תיק משימטיקה

בעיות קיצון – פונקציית המטרה

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

בעיות קיצון – פונקציית המטרה

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לבנות את פונקציית המטרה בבעיות קיצון. התיק עוסק בשטחי מלבנים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לבנות את פונקציית המטרה המתאימה לבעיית קיצון שבה יש לחשב שטח באמצעות חיבור או חיסור של שטחי מלבנים. כלומר,
  - למצוא את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה,
  - לבנות את חוק ההתאמה של פונקציית המטרה.
- להשתמש באסטרטגיות מגוונות לבניית חוק ההתאמה של פונקציית המטרה.

זמני עבודה משוערים

עבודה על משימות ההערכה: 20-30 דקות.

פעילויות בעקבות ההערכה: 45 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
  - דף משימה 1 מהי פונקציית המטרה?
  - דף משימה 2 שלוש פונקציות מטרה.

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה:

לפעילות 1

- דף פעילות 1 ***אפשרויות שונות*** (לכל תלמיד/ה).
- יישומון גיאוגברה ***התחום***.
- דף פעילות 2 ***מהו התחום?*** (לכל תלמיד/ה).

לפעילות 2

- דף פעילות 3 ***אסטרטגיות לבניית חוק ההתאמה*** (לכל תלמיד/ה).
- דף פעילות 4 ***חיבור או חיסור?*** (לכל תלמיד/ה).

רקע

האפשרות למצוא את התוצאה המתאימה ביותר מבין מגוון תוצאות אפשריות לבעיה נתונה, מראה את כוחה ועוצמתה של המתמטיקה. החשבון הדיפרנציאלי הוא אחד הכלים המרכזיים בהשגת מטרה זו. הדבר בא לידי ביטוי ברור בנושא של פתרון בעיות ערך קיצון. בעיות כאלה שיש להן קשר ברור למציאות, מעמיקות את הבנת הנושא כולו.

שלב מרכזי בפתרון של בעיות קיצון כולל בנייה של פונקציית מטרה. בנייה זו כוללת מציאה של שני רכיבים: תחום ההגדרה וחוק ההתאמה. מציאת רכיבים אלה של פונקציית המטרה מציבה קשיים מסוגים שונים בפני תלמידים.

מציאת חוק ההתאמה כרוכה בבניית ביטוי אלגברי המתאים לבעיה מילולית. דבר זה מהווה קושי כבר מתחילת לימוד האלגברה. הקושי גובר כשיש צורך לשלב בין ייצוגים שונים (מילולי, גיאומטרי ואלגברי), כמו במקרה של בעיות העוסקות במציאת שטחים, אשר תופסות חלק מרכזי במהלך הלימודים של הנושא *בעיות קיצון*. הקשיים של תלמידים בבניית חוק ההתאמה של פונקציית המטרה קשורים לעתים קרובות גם לצורך בשימוש באסטרטגיות מגוונות. לדוגמה, מציאת חוק ההתאמה של פונקציית המטרה במקרה של בעיות העוסקות במציאת שטחים מצריך ביצוע מגוון מניפולציות על צורות ועל השטחים שלהן כמודגם להלן:

- חיבור וחיסור שטחים או כפל שטח במספר כאשר יש מספר שטחים שווים,
- חלוקת צורה מורכבת לחלקים שקל לחשב את שטחם,
- הרכבת צורות מורכבות לצורה שקל לחשב את שטחה,
- חלוקת צורה סימטרית בציר הסימטריה כדי לכפול את חצי השטח ב- 2.

בעוד שקשיי התלמידים במציאת חוק ההתאמה של פונקציית מטרה קשורים בדרך כלל לתהליך בנייה של ביטוי אלגברי מתאים לנתוני הבעיה, במקרה של מציאת תחום ההגדרה של פונקציית המטרה קושי מרכזי הוא חוסר התייחסות של תלמידים לרכיב זה כרלוונטי לפונקציית המטרה או לפתרון הבעיה. כתיבת התחום היא בעצם כתיבת נתוני הבעיה. אולם תלמידים רבים אינם רושמים כלל את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה בבעיות קיצון ולעתים קרובות מתעלמים ממנו במהלך הפתרון אפילו כשהוא רשום. הדבר קשור כנראה לעיסוק רחב במהלך הלימודים בפונקציות פולינום שאינן קשורות לסיטואציה ותחומן הוא R.

התיק ***בעיות קיצון – פונקציית המטרה*** עוסק בשטחי מלבנים. התיק נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בבניית פונקציית המטרה בבעיות קיצון מסוג זה, ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
  - משימה 1 ***מהי פונקציית המטרה?***
  - משימה 2 ***שלוש פונקציות מטרה.***
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

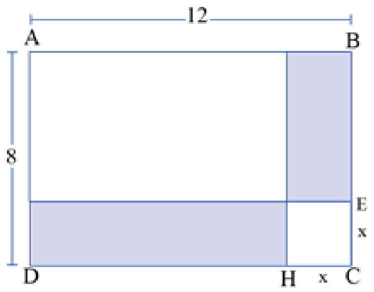
- משימה 1 ***מהי פונקציית המטרה?***
- משימה 2 ***שלוש פונקציות מטרה***.

שתי המשימות מיועדות לעבודה עצמית של התלמידים, ומומלץ לבצע אותן ברצף זו אחר זו.

בשתי המשימות התלמידים מתבקשים לבנות פונקציית מטרה מתאימה (כלומר, תחום הגדרה וחוק התאמה) לבעיית קיצון העוסקת בשטחי מלבנים. המשימה השנייה מורכבת יותר מן הראשונה.

מהי פונקציית המטרה?

דן ודור שיחקו במשחק של צביעת שטחים בתוך מלבן לבן ABCD שאורך צלעותיו 12 ס"מ ו- 8 ס"מ.



חוקי המשחק: כל משתתף בתורו בוחר את אורך הקטע CE (E נקודה על הצלע CB) ומסמן את הנקודה H על הצלע CD המקיימת CH = CE.

דרך הנקודות E ו- H מעבירים קווים מקבילים לצלעות המלבן וצובעים את השטחים כבשרטוט.

השטח הצבוע שייך למשתתף שבחר את אורך הקטע CE,

השטח שאינו צבוע שייך למשתתף האחר.

המשתתף ששטחו גדול יותר מנצח בתור זה.

דן מחפש את אורך הקטע CE כך שהשטח הצבוע יהיה הגדול ביותר האפשרי.

x מייצג את אורך הצלע CE.

רשמו פונקציית מטרה (הכוללת תחום הגדרה) המתארת את השטח הצבוע בהתאם לגודל - x .

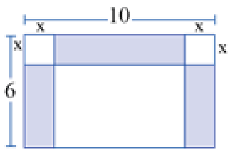
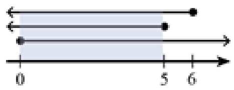
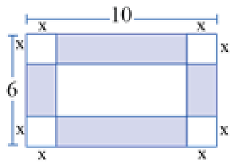
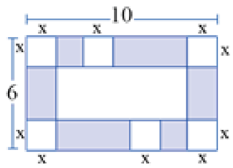
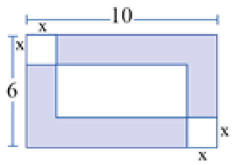
שלוש פונקציות מטרה

מהנדס גינון מתכנן גינה ציבורית. הוא מקצה שטח מלבני שאורכי צלעותיו 10 מ' ו- 6 מ' לדשא ולפרחים.
השטח יחולק למלבנים. חלק מהמלבנים הם ריבועים חופפים.

המהנדס מתכנן שישתלו דשא בכל השטחים המקווקוים ושבשאר השטחים ישתלו פרחים.
המהנדס מעוניין **ששטח הדשא** יהיה הגדול ביותר האפשרי.
x מייצג את אורך צלע הריבוע (במטרים).

מצאו לכל שרטוט פונקציית מטרה (ביטוי אלגברי ותחום הגדרה), המתארת את שטח הדשא כפונקציה של x.
רשמו אותה בעמודה השמאלית.

הציגו את חישוביכם.

	התכנון	חישובים	פונקציית המטרה
דוגמה		**חישוב הביטוי האלגברי** $x(10-2x)+x(6-x)+x(6-x) =$ $10x-2x^2+6x-x^2+6x-x^2 =$ $22x - 4x^2$ **מציאת תחום ההגדרה**  $x \geq 0$ $2x \leq 10$ לכן $x \leq 5$ $x \leq 6$	$S(x)=22x-4x^2$ $0 \leq x \leq 5$
א			
ב			
ג			

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	משימה 1 *מהי פונקציית המטרה?*				משימה 2 *שלוש פונקציות*				**שתי המשימות**	
	תשובה נכונה	טעו בבניית פונקציית המטרה (או לא ענו)			מספר התשובות הנכונות (מתוך 3)	טעו בבניית פונקציות המטרה (או לא ענו)			מספר אסטרטגיות בבניית חוק ההתאמה	הערות
		בתחום	בחוק ההתאמה			בתחום	בחוק ההתאמה			
			בבנייה	בפישוט			בבנייה	בפישוט		
תלמיד 1	V				3				1	
תלמיד 2		V				V	V		1	
תלמיד 3		V				V	V		1	
סך-הכל										

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

בפתרונות מובאות הצעות לאסטרטגיות שונות לחישוב השטחים הנדרשים:

חיבור שטחים (בכל המשימות).

חיסור שטחים (בכל המשימות).

זיהוי של שטחים שווים, חישוב שטח אחד והכפלתו במספר השטחים השווים (בכל המשימות).

חלוקת צורה מורכבת לחלקים שקל לחשב את שטחם (במשימה 2 סעיף ג).

הרכבת צורות לצורה שקל לחשב את שטחה (במשימה 2 סעיף ב).

הערות

1. ניתן לבנות את חוקי ההתאמה של כל פונקציות המטרה במשימות אלה בדרכים שונות תוך כדי שימוש באסטרטגיה אחת או בצירוף של מספר אסטרטגיות.

2. לא תמיד ניתן לזהות את האסטרטגיה שנקטו בה התלמידים.

   למשל, בתכנון שמשמאל

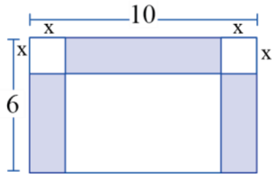
   יש מספר דרכים לקבל את המחובר הראשון בביטוי האלגברי

   $2x(6-x)+x(10-2x)$ למשל,

   – כפל שטח של מלבן צדדי ב- 2 (זיהוי צורות חופפות)

   – הרכבה של שני המלבנים החופפים למלבן אחד

   – חיבור הביטויים האלגבריים השווים (מניפולציה אלגברית).



פתרון משימה 1 ***מהי פונקציית המטרה?***

תחום הפונקציה: $0 \le x \le 8$

חוקי התאמה מתאימים לפונקציית המטרה:

$y = x(12-x) + x(8-x)$ או $y = 96 - x^2 - (12-x)(8-x)$ או $y = -2x^2 + 20x$

או כל חוק התאמה אחר השקול להם.

פתרון משימה 2 ***שלוש פונקציות***

להלן פונקציות המטרה הפשוטות שעשויות לעזור בבדיקת תוצרי התלמידים:

א. $f(x) = \mathbf{32}x - \mathbf{8}x^2$ ב. $f(x) = \mathbf{20}x - \mathbf{6}x^2$ ג. $f(x) = \mathbf{32}x - \mathbf{6}x^2$

$\mathbf{0 \le x \le 3}$ $\mathbf{0 \le x \le 3}$ $\mathbf{0 \le x \le 3}$

כאמור, ההתייחסות בתיק זה היא רק לטעויות בבנייה התחלתית של חוק ההתאמה ולא לטעויות פישוט.

להלן שתי אפשרויות לבניית כל חוק התאמה (בדרך כלל יש דרכים נוספות לבנייה לפי אסטרטגיות אחרות):

	חיבור וכפל ב- 2	חיסור
א.	$y = 2x(6 - 2x) + 2x(10 - 2x)$	$y = 60 - 4x^2 - (10 - 2x)(6 - 2x)$
ב.	$y = 2x(10 - 3x)$	$y = 60 - 6x^2 - 10(6 - 2x)$
ג.	$y = 2x(10 - x) + 2x(6 - 2x)$	$y = 60 - 2x^2 - (10 - 2x)(6 - 2x)$

<u>הערה</u>: בדרך כלל השורה הראשונה בכל תא בעמודת החישובים שבמשימה תציג את אופן בניית חוק ההתאמה. יש להתייחס לשורות ראשונות אלו כדי לבדוק,

1. אם הבנייה נכונה
2. מהן האסטרטגיות שנבחרו.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שטעו בבניית תחום ההגדרה או לא רשמו אותו (מסומנים בטבלת ההערכה באפור כהה).	V	
לתלמידים שטעו בבניית פונקציות המטרה או השתמשו במעט אסטרטגיות בחישוב השטחים (מסומנים בטבלת ההערכה באפור בהיר או בעמודת מספר האסטרטגיות).		V

פעילות 1

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***אפשרויות שונות***.
- דיון מלווה ביישומון ***התחום***.
- עבודה על דף פעילות 2 ***מהו התחום?***

מהלך הפעילות

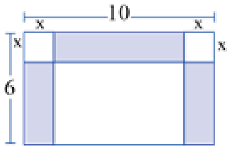
- **עבודה על דף פעילות 1 *אפשרויות שונות***

לתלמידים שהתקשו במציאת תחום ההגדרה של פונקציית המטרה תהיה הזדמנות בדף זה להתייחס למקרים פרטיים של x ולהיווכח שלא כולם אפשריים בבעיה זו. מקרים כאלה יבהירו את המושג *נתוני* (או תנאי או אילוצי) *הבעיה* ויובילו למציאת התחום. בהמשך ניתן לראות שרק "הסיפור" קובע את התחום ולא השאלה הנשאלת בסופו.

אפשרויות שונות

מהנדס גינון מתכנן גינה ציבורית. הוא מקצה שטח מלבני שאורכי צלעותיו 10 מ' ו- 6 מ' לדשא ולפרחים.
השטח יחולק למלבנים ששניים מהם ריבועים חופפים (ראו שרטוט).

המהנדס מתכנן שישתלו דשא בכל השטחים הצבועים ושבשאר השטחים ישתלו פרחים.
x מייצג אורך צלע של כל ריבוע (במטרים).

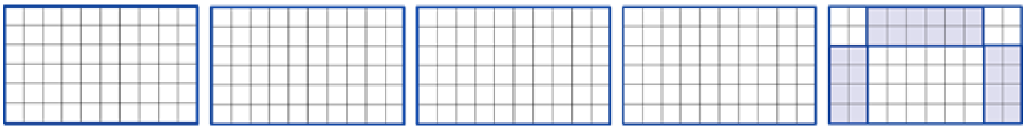


1. **א.** מבין האפשרויות הבאות סמנו את האפשרויות שעבורם נתוני הבעיה מתקיימים.

$x = 1$ $x = 4$ $x = -1$ $x = 3.5$ $x = 5.5$

ב. במלבנים הבאים כל משבצת מייצגת 1 מ"ר. שרטטו באחד המלבנים כל אפשרות שסימנתם בסעיף א.

דוגמה עבור $x = 2$



ג. הסבירו איזה נתון בבעיה אינו מתקיים בכל אפשרות **שלא סימנתם**.

תחום של פונקציה המתארת בעיה הוא קבוצת כל המספרים x שמקיימים את נתוני הבעיה.

2. **א.** הפונקציה f מתאימה לאורך צלע של הריבוע (x) את שטח הדשא.

מהו תחום הפונקציה f? ______________

ב. הפונקציה g מתאימה לאורך צלע של הריבוע (x) את שטח הפרחים.

מהו תחום הפונקציה g? ______________

- **דיון מלווה ביישומון** ***התחום***
  - מבררים את אילוצי הבעיה וכיצד הם משפיעים על תחום ההגדרה של פונקציית המטרה.
  - ממחישים את האילוצים באמצעות היישומון ***התחום***.
  - דנים בשאלה אם הקצוות שייכים לתחום פונקציית המטרה. מגיעים למסקנה שזוהי החלטה שרירותית של פותר בעיית הקיצון, ושלפעמים כדאי לכלול אותן, כי בבעיות קיצון נקודות הקצה עשויות להיות נקודות הקיצון המוחלט.
  - מסכמים כי התחום הוא חלק בלתי נפרד מפונקציית המטרה. יש למצוא את התחום ולרשום אותו אפילו לפני שבונים את חוק ההתאמה.

* **עבודה על דף פעילות 2** ***מהו התחום?***

דף זה נועד ליישום ותרגול העקרונות שנלמדו. מומלץ להעביר אותו במועד אחר ולא ברצף של המערך הנ"ל. מתאים לעבודה עצמית או בזוגות.

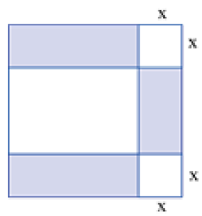
מהו התחום?

חברה המייצרת מרצפות עיצבה מרצפות ריבועיות צבעוניות שאורך צלעותיהן 60 ס"מ.

כל מרצפת מחולקת למלבנים (או לצורות שניתן לחלקן למלבנים). חלק מהמלבנים הם ריבועים.

כל מרצפת צבועה בשני צבעים: לבן ואפור.

לפניכם דוגמה של אחת המרצפות המחולקת לשישה מלבנים.



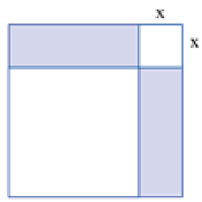
הפונקציה f מתאימה לאורך צלע של כל ריבוע (x) את השטח הלבן.

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה f. נמקו. (אין צורך למצוא את הביטוי האלגברי.)

2. לפניכם דוגמאות נוספות של מרצפות.

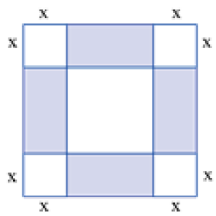
לכל דוגמה מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה המתאימה לאורך צלע הריבוע את השטח הלבן.

א.



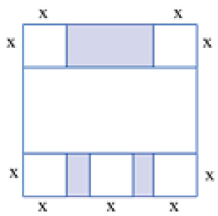
____

ב.



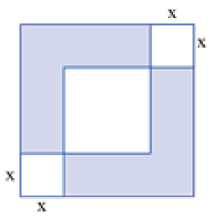
____

ג.



____

ד.



____

פעילות 2

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 3 ***אסטרטגיות לבניית חוק התאמה***.
- דיון ***על אסטרטגיות לבניית חוק ההתאמה***
- עבודה על דף פעילות 4 ***חיבור או חיסור?***

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 3 *אסטרטגיות לבניית חוק התאמה***

תלמידים שהתקשו בבניית חוקי ההתאמה של פונקציות המטרה ייחשפו בדף זה למגוון דרכים לבניית פונקציות השטח. גם תלמידים שפעלו באסטרטגיה אחת בלבד (למשל, חיבור שטחים) יוכלו להפיק תועלת מן הפעילות.

הפעילות אינה מיועדת לתלמידים שבנו נכון את פונקציות המטרה אבל טעו בפישוט הביטויים האלגבריים.

אסטרטגיות לבניית חוק ההתאמה

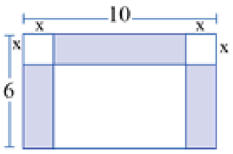
מהנדס גינון מתכנן גינה ציבורית. הוא מקצה שטח מלבני שאורכי צלעותיו 10 מ' ו- 6 מ' לדשא ולפרחים.

השטח יחולק למלבנים ששניים מהם ריבועים חופפים (ראו שרטוט).

המהנדס מתכנן שישתלו דשא בכל השטחים המקווקוים ושבשאר השטחים ישתלו פרחים.

x מייצג את אורך הצלע של כל ריבוע (במטרים).

המהנדס מעוניין ששטח הדשא יהיה גדול ככל האפשר.



הפונקציה S מתאימה לאורך צלע (x) של כל ריבוע את שטח הדשא.

א. מצאו את פונקציית המטרה בדרכים רבות ככל האפשר. אל תשכחו שתחום הפונקציה הוא חלק מהגדרתה.

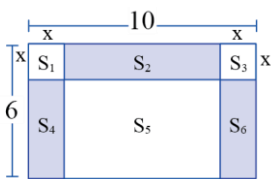
המלצה: שרטטו שרטוט גדול יותר וסמנו את הביטויים המתאימים לאורכי הצלעות על השרטוט.

ב. פשטו את הביטויים. האם קיבלתם ביטויים שווים?

- **דיון על *אסטרטגיות לבניית חוק ההתאמה***

  ○ אוספים מן התלמידים את הצעותיהם לבניית חוק ההתאמה. מבקשים את הביטויים ההתחלתיים, ולא את אלה שלאחר הפישוט. ניתן להוסיף הצעות שהתלמידים לא הציעו.

  ○ מתייחסים לאסטרטגיות שבהן תלמידים נקטו כדי לבנות את חוק ההתאמה, ומגבשים עם התלמידים שם לכל אסטרטגיה. ניתן להיעזר בסימון השטחים כבשרטוט.



  ○ מציגים תכנון נוסף של הגינה הציבורית המאפשר גיוון של האסטרטגיות (ראו הצעות לתכנון בדף משימה 2 וראו מגוון אסטרטגיות בפתרון המשימות).

  ○ מתייחסים לקשיים שחזרו על עצמם בכיתה בבניית פונקציות המטרה (אם היו כאלה).

- **עבודה על דף פעילות 4 *חיבור או חיסור?***

דף זה נועד ליישום ותרגול העקרונות שנלמדו. מומלץ להעביר אותו במועד אחר ולא ברצף של המערך הנ"ל. מתאים לעבודה עצמית או בזוגות.

דף פעילות 4 – חיבור או חיסור?

התאימו שתי פונקציות מטרה מן הרשימה לכל שרטוט.

א. $y = 60 - 2x^2 - (10 - 2x)(6 - 2x)$

ב. $y = 2x(6 - 2x) + 2x(10 - 2x)$

ג. $y = 60 - 2x^2 - (6 - x)(10 - 2x)$

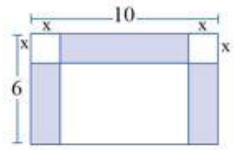
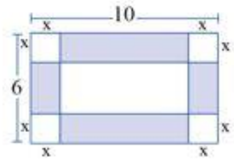
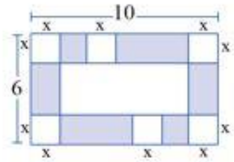
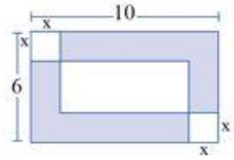
ד. $y = 60 - 6x^2 - (6 - 2x)(10 - 2x)$

ה. $y = 2x(10 - x) + 2x(6 - 2x)$

ו. $y = 2x(10 - 3x) + 2x(6 - 2x)$

ז. $y = 60 - 4x^2 - (10 - 2x)(6 - 2x)$

ח. $y = x(10 - x) + 2x(6 - x)$

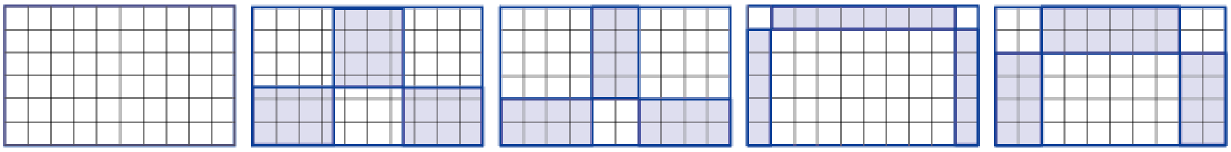
	התכנון	**סכום** שטחים	**הפרש** שטחים
1			
2			
3			
4			

הצעה לפתרון דפי הפעילות

פתרון דף פעילות 1 *אפשרויות שונות*

1. א-ב. האפשרויות שעבורן נתוני הבעיה מתקיימים.

דוגמה עבור $x = 2$ $x = 1$ $x = 4$ $x = 3.5$



ג. $x = -1$ אורך צלע המלבן אינו יכול להיות שלילי.

$x = 5.5$ סכום אורכי שני ריבועים אינו יכול להיות גדול מ-10.

2. א. תחום הפונקציה f : $0 \le x \le 5$

ב. תחום הפונקציה g : $0 \le x \le 5$

פתרון דף פעילות 2 *מהו התחום?*

1. $x \ge 0$ וגם $2x \le 30$ וגם $x \le 60$

תחום פונקציית המטרה $0 \le x \le 30$

2. א. $0 \le x \le 60$ ב. $0 \le x \le 30$ ג. $0 \le x \le 20$ ד. $0 \le x \le 30$

פתרון דף פעילות 3 *אסטרטגיות לבניית חוק ההתאמה*

תחום פונקציית המטרה $0 \le x \le 5$

להלן **חלק** מן דרכים לבניית חוק ההתאמה של פונקציית המטרה:

- נחבר את שטחי שלושת המלבנים המיועדים לדשא: $S(x) = x(10-2x) + x(6-x) + x(6-x)$
- שניים מהמלבנים המיועדים לדשא חופפים, לכן נכפיל שטח של אחד מהם ב- 2 ונחבר למכפלה את השטח השלישי: $S(x) = x(10-2x) + 2 \cdot x(6-x)$
- נצמיד בדמיוננו את שני המלבנים החופפים המיועדים לדשא למלבן אחד. נחשב את שטחו ונחבר לו את שטח המלבן השלישי: $S(x) = x(10-2x) + 2x \cdot (6-x)$
- נחסר משטח המלבן המיועד לגינה את השטח המיועד לפרחים: $S(x) = 60 - [x^2 + x^2 + (10-2x)(6-x)]$

פישוט של כל הביטויים האלגבריים נותן: $S(x) = 22x - 4x^2$