- להסיק מסקנות על סמך נתונים ומשפטים, ללא שימוש בתכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: 30-45 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 60 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימות ***האם דומים? האם חופפים?***

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה:

לפעילות 1

- יישומונים לתרגול מושג הגובה במשולש:
  - ***גובה במשולש***
  - ***שניים או שלושה גבהים במשולש***

לפעילות 2

- דף להקרנה ויישומון ***בדיקת טענתו של דניאל***.
- דף הפעילות ***משרטטים ומוכיחים*** (לכל תלמיד/ה).
- יישומונים לבדיקת דף הפעילות
  - ***משרטטים ומוכיחים 1***
  - ***משרטטים ומוכיחים 2***

רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. במהלך ההוכחה יש צורך במקרים רבים להוסיף קווים לשרטוטים המצורפים לבעיות או לשרטט שרטוט המתאים לנתוני הבעיה. קושי נפוץ הכרוך בכך הוא יצירת שרטוטים שאינם נמצאים בהלימה עם נתוני הבעיה. למשל, שרטוט של ״גובה״ **בתוך** משולש שנתון שהוא קהה זווית כשנתוני הבעיה מחייבים שהגובה יעבור מחוץ למשולש. קושי נפוץ אחר הוא יצירת שרטוטים הכוללים מאפיינים אשר תקפים רק במקרים מסוימים. למשל, כשבבעיה נתון משולש שווה-שוקיים ישנם תלמידים המשרטטים משולש שווה-צלעות ומסיקים על סמך השרטוט מאפיינים שאינם תקפים במקרה הכללי של משולש שווה-שוקיים. שרטוטים שלא נמצאים בהלימה עם נתוני הבעיה או שכוללים מאפיינים התקפים רק במקרים מסוימים, עלולים לגרום לתלמידים להניח הנחות המבוססות על מראה השרטוט ולהסיק מסקנות לא תקפות במהלך ההוכחה.

הנושא דמיון משולשים הוא נושא מרכזי בתכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק ***הנחות המבוססות על שרטוט – דמיון משולשים*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולהציע להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה ***האם דומים? האם חופפים?***
  - משימה 1
  - משימה 2
  - משימה 3
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה ***האם דומים? האם חופפים?***

המשימות מיועדות לעבודה עצמית של התלמידים ומומלץ לבצע אותן ברצף זו אחר זו.

במשימה 1 התלמידים נדרשים לשרטט גובה לשוק במשולש שהוא שווה-שוקיים וקהה-זווית ואז להסיק ולהוכיח שמתקבלים משולשים דומים. במקרה זה עֶקב**-**הגובה נמצא על המשך השוק מחוץ למשולש. הנחה מוטעית שלפיה הגובה במשולש נמצא תמיד בתוך המשולש, עלולה לגרום לשרטוט משולש בלתי אפשרי שיש בו זווית קהה וזווית ישרה וכתוצאה מכך להסיק מסקנה מוטעית שלפיה המשולשים אינם דומים.

במשימה 2 התלמידים נדרשים לשרטט בעצמם משולש ישר-זווית וגובה ליתר. אחר כך עליהם לקבוע שלא ניתן להסיק על סמך הנתונים שמתקבלים משולשים חופפים, ולהוכיח שמתקבלים משולשים דומים. שרטוט שבו המשולש ישר-הזווית הוא גם שווה-שוקיים עלול להביא למסקנות שאינן נכונות: תלמידים עלולים להסיק שמתקבלים משולשים חופפים ולהוכיח דמיון של משולשים בהתאמת קודקודים שאינה נכונה.

במשימה 3 התלמידים נדרשים להשלים שרטוט לפי הוראות ואז לקבוע שלא ניתן להסיק על-סמך הנתונים שמתקבלים משולשים חופפים, ולבסוף להוכיח שמתקבלים משולשים דומים. שרטוט המכיל תכונה שאינה נתונה עלול להביא למסקנות שאינן נכונות: תלמידים עלולים להסיק שמתקבלים משולשים חופפים ולהוכיח דמיון עם התאמת זוויות שאינה נכונה.

האם דומים? האם חופפים?

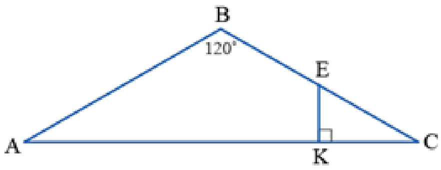
1. נתון: ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים

$\sphericalangle ABC = 120^\circ$

E נקודה על השוק BC ו- $EK \perp AC$

א. שרטטו גובה AD לשוק CB.

ב. האם $\Delta CKE \sim \Delta ADB$? נמקו.



2. נתון: ΔABC הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle A = 90^\circ)$

AD גובה ליתר. שרטטו וענו.

א. האם קיימים לפי הנתונים **משולשים חופפים**?

סמנו: ☐ כן ☐ לא **ונמקו.**

ב. האם קיימים לפי הנתונים **משולשים דומים**?

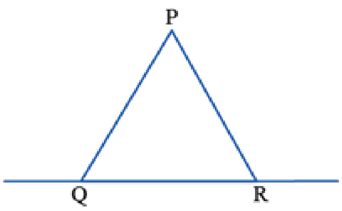
סמנו: ☐ כן ☐ לא **ונמקו.**

3. משולש PQR הוא משולש שווה-צלעות.

סמנו נקודה A על המשך RQ משמאל לנקודה Q.

סמנו נקודה B על המשך QR מימין לנקודה R כך ש- $\sphericalangle APB=120^\circ$.

חברו בקטעים את P עם A ועם B.



א. האם קיימים לפי הנתונים **משולשים חופפים**?

סמנו: ☐ כן ☐ לא **ונמקו.**

ב. האם קיימים לפי הנתונים **משולשים דומים**?

סמנו: ☐ כן ☐ לא **ונמקו.**

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	**האם דומים? האם חופפים?**								
	משימה 1			משימה 2			משימה 3		
	שרטטו גובה בתוך המשולש	**שרטטו גובה מחוץ למשולש**	**הוכיחו**	**הוכיחו חפיפה או דמיון בהתאמה שאינה נובעת מהנתונים.**	**פתרו נכון**	**אחר**	**הוכיחו חפיפה או דמיון בהתאמה שאינה נובעת מהנתונים.**	**פתרו נכון**	**אחר**
תלמיד 1		V	V		V			V	
תלמיד 2		V	V	V					V
תלמיד 3		V	V			V	V		
תלמיד 4		V			V				
סה"כ									

במשימה 1 ייתכן שתלמידים שרטטו גובה מחוץ למשולש אבל לא הצליחו להוכיח. כדי לאפשר למורים לזהות תלמידים אלה מופיע הטור השלישי.

במשימות 2 ו- 3 ייתכן שהיו תלמידים ששרטטו שרטוט המציג תכונות שאינן נתונות (למשל, במשימה 2 שרטטו משולש שווה-שוקיים או במשימה 3 סמנו נקודות A ו- B כך ש $RB = QA$), אך הסיקו מסקנות על פי **הנתונים בלבד** והוכיחו כדרוש. תלמידים אלה לא הניחו הנחות שגויות הקשורות לשרטוט ולכן אינם מסומנים בטור צבוע ואינם זקוקים לטיפול בעקבות ההערכה.

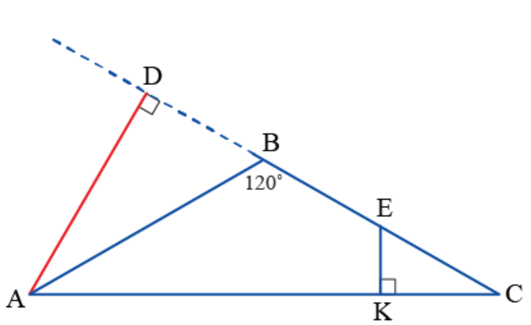
לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

האם דומים? האם חופפים?

פתרון משימה 1

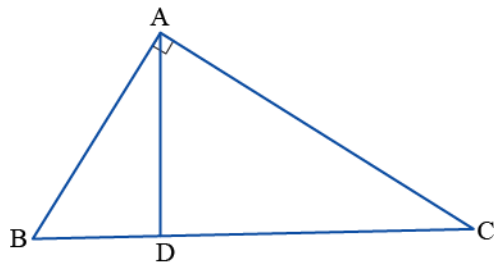
$\Delta ADB \sim \Delta CKE$ לפי ז.ז.

(בכל אחד מהמשולשים יש זווית ישרה וזווית של $30°$)



האם דומים? האם חופפים?

פתרון משימה 2

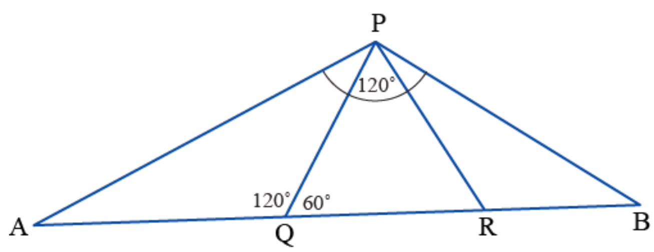


א. אין להסיק חפיפה של משולשים.

ב. למעשה שלושת המשולשים דומים זה לזה.
התאמת הדמיון (בהתאם לזוויות השוות) היא:
$\Delta ADB \sim \Delta CAB \sim \Delta CDA$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)
לא נדרש בבעיה לקבוע כמה משולשים דומים קיימים, ולכן מספיק להוכיח דמיון של זוג אחד.
למשל, להוכיח: $\Delta CAB \sim \Delta CDA$. משולשים אלה דומים כי בכל אחד מהם יש זווית ישרה, וכן יש להם זווית משותפת $\sphericalangle C$.
(בדרך דומה אפשר להוכיח ש- $\Delta ADB \sim \Delta CAB$ ולהסיק גם $\Delta ADB \sim \Delta CDA$.)

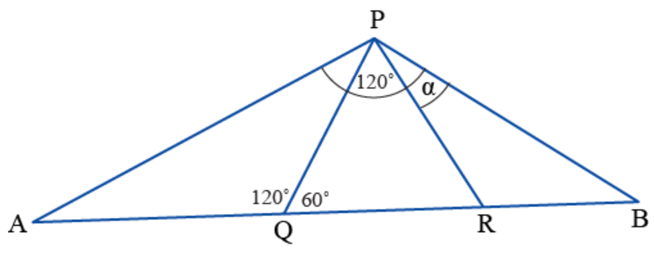
האם דומים? האם חופפים?

פתרון משימה 3



א. אין להסיק חפיפה של משולשים.

ב. לפי הנתונים קיימים משולשים דומים.
גם כאן לא נדרש לקבוע לפי הנתונים כמה משולשים דומים קיימים, ולכן מספיק להוכיח דמיון של זוג אחד.
למשל, להוכיח $\Delta APB \sim \Delta PRB$.
רושמים את הנתונים בשרטוט ומוכיחים:
$\Delta APB \sim \Delta PRB$ (לפי משפט דמיון ז.ז. כי בשני המשולשים יש זווית שגודלה $120°$ וזווית משותפת B).
בדרך דומה אפשר להוכיח כי $\Delta APB \sim \Delta AQP$ ומכאן להסיק כי $\Delta APQ \sim \Delta PBR$.



<u>אפשרות אחרת להוכיח ישירות כי</u> $\Delta APQ \sim \Delta PBR$

נסמן: $\sphericalangle BPR = \alpha$

$\Downarrow$

$\sphericalangle PBR = 180° - 120° - \alpha = 60° - \alpha$ (סכום זוויות במשולש BPR)

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = 180° - 120° - 60^{o} - \alpha = \alpha$ (סכום זוויות במשולש APB)

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = \sphericalangle BPR = \alpha$

$\Downarrow$

$\Delta APQ \sim \Delta PBR$ (משפט דמיון ז.ז.– כי בשני המשולשים יש בנוסף לזווית α גם זווית שגודלה $120°$.)

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצגות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים ששרטטו במשימה 1 גובה בתוך המשולש (מסומנים בעמודה המודגשת בטבלת ההערכה) או לא שרטטו כלל	V	
לתלמידים שהסיקו חפיפה או קבעו דמיון בהתאמה שאינה נובעת מהנתונים במשימות 2 או 3 (מסומנים בעמודות המודגשות בטבלת ההערכה)		V

פעילות 1

פעילות זו מיועדת לתלמידים ששרטטו במשימה 1 גובה בתוך המשולש והיא מתאימה לעבודה עצמית.

שלבי הפעילות

- עבודה עם היישומון ***גובה במשולש***.
- עבודה עם היישומון ***שניים או שלושה גבהים במשולש***.

מהלך הפעילות

- עבודה עם **היישומון** ***גובה במשולש***

התלמידים בודקים מתי הגובה נמצא בתוך המשולש ומתי מחוצה לו ומסבירים מדוע גובה לשוק של זווית קהה במשולש אינו יכול להימצא בתוך המשולש.

- עבודה עם ה**יישומון** ***שניים או שלושה גבהים במשולש***

התלמידים חוקרים ומסבירים מצבים אפשריים ובלתי אפשריים של מקום הגבהים במשולש. למשל, מסבירים מדוע לא ייתכן שבתוך המשולש יימצאו בדיוק שני גבהים.

פעילות 2

הפעילות מיועדת לתלמידים שטעו בהוכחה במשימה 2 או במשימה 3, וטעותם נבעה משרטוט של מקרה פרטי המציג תכונות שאינן נתונות.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף ***הפתרון של דניאל למשימה 3***.
- דיון בעקבות הפתרון של דניאל למשימה 3 ***האם דומים? האם חופפים?***
- סיכום.
- עבודה על דף הפעילות ***משרטטים ומוכיחים***.

מהלך הפעילות

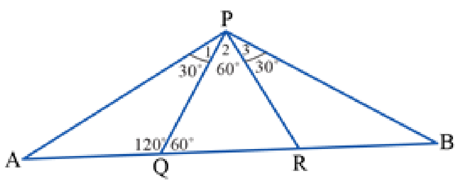
- **עבודה על דף *הפתרון של דניאל למשימה 3***

מציגים בפני התלמידים את משימה 3 ואת הפתרון של דניאל.

חלופה טקסטואלית נמצאת בעמוד התיק באתר

הפתרון של דניאל

דניאל שרטט ופתר את המשימה. בדקו את ההוכחה של דניאל, ואם יש בה שגיאה ציינו מהי.



טענה	נימוק
$\sphericalangle PQA = \sphericalangle PRB$	זוויות צמודות לזוויות של משולש שווה-צלעות שוות זו לזו
$\sphericalangle APB = 120^\circ$	נתון
$\sphericalangle P_1 + \sphericalangle P_3 = 120 - 60 = 60^\circ$	כי $\sphericalangle P2 = 60^\circ$
$\sphericalangle P_1 = \sphericalangle P_3 = 30^\circ$	חישוב
PQ=PR	נתון: משולש PQR שווה-צלעות
$\Delta PQA \cong \Delta PRB$	ז.צ.ז.
$\Delta PQA \sim \Delta PRB$	לפי משפט דמיון ז.ז.

- **דיון בעקבות הפתרון של דניאל למשימה 3 *האם דומים? האם חופפים?***

לאחר שהתלמידים בדקו ורשמו לעצמם את מסקנתם, שואלים:

- האם דניאל צודק? אם לא, מה השגיאה בהוכחתו?
- שרטטו דוגמאות נגדיות לטענתו של דניאל. כלומר, משולשים המקיימים את כל נתוני השאלה וגם את המסקנה בדבר דמיון המשולשים, אך אינם מקיימים את החפיפה ואת השורה $\sphericalangle P_1 = \sphericalangle P_3$.
- אם לא מצאתם דוגמה נגדית, פתחו את היישומון ***בדיקת טענתו של דניאל***. וגררו את הקודקודים.
- מהי התאמת הזוויות המתאימה לנתונים וכיצד נוכיח את דמיון המשולשים?

אם יש צורך משרטטים ופותרים במשותף גם את משימה 2.

- **סיכום**

כיצד לשרטט כשמנסים לפתור בעיות בגיאומטריה?

1. חשוב שהשרטוט יתאים לנתונים.
2. כדאי להימנע משרטוט המכיל בנוסף לנתונים גם תכונות שאינן נתונות. (למשל, לשרטט קטעים שווים כשלא נתון שהם שווים.)
3. יש להימנע משרטוט המייצג הנחות שאינן נכונות. (כמו ההנחה שגובה חייב להיות תמיד בתוך המשולש.)

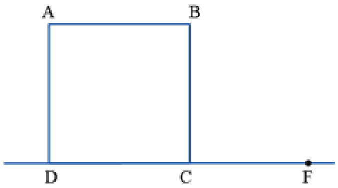
- **עבודה על דף הפעילות *משרטטים ומוכיחים***

באמצעות עבודה בדף זה תלמידים יכולים להתנסות בפתרון בעיות כשהם נמנעים מיצירת שרטוטים המכילים תכונות שאינן נתונות. היישומונים המצורפים מאפשרים לתלמידים לבדוק אם טעו בעקבות שרטוט המכיל תכונות שאינן נתונות.

פעילות זו מאפשרת לבדוק באיזו מידה התלמידים מיישמים את מסקנות הדיון.

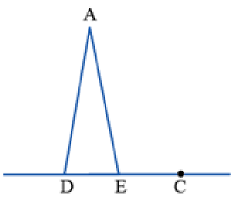
משרטטים ומוכיחים

1. נתון ריבוע ABCD. F נקודה על הישר CD מימין לנקודה C.
משרטטים משולש **ישר זווית** EFK באופן הבא:
E נקודה על הישר CD משמאל לנקודה D.
המשכי הקטעים FB ו- EA נפגשים בנקודה K והזווית ביניהם **ישרה**.



א. שרטטו.
ב. האם קיימים לפי הנתונים **משולשים חופפים**? אם כן, הוכיחו.
האם קיימים לפי הנתונים **משולשים דומים**? אם כן, הוכיחו.
תוכלו לבדוק את מסקנותיכם באמצעות היישומון ***משרטטים ומוכיחים 1***

2. נתון: ΔADE הוא משולש שווה שוקיים ($AD = AE$)
$\sphericalangle AED = 80^\circ$.
C נקודה על הישר DE מימין לנקודה E.
B נקודה על המשך ED משמאל לנקודה D, כך ש- $\sphericalangle CAB = 100^\circ$



א. שרטטו את משולש BAC.
ב. הוכיחו: $\Delta AEC \sim \Delta BDA$
תוכלו לבדוק באמצעות היישומון ***משרטטים ומוכיחים 2***

הצעה לפתרון דף הפעילות *משרטטים ומוכיחים*

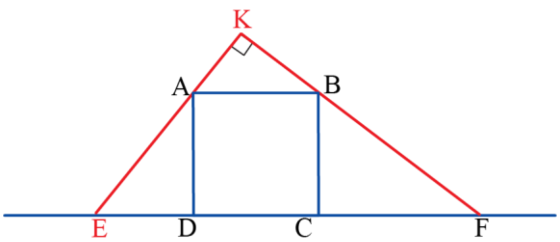
1. קיימים ארבעה משולשים דומים:

$\Delta EKF \sim \Delta EDA \sim \Delta BCF \sim \Delta AKB$.

בהתאם לשאלה התלמיד יכול לציין רק זוג אחד ולהוכיח.

למשל, להוכיח כי $\Delta EKF \sim \Delta EDA$ לפי משפט דמיון ז.ז.

(כי בשני המשולשים יש זווית משותפת E וזווית ישרה).



2. הוכחה:

$\Delta ABC \sim \Delta EAC$ לפי משפט דמיון ז.ז.

(כי בשני המשולשים יש זווית שגודלה 100° וזווית משותפת C)

$\Downarrow$

$\sphericalangle CAE = \sphericalangle B$

$\Downarrow$

$\Delta AEC \sim \Delta BDA$ לפי משפט דמיון ז.ז. (כי בשני המשולשים יש חוץ מזוג הזוויות השוות הנ"ל זווית שגודלה 100°)