תיק משימטיקה

בניית עזר – מעגל

להנגשה פרטנית נא לפנות: **st.negishut@weizmann.ac.il**

תוכן העניינים

מטרות התיק 3

זמני עבודה משוערים 3

החומרים והעזרים הדרושים 3

רקע 4

הצעה למהלך העבודה 4

עבודה על משימות ההערכה 5

משימה 1 **מנסים בניית עזר** 6

משימה 2 **מוצאים בניית עזר** 7

הערכת תוצרי התלמידים 8

פעילות בעקבות ההערכה 10

דף פעילות **מחפשים בניית עזר** 13

בניית עזר – מעגל

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים לבעיה נתונה בגיאומטריה בניית עזר שתעזור בפתרון הבעיה, ולתת מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק בנושא המעגל.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- למצוא בניית עזר
  - שתאפשר שימוש בנתונים ותקשר ביניהם,
  - שתקשר בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח או לחשב,
  - שתקשר בין הנתונים ומה שצריך להוכיח או לחשב לבין משפטים שנלמדו.
- להשתמש בבניית העזר שנבחרה לצורך פתרון הבעיה.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: 30-40 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 60 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
  - משימה 1 ***מנסים בניית עזר***.
  - משימה 2 ***מוצאים בניית עזר***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף פעילות ***מחפשים בניית עזר***.

רקע

בבעיות הוכחה או חישוב בגיאומטריה צריך לעיתים להוסיף בניית עזר שתסייע לפתור את הבעיה. למשל, לשרטט ישר מקביל לקו המופיע בשרטוט, לשרטט אנך לישר שבשרטוט, לשרטט משיק למעגל בנקודה מסוימת, לחבר נקודות המופיעות בשרטוט וכו׳.

במקרים רבים ניתן להוסיף לשרטוט הנתון בבעיה בניות עזר שונות. אך לא כולן מסייעות בהוכחה או בחישוב הנדרשים. בניית עזר בעלת פוטנציאל לסייע בפתרון בעיה מתאפיינת בכך שהיא מאפשרת שימוש בנתונים, קישור בין הנתונים, קישור בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח וביניהם לבין משפטים הקשורים לנושא הבעיה. כלומר, בניית עזר מועילה מתאפיינת בכך שהיא תורמת מידע רלוונטי נוסף על הנתון בבעיה, ובכך מאפשרת שימוש במשפטים שכבר נלמדו.

עם זאת לא כל בניית עזר המקיימת את התנאים שלעיל אכן מסייעת בפתרון הבעיה. במקרים אלו צריך לוותר עליה ולנסות בניית עזר אחרת. יש תלמידים המתקשים לוותר על בניית עזר שאינה מסייעת להם, ובמקומה לנסות בניית עזר אחרת. גמישות בבחירה של בניית עזר, ובאופן כללי – היכולת לוותר על מהלך פתרון מסוים ולנסות מהלך אחר, היא יכולת חשובה בפתרון בעיות בגיאומטריה כמו גם בתחומים אחרים במתמטיקה.

נושא המעגל הוא נושא מרכזי בתכנית הלימודים בגיאומטריה. פתרון בעיות בנושא זה מצריך לעיתים קרובות שימוש בבניית עזר מתאימה. התיק ***בניית עזר – מעגל*** מתמקד בכך. התיק נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בבחירה של בניית עזר מועילה, ולהציע להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
  - משימה 1 ***מנסים בניית עזר***.
  - משימה 2 ***מוצאים בניית עזר***.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1 ***מנסים בניית עזר***.
- משימה 2 ***מוצאים בניית עזר***.

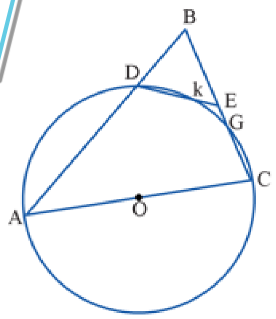
במשימות מופיעים מספר שרטוטים זהים, כדי לעודד תלמידים שלא הצליחו להוכיח בעזרת בניית עזר אחת, לנסות בניית עזר אחרת.

במשימה 1 ***מנסים בניית עזר*** בניית עזר המאפשרת פתרון היא שרטוט קטע המחבר שתי נקודות בשרטוט הנתון. אלא שלא כל חיבור נקודות מאפשר שימוש בנתונים ובמשפטים שנלמדו ומקשר אותם למה שצריך להוכיח.

במשימה 2 ***מוצאים בניית עזר*** הדרישה להוכיח הקבלה עלולה להביא לחיבור נקודות וניסיון להשתמש בזוויות מתחלפות, בעוד שבנייה המקשרת לנתונים ולמשפטים שנלמדו, היא שרטוט משיק.

<u>הערה</u>: יש בעיות בספרי הלימוד שלפתרונן דרושה בניית עזר, אך בספר אין מציינים זאת, והתלמידים צריכים להחליט בעצמם שיש בה צורך ולמצוא מהי. תיק זה מתמקד ביכולת התלמידים למצוא או לבחור בניית עזר מועילה ולהוכיח בעזרתה את הנדרש, ולכן נאמר לתלמידים במפורש שיש צורך בבנייה כזו.

מנסים בניית עזר



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. B נקודה מחוץ למעגל.

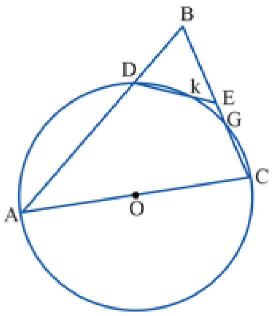
AB חותך את המעגל בנקודה D, ו- BC חותך אותו בנקודה G.

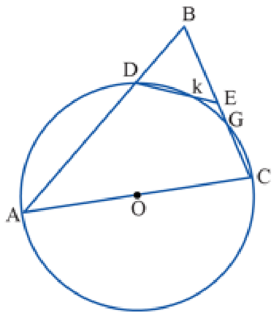
הנקודה E היא אמצע הקטע BC.

DE חותך את המעגל בנקודה K,

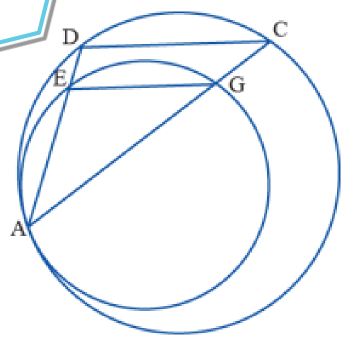
צ.ל: $\sphericalangle KEG = 2\sphericalangle B$

לצורך פתרון הבעיה יש להוסיף בניית עזר.
לפניכם מספר שרטוטים זהים. היעזרו בהם על מנת לנסות בניות עזר שונות.
כשתמצאו בניית עזר מועילה, הוכיחו.





מוצאים בניית עזר



נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה בנקודה A.

EG מיתר במעגל בעל הרדיוס הקטן יותר.

AE חותך את המעגל בעל הרדיוס הגדול בנקודה D.

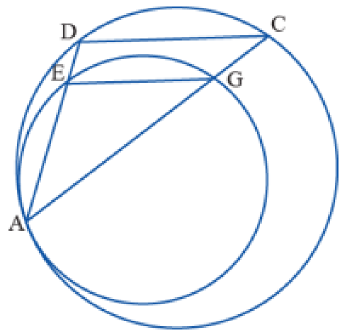
DC מיתר במעגל בעל הרדיוס הגדול.

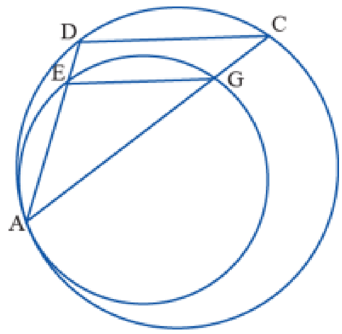
צ"ל: EG ll DC.

לצורך פתרון הבעיה יש להוסיף בניית עזר.

לפניכם מספר שרטוטים זהים. היעזרו בהם על מנת לנסות בניות עזר שונות.

כשתמצאו בניית עזר מועילה, הוכיחו.





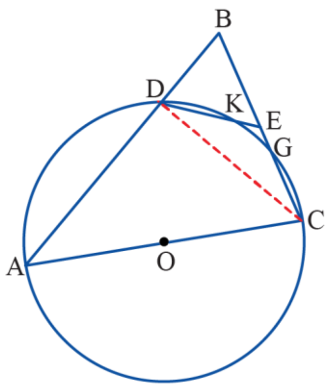
הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם תוכלו להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	משימה 1 ***מנסים בניית עזר***			משימה 2 ***מוצאים בניית עזר***		
	מָצאו בניית עזר מועילה והוכיחו	**מָצאו בניית עזר מועילה ושגו בהוכחה**	**לא מָצאו בנייה מועילה**	**מָצאו בניית עזר מועילה והוכיחו**	**מָצאו בניית עזר מועילה ושגו בהוכחה**	**לא מָצאו בנייה מועילה**
תלמיד 1		**V**		**V**		
תלמיד 2			**V –** ההוכחה שגויה			**V**
תלמיד 3			**V**			**V**
תלמיד 4	**V**					**V**
סך-הכל						

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1 *מנסים בניית עזר*



בניית עזר שעשויה לסייע היא בנייה הקושרת בין הנתון "AC קוטר" והנתון "E אמצע BC". שרטוט הקטע CD יוצר זווית היקפית הנשענת על הקוטר, וגם יוצר משולש ישר-זווית בו DE תיכון ליתר. בדרך זו מתאפשר שימוש במשפטים הקשורים בזווית היקפית ובתיכון במשולש ישר-זווית.

$\measuredangle ADC$ היא זווית ישרה (כי היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר AC).

$\measuredangle BDC$ היא זווית ישרה (כי היא צמודה ל- $\measuredangle ADC$).

DE תיכון ליתר במשולש BDC שהוא ישר-זווית.

$\Downarrow$

$DE = BE$ (התיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה באורכו למחצית אורך היתר.)

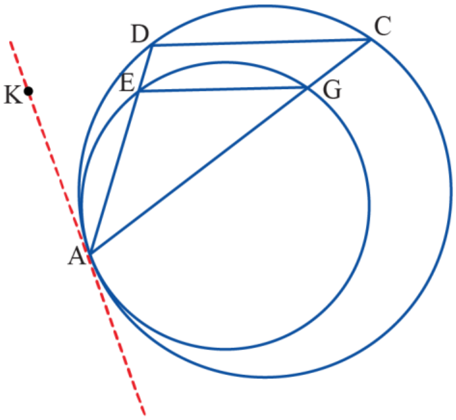
$\measuredangle B = \measuredangle BDE$ (כי הן זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים BDE.)

$\measuredangle BDE + \measuredangle B = \measuredangle DEC$ (כי היא זווית חיצונית ל- ΔBED)

$\Downarrow$

$\measuredangle DEC = 2\cdot\measuredangle B$

פתרון משימה 2 *מוצאים בניית עזר*



כדי להשתמש בנתון "שני המעגלים משיקים בנקודה A", בונים משיק משותף לשני המעגלים בנקודה A.

$\measuredangle KAD = \measuredangle C$ (כי היא זווית בין משיק ומיתר במעגל בעל הרדיוס הגדול).

$\measuredangle KAD = \measuredangle EGA$ (כי היא זווית בין משיק ומיתר במעגל הקטן).

$\Downarrow$

$\measuredangle C = \measuredangle EGA$

$\Downarrow$

$DC \parallel EG$ (כי יש זוג זוויות מתאימות שוות בין הישרים האלה).

פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שלא הצליחו למצוא את בניית העזר המועילה באחת המשימות או בשתיהן. (מסומנים באחת או יותר מהעמודות המודגשות בטבלת הערכה). הפעילות עשויה להתאים גם לתלמידים שמצאו בניית עזר מועילה ולא הצליחו להוכיח.

שלבי הפעילות

- דיון בפתרון המשימות.
- דיון מסכם בעקרונות לבחירת בניית עזר כדאית.
- עבודה על דף הפעילות ***מחפשים בניית עזר***

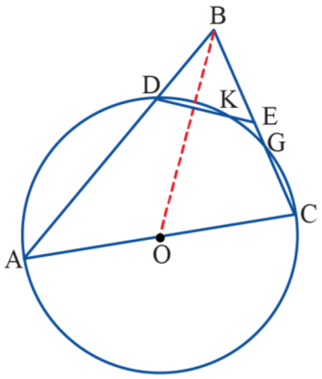
מהלך הפעילות

- **דיון בפתרון המשימות**

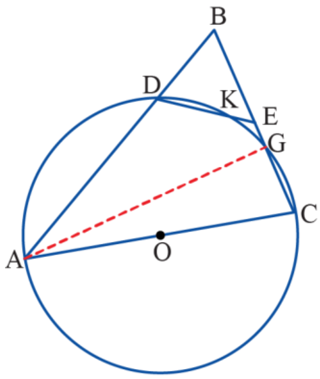
דיון בפתרון משימה 1 *מנסים בניית עזר*

מציגים את המשימה וארבע הצעות של בניות עזר:

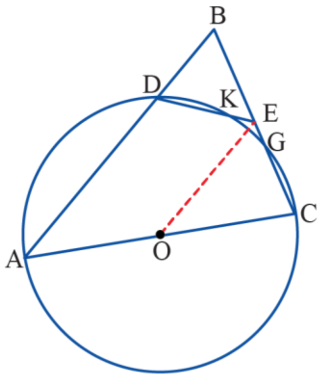
א.



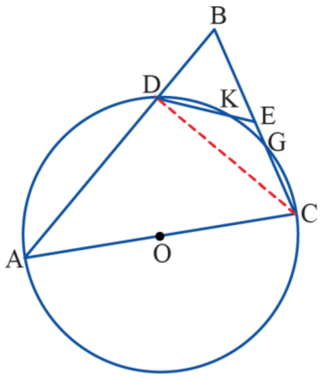
ב.



ג.



ד.



לגבי כל אחת מבניות העזר שואלים אם היא כדאית ומבקשים הסבר.

בנייה א: - הקטע BO **אינו** מוסיף מידע המאפשר שימוש בנתון "AC קוטר".
- הקטע BO **אינו** מוסיף מידע המאפשר שימוש בנתון "E אמצע BC".
- הקטע BO מחלק את הזווית B לשני חלקים, ולא ידוע לאילו חלקים, ובכך עלול להפריע לראות מה צריך להוכיח.

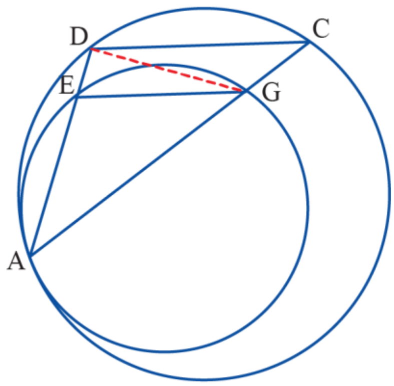
בנייה ב: - שרטוט הקטע AG מאפשר שימוש בנתון 'AC קוטר", ומקשר בינו לבין המשפט "זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה".
- שרטוט הקטע AG **אינו** מוסיף מידע המאפשר שימוש בנתון E אמצע BC, ולכן **אינו מאפשר לקשר בין הנתונים.**

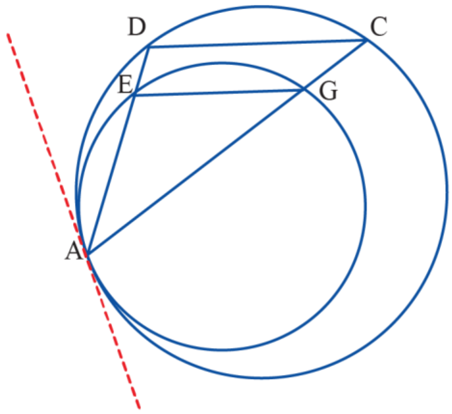
בנייה ג: חיבור O עם E מאפשר להשתמש בנתון "E אמצע BC", להסיק ש- OE קטע אמצעים במשולש, ולהסיק באמצעות משפט ש- $\measuredangle B = \measuredangle CEO$. אבל כדי להוכיח שגם $\measuredangle B = \measuredangle DEO$, יש צורך בקו עזר נוסף שיאפשר **שימוש בנתון** "AC קוטר".

בנייה ד: חיבור C עם D **קושר בין הנתונים** "AC קוטר", ו- "E אמצע BC", וכך **מאפשר להשתמש במשפטים** הקשורים בנתונים. ואכן, יש טעם לנסות להוכיח בעזרת בנייה זו.

דיון בפתרון משימה 2 *מוצאים בניית עזר*

מציגים את המשימה ושתי הצעות של בניות עזר:





לגבי כל אחת מבניות העזר שואלים אם היא כדאית ומבקשים הסבר.

בנייה א: הקטע DG אינו מוסיף מידע המאפשר שימוש בנתון "המעגלים משיקים". וללא נתון זה לא ניתן להוכיח שוויון זוויות ולהסיק את ההקבלה.

בנייה ב: משיק משותף לשני המעגלים בנקודת ההשקה המשותפת A קושר בין הנתון לבין ההקבלה שאותה יש להוכיח: **המשפט** העוסק בזווית שבין משיק למיתר מקשר בין **הנתון** לבין שוויון הזוויות וביניהם לבין **המשפט** המאפשר להסיק שהישרים מקבילים.

- **דיון מסכם בעקרונות לבחירת בניית עזר מועילה**

בסיכום כדאי לבקש מהתלמידים להציע עקרונות לבניית עזר מועילה.
להלן עקרונות אפשריים:

א. לחפש בניית עזר העשויה לאפשר שימוש בנתונים וקישור ביניהם.
ב. לחפש בניית עזר שתקשר בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח.
ג. לחפש בניית עזר שתחשוף תכונות ותוביל לשימוש במשפט הקשור לנתוני הבעיה ו/או למה שצריך להוכיח.
ד. לא ליצור בנייה "המקלקלת" את הנתון או את מה שצריך להוכיח.

כדאי גם לציין שכאשר אין מצליחים להגיע להוכחה בעזרת בניית עזר מסוימת, כדאי לבדוק אותה על פי העקרונות הנ"ל ולנסות להוכיח באמצעות בניית עזר אחרת.
היכולת לעבור מניסיון לא מוצלח לניסיון אחר, היא בעלת חשיבות בפתרון בעיות מתמטיות ומאפיינת עבודה מתמטית.

- **עבודה על דף הפעילות *מחפשים בניית עזר***

דף פעילות זה נועד ליישום ותרגול העקרונות שנלמדו. הפעילות מיועדת לתלמידים שלא מצאו בניית עזר מתאימה לפתרון אחת המשימות או שתיהן, והיא מתאימה גם לתלמידים שמצאו בניית עזר כזו ושגו בהוכחה.

מחפשים בניית עזר

לפתרון כל אחת מהבעיות הבאות יש צורך לבנות בניית עזר. מצאו בניית עזר מתאימה והוכיחו.

1. בשרטוט שלפניכם **נתון:**

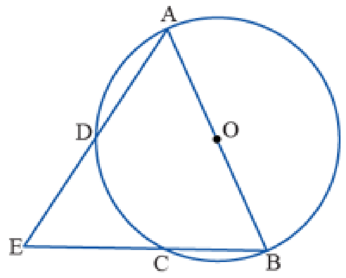
AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.

המשכי המיתרים AD ו-BC נפגשים

בנקודה E.

AD = DE.

הוכיחו: AB = BE.

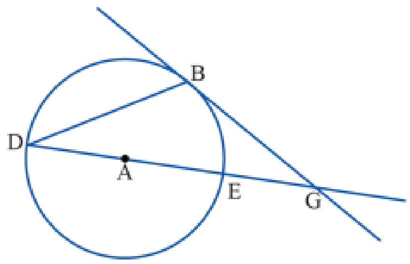


2. בשרטוט שלפניכם **נתון:**

BG משיק למעגל שמרכזו A בנקודה B.

BD = BG

מצאו את הגדלים של זוויות משולש DBG



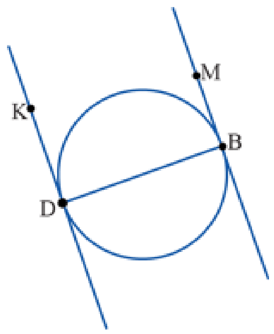
3. בשרטוט שלפניכם **נתון:**

הישר MB משיק למעגל בנקודה B

והישר KD משיק למעגל בנקודה D

MB II KD

הוכיחו: BD קוטר במעגל



4. בשרטוט שלפניכם **נתון:**

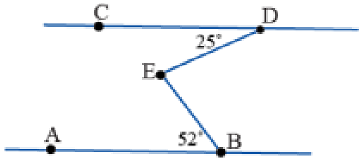
AB II CD

∢CDE = 25°

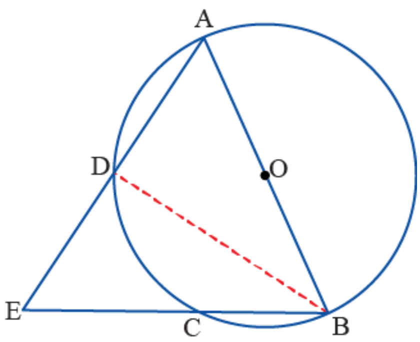
∢ABE = 52°

שרטטו לפחות שתי בניות עזר שונות

וחשבו את גודל ∢DEB



הצעה לפתרון דף הפעילות *מחפשים בניית עזר*



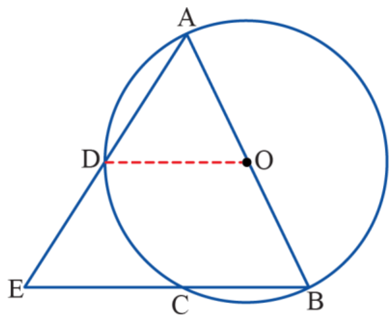
.1 לפניכם שתי הצעות לבניית עזר כדאית:

הצעה ראשונה: משרטטים קטע BD שהוא תיכון במשולש, והמאפשר גם להשתמש בנתון "AB קוטר".

$\angle ADB = 90°$ (כי היא זווית היקפית הנשענת על קוטר).

$\Leftarrow$ BD תיכון וגם גובה לצלע AE במשולש AEB

$\Leftarrow$ $BE = BA$



הצעה שנייה: משרטטים קטע OD (כדי להשתמש בנתון "O אמצע AB" ובנתון "D אמצע AE").

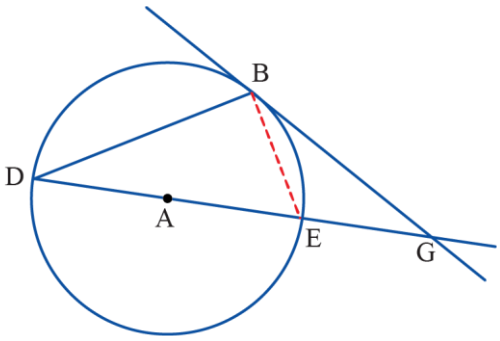
$DO \parallel EB$ (כי DO קטע אמצעים ב- ΔAEB).

$\Leftarrow$ $\angle ADO = \angle E$ (כי הן זוויות מתאימות בין המקבילים)

$\angle ADO = \angle A$ (כי הן זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים AOD)

$\Downarrow$

$\angle A = \angle E$ $\Leftarrow$ $EB = AB$ (כי הן צלעות מול זוויות שוות ב- ΔABE)



.2 לפניכם שתי הצעות לבניית עזר כדאית:

הצעה ראשונה: משרטטים קטע BE (כדי ליצור זווית היקפית הנשענת על קוטר בנוסף לזווית בין משיק למיתר).

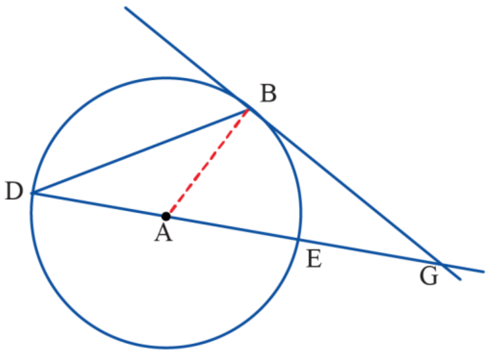
$\angle GBE = \angle D$ (זווית בין משיק למיתר).

$\angle G = \angle D$ (כי הן זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים DBG).

$\angle DBE = 90°$(כי זו זווית היקפית הנשענת על קוטר).

$\angle G = \angle GBE = \angle D = 30°$ (משלימות את זוויות ΔDBG ל- 180°).

$\angle DBG = 120°$ ו- $\angle G = \angle D = 30°$



הצעה שנייה: משרטטים רדיוס AB, כדי ליצור זווית ישרה בין משיק לרדיוס.

$\angle G = \angle D$ (זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים DBG).

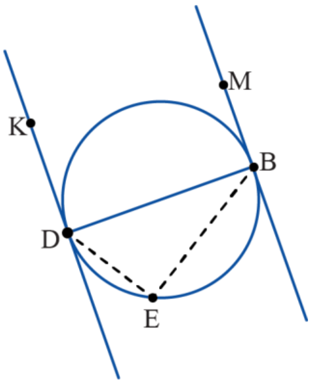
$\angle DBA = \angle D$ (זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים ABD).

$\angle ABG = 90°$ (הרדיוס AB מאונך למשיק בנקודת ההשקה).

$\angle G = \angle DBA = \angle D = 30°$ (משלימות את זוויות ΔDBG ל- 180°)

$\angle DBG = 120°$ ו- $\angle G = \angle D = 30°$

3. נחבר נקודה כלשהי (E) על המעגל עם D ועם B כדי לקבל זווית היקפית ולהוכיח שהיא ישרה.



$\sphericalangle MBD = \sphericalangle E$ (זווית בין משיק למיתר).

$\sphericalangle KDB = \sphericalangle E$ (זווית בין משיק למיתר).

$\sphericalangle KDB + \sphericalangle MBD = 180^\circ$ (כי הן זוויות חד-צדדיות בין מקבילים).

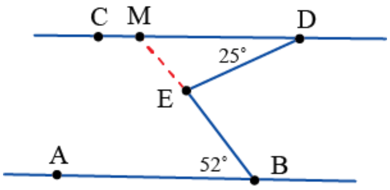
$\Downarrow$

$\sphericalangle MBD = \sphericalangle KDB = \sphericalangle E = 90^\circ$

$\Downarrow$

DB קוטר (אם גודלה של זווית היקפית במעגל שווה ל- 90° אז היא נשענת על קוטר).

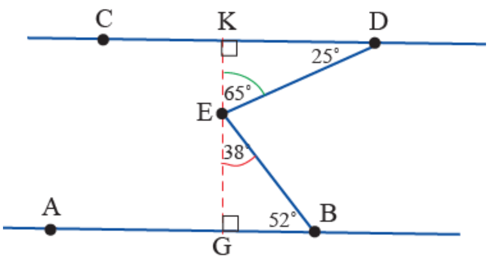
4. לפניכם ארבע הצעות לבניית עזר כדאית:



הצעה 1: ממשיכים את הקטע BE עד שהוא חותך את CD בנקודה M.

מוצאים $\sphericalangle DMB = \sphericalangle DEB = 52^\circ$ (כי היא זווית מתחלפת עם $\sphericalangle MBA$ בין המקבילים.)

ומוצאים $\sphericalangle DEB = 77^\circ$ (זווית חיצונית ל- ΔMED)

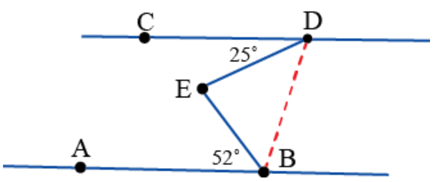


הצעה 2: משרטטים אנך מ- E לישרים המקבילים, מחשבים את זוויות המשולשים שנוצרו ומוצאים את גודל $\sphericalangle DEB$.

הצעה 3: דרך E משרטטים מקביל ל- CD.

משתמשים בזוויות מתחלפות בין הישר CD והמקביל ששורטט ובין הישר AB והמקביל ששורטט.

מחשבים את הגדלים של הזוויות שקודקודן בנקודה E, ומוצאים: $\sphericalangle DEB = 7°7$.



הצעה 4: מחברים את B עם D .

$25 + x + y + 52 = 180^\circ$ (זוויות חד-צדדיות בין המקבילים CD ו- AB)

$\Downarrow$

$\sphericalangle DEB = 180^\circ - (x + y)$ (סכום זוויות במשולש .DEB)

$\Leftarrow \sphericalangle DEB = 52 + 25 = 77^\circ$