



תיק משימטיקה

שימוש במשפט מזוירי:

מרובעים

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: האם הנימוק מצדיק?
8	משימה 2: היכן הטעות?
10	הערכת תוצרי תלמידים
12	פעילות בעקבות ההערכה
12	פעילות: כל התנאים שבמשפט
13	עבודה על דף הפעילות חלק א': הטעויות בהוכחות
14	דיון
15	עבודה על דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות
16	דיון וסיכום

פתיחה¹



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במשפט במהלך הוכחת טענה גיאומטרית, רק אם מתקיימים כל התנאים ההכרחיים לשימוש במשפט. התיק עוסק בנושא מרובעים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

❖ לפסול נימוק לטענה גיאומטרית כאשר מתקיימים רק חלק מהתנאים ההכרחיים לשימוש בו.



זמני עבודה משוערים

❖ עבודה על משימות הערכה: 30-40 דקות.

❖ פעילות בעקבות ההערכה: 40-60 דקות



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ דף משימה 1: [האם הנימוק מצדיק?](#)

❖ דף משימה 2: [היכן הטעות?](#)

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ לחלק א'

▪ דף הפעילות חלק א': [הטעויות בהוכחה של יואב ומיכל](#).

▪ יישומון גיאוגברה [שתי צלעות נגדיות שוות ושתי זוויות נגדיות שוות](#).

❖ לחלק ב'

▪ דף הפעילות חלק ב': [בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות](#).

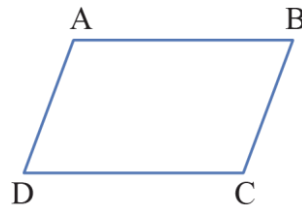
▪ יישומון גיאוגברה [קטעים שווים מקודקודי מקבילית](#).

¹ שלושה תיקי משימטיקה עוסקים בשימוש במשפטים ידועים במהלך הוכחה. שני תיקים – שימוש במשפט מזויף: משולשים ושימוש במשפט מזויף: מרובעים – מתמקדים בתנאים הנדרשים לשימוש במשפט. תיק נוסף – מציאת משפט מתאים – פרופורציה ודמיון מתמקד בבחירה מושכלת של משפטים מתאימים.



רקע

הוכחה והפרכה של טענות היא פעילות מרכזית בכל ענפי המתמטיקה. במהלך הוכחה של טענות מתמטיות בכלל, וגיאומטריות בפרט, מתבססים לעיתים קרובות, על הסקה דדוקטיבית, תוך שימוש במשפטים ידועים. קושי נפוץ של תלמידים במהלך הוכחה בגיאומטריה הוא הסקת מסקנה תוך התבססות על משפט ידוע, כאשר חלק מהתנאים המאפשרים שימוש במשפט לא מתקיימים.



לדוגמה:

נתון: מרובע ABCD

$AB \parallel CD$

$AD = BC$

ישנם תלמידים שטוענים שהמרובע ABCD הוא מקבילית ומנמקים זאת באופן הבא: מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג צלעות נגדיות שוות באורכן, הוא מקבילית. הנימוק של התלמידים מתבסס על משפט שהתנאים לשימוש בו אינם מתקיימים: המשפט קובע כך: מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות באורכן, הוא מקבילית. כלומר במשפט נדרש שאותו זוג צלעות נגדיות במרובע יהיו גם מקבילות וגם שוות באורכן. לכן הנימוק של התלמידים, מתבסס על "משפט מזויף".

הנושא מרובעים הוא מרכזי בתכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק **שימוש במשפט מזויף: מרובעים** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים להתחשב בכל התנאים שבמשפט, כשהם מנמקים או מסיקים מסקנות במהלך הוכחה, ולתת מענה לקושי זה.



הצעה למהלך העבודה

- ❖ עבודה על משימות הערכה:
- משימה 1: [האם הנימוק מצדיק?](#)
- משימה 2: [היכן הטעות?](#)
- ❖ הערכת תוצרי התלמידים.
- ❖ פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1: **האם הנימוק מצדיק?**

❖ משימה 2: **היכן הטעות?**

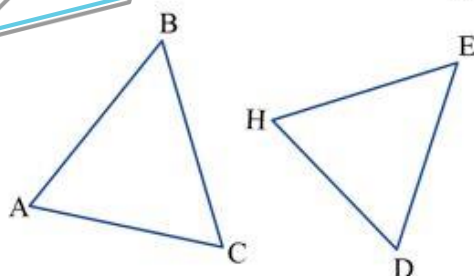
בשתי המשימות התלמידים נדרשים לזהות נימוקים שבהם יש שימוש ב"משפט מזויף", כלומר משפט שמושמטים ממנו חלק מהתנאים.



משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

לפניכם טענות. לכל טענה נרשום נימוק של תלמיד או תלמידה שמצדיקים אותה. קבעו לכל טענה אם הנימוק שניתן מצדיק אותה. אם אינו מצדיק, הסבירו.



א. נתון: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$

$$AC = DE$$

$$\angle C = \angle D$$

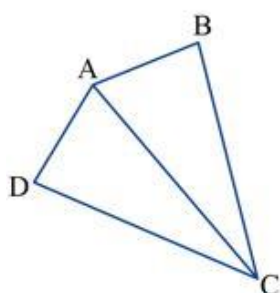
$$\angle B = \angle E$$

מסקנה: $\triangle ABC \cong \triangle DEH$

הנימוק של דני: אם גדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחד, שווים לגדלים של שתי זוויות ואורך צלע במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.

האם הנימוק של דני מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ב. נתון: מרובע ABCD

$$AB = AD$$

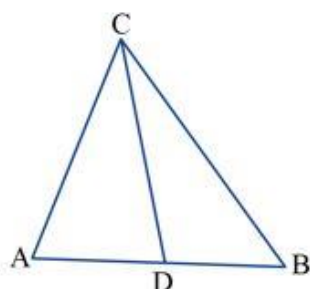
$$\angle BAC = \angle DAC$$

מסקנה: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

הנימוק של רותי: אם אורכי שתי צלעות וגודל הזווית שביניהן במשולש אחד, שווים לאורכי שתי צלעות וגודל הזווית שביניהן במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.

האם הנימוק של רותי מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ג. נתון: $\triangle ABC$

$$AC = AB$$

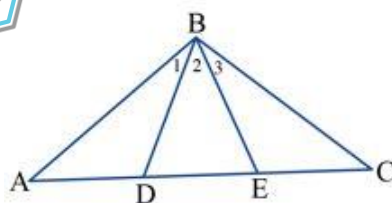
$$AD = BD$$

מסקנה: $\angle ACD = \angle BCD$

הנימוק של יעל: תיכון במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית.

האם הנימוק של יעל מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:



ד. נתון: $\triangle ABC$ הנקודות D ו-E על הצלע AC

$$EC = DE = AD$$

$$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$$

הנימוק של אפרת: מול צלעות שוות באורכן נמצאות זוויות שוות בגודלן.

האם הנימוק של אפרת מצדיק את המסקנה? ☐ כן ☐ לא

הסבר:

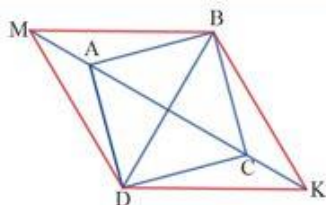
[למשימה 1 מונגשת](#)



משימה 2: היכן הטעות?

משימה 2: היכן הטעות?

א. יואב ניסה להוכיח טענה. במסגרת שלפניכם הטענה שניסה יואב להוכיח. אחרי המסגרת תמצאו את ההוכחה של יואב. בדקו את ההוכחה שלו. אם ההוכחה שגויה, ציינו מהי הטעות.



נתון: ריבוע ABCD

ממשיכים את AC לשני הכיוונים, ומסמנים על ההמשך בכיוון אחד את הנקודה M ובכיוון השני את הנקודה K כך ש: $AM = CK$

מסקנה: מרובע MBKD מעוין

ההוכחה של יואב:

$AC \perp DB$ (כי האלכסונים בריבוע מאונכים זה לזה)

$\Downarrow$
 $MK \perp DB$

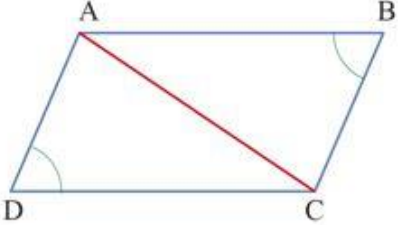
$\Downarrow$

המרובע MBKD הוא מעוין (כי אם האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המרובע הוא מעוין).

האם יואב הוכיח שהמרובע הוא מעוין? ☐ כן ☐ לא

אם לא, הטעות היא:

ב. מיכל ניסתה להוכיח טענה. במסגרת שלפניכם הטענה שניסתה מיכל להוכיח. אחרי המסגרת תמצאו את ההוכחה של מיכל. בדקו את ההוכחה שלה. אם ההוכחה שגויה, ציינו מהי הטעות.



נתון: מרובע ABCD

$AB = CD$

$\angle D = \angle B$

מסקנה: ABCD מקבילית

ההוכחה של מיכל:

(נתון) $AB = CD$

AC צלע משותפת

(נתון) $\angle D = \angle B$

↓

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (לפי שתי צלעות וזווית)

↓

$AD = CB$ (כי הן צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

↓

המרובע ABCD הוא מקבילית (מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות שוות באורכן הוא מקבילית)

האם מיכל הוכיחה שהמרובע הוא מקבילית? ☐ כן ☐ לא

אם לא, הטעות היא: _____

[למשימה 2 מוגשת](#)

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

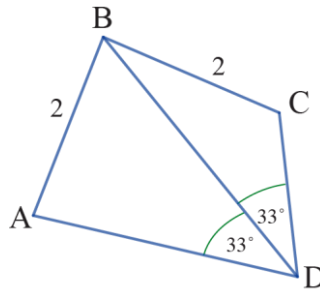
שם התלמיד/ה	משימה 1 כל התשובות נכונות	משימה 1 טעו בהצדקת הנימוקים	משימה 2 תשובה נכונה	משימה 2 לא מצאו את הטעויות	הערות
סה"כ					

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות להלן:

משימה 1: האם הנימוק מצדיק?

א. המסקנה אינה נכונה. המשולשים אינם בהכרח חופפים.

השגיאה מופיעה בנימוק: שני משולשים השווים בשתי צלעות וזווית אינם בהכרח חופפים. שני משולשים חופפים אם הם שווים בשתי צלעות ובזווית מול הארוכה שבשתי הצלעות או שהם שווים בשתי צלעות ובזווית שביניהם. אולם במקרה זה, הזוויות השוות בגודלן אינן בהכרח מול הצלע הארוכה יותר בשני המשולשים כפי שמדגים השרטוט.



ב. המרובע אינו בהכרח מקבילית. מרובע שיש בו זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג צלעות נגדיות שוות באורכן, אינו בהכרח מקבילית. הוא יכול להיות גם טרפז שווה שוקיים. ניתן להסיק שמרובע הוא מקבילית כאשר באותו זוג של צלעות נגדיות, הצלעות הן גם מקבילות וגם שוות באורכן.

משימה 2: היכן הטעות?

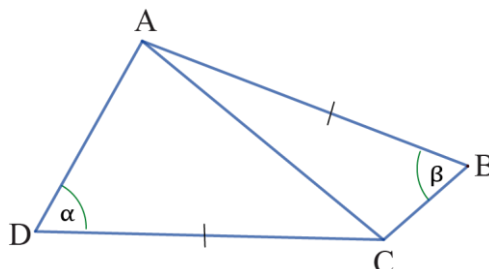
א. ניתן להוכיח שהמרובע MBKD הוא מעוין, אבל ההצעה של יואב להוכיח אינה מוכיחה זאת. השגיאה בפתרון של יואב היא בשורה האחרונה. התנאי: אלכסונים במרובע מאונכים זה לזה אינו תנאי מספיק כדי להוכיח שמרובע הוא מעוין.

דוגמה להוכחה שהמרובע הנתון הוא מעוין היא באמצעות חפיפה של ארבעת המשולשים MBA, MDA, KBC ו-KDC לפי צ.ז.צ. מהחפיפה מסיקים שהמרובע הוא מעוין באמצעות המשפט: מרובע שכל צלעותיו שוות באורכן הוא מעוין.

ב. המרובע לא חייב להיות מקבילית.

השגיאה של מיכל היא בהסקה שהמשולשים חייבים להיות חופפים. כדי ששני המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle CDA$ יהיו חופפים נדרש ששתי צלעות במשולש אחד תהיינה שוות באורכן לשתי צלעות במשולש האחר, וגם שהזווית מול הצלע הארוכה מהשתיים במשולש האחד תהיה שווה בגודלה לזווית המתאימה לה במשולש האחר. אולם כאן הזוויות השוות אינן בהכרח מול הצלע הארוכה יותר בשני המשולשים.

ראו דוגמה נגדית:



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שלא פסלו נימוקים המבוססים על "משפט מזויף", כלומר, קיבלו נימוקים כאשר לא כל התנאים הנדרשים במשפט הגיאומטרי התקיימו.



פעילות: כל התנאים שבמשפט

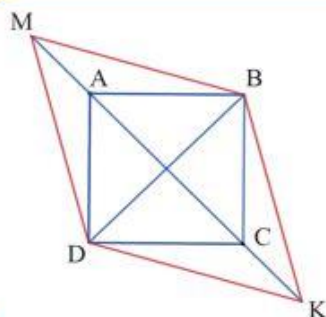
שלבי הפעילות

- א. עבודה על דף הפעילות חלק א': הטעויות בהוכחות של יואב ומיכל.
- ב. דיון.
- ג. עבודה על דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות.
- ד. דיון וסיכום.

עבודה על דף הפעילות חלק א': הטעויות בהוכחות של יואב ומיכל

דף הפעילות חלק א': הטעויות בהוכחות של יואב ומיכל

1. במסגרת שלפניכם הטענה של **יואב** ולאחריה ההוכחה השגויה (משימה 2, סעיף א')



נתון: ריבוע ABCD

ממשיכים את AC לשני הכיוונים, ומסמנים על ההמשך בכיוון אחד את הנקודה M ובכיוון השני את הנקודה K כך ש: $AM = CK$

מסקנה: מרובע MBKD מעוין

ההוכחה של יואב:

$AC \perp DB$ (כי האלכסונים בריבוע מאונכים זה לזה)

$\Downarrow$

$MK \perp DB$

$\Downarrow$

המרובע MBKD הוא מעוין (כי אם האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המרובע הוא מעוין).

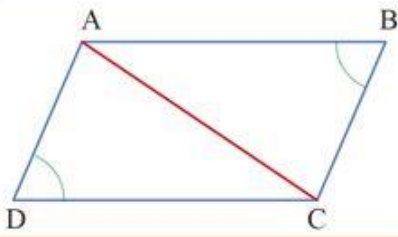
א. מה השגיאה בהוכחה של **יואב**?

ב. **עמרי אמר:** אני הוכחתי חפיפה של ארבעת המשולשים MBA, MDA, KBC, ו-KDC וככה

הוכחתי שצלעות המרובע MBKD שוות באורכן.

האם ההוכחה של **עומרי** משכנעת שהמרובע הוא מעוין? הסבירו.

2. לפניכם הטענה של **מיכל** וההוכחה השגויה (משימה 2, סעיף ב')



נתון: מרובע ABCD

$AB = CD$

$\angle D = \angle B$

מסקנה: ABCD מקבילית

ההוכחה של מיכל:

$AB = CD$ (נתון)

AC צלע משותפת

$\angle D = \angle B$ (נתון)

⇓

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (לפי שתי צלעות וזווית)

⇓

$AD = CB$ (כי הן צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

⇓

המרובע ABCD הוא מקבילית (מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות שוות באורכן הוא מקבילית)

א. מה הטעות בהוכחה של **מיכל**?

ב. האם המרובע חייב להיות מקבילית?

(תוכלו לבדוק בעזרת היישומון: שתי צלעות נגדיות שוות ושתי זוויות נגדיות שוות.)

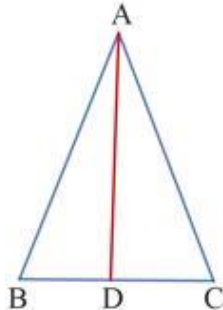
לדף פעילות חלק א': הטעויות בהוכחות של יואב ומיכל מונגש

דיון

❖ חשיבות ההתאמה במיקום ההדדי של הזוויות והצלעות כאשר עוסקים בחפיפת משולשים.

דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות

1. לפניכם טענה. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים. אם לא, מצאו מה השגיאה בהוכחה.



נתון: משולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$)

D נקודה על הבסיס BC

מסקנה: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

הוכחה: $AB = AC$ (נתון)

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C$$

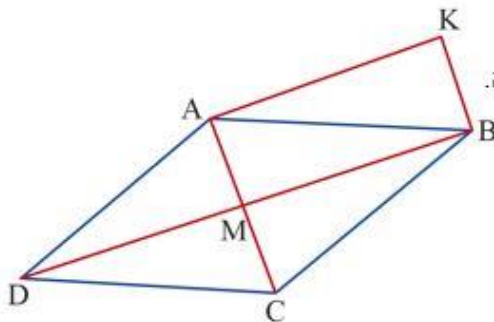
AD צלע משותפת



$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (לפי שתי צלעות וזווית)

2. לפניכם טענה נכונה.

מצאו את השגיאה בהוכחה הבאה, ואחר-כך הוכיחו את הטענה.



נתון: ABCD מעוין

מהקודקודים A ו-B העבירו מקבילים לאלכסוני המעוין, הנחתכים בנקודה K.

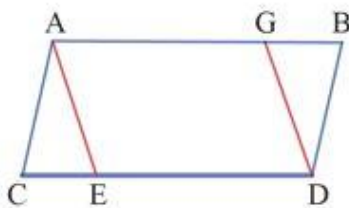
מסקנה: המרובע AKBM הוא מלבן

הוכחה: $\sphericalangle M = 90^\circ$ (האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה)



AKBM מלבן (כי יש במרובע זווית ישרה)

3. לפניכם טענה. אם המסקנה נכונה, הוכיחו את הטענה. אם אינה נכונה, שרטטו דוגמה נגדית, או הסבירו.



נתון: ABCD מקבילית

משני הקודקודים הנגדיים A ו-D שרטטו קטעים

החותכים את הצלעות CD ו-AB

כך ש: $AE = DG$

מסקנה: AEDG מקבילית

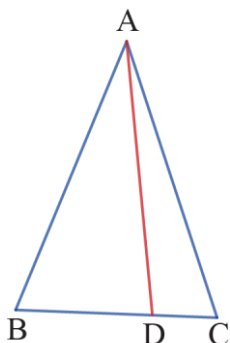
(תוכלו להיעזר ביישומון: קטעים שווים מקודקודי מקבילית).

דיון וסיכום

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

- ❖ שימוש במשפט גיאומטרי מחייב שכל התנאים שבמשפט יתקיימו.
- ❖ גם כאשר שימוש במשפט "מזויף" (שבו לא כל התנאים הנדרשים מתקיימים) מביא למסקנה נכונה, ההוכחה שגויה.

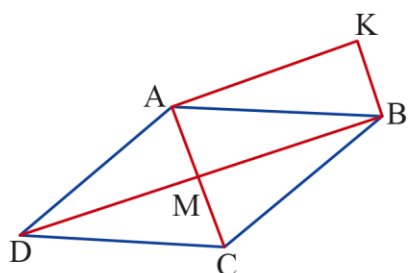
הצעה לפתרון דף הפעילות חלק ב': בודקים נימוקים ומתקנים שגיאות



1. המסקנה אינה נובעת מהנתונים.

דוגמה נגדית בשרטוט משמאל:

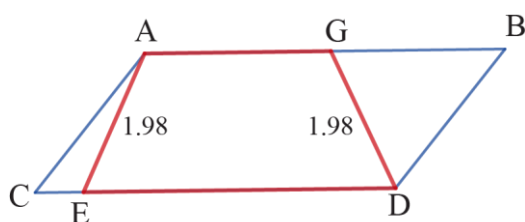
השגיאה נובעת מההיסק שהמשולשים חייבים להיות חופפים. אך אם הזוויות השוות בגודלן אינן מול הצלעות הארוכות יותר, המסקנה אינה מתקיימת. במקרה זה הצלע AD, הנמצאת מול הזוויות השוות בגודלן, תמיד קטנה משוקי המשולש.



2. השגיאה בהוכחה היא ההיסק שהמרובע מלבן על סמך

זווית אחת ישרה.

אחת האפשרויות להוכיח היא: להראות שהמרובע AMBK הוא מקבילית (כי צלעותיו הנגדיות מקבילות לפי הנתונים) ומקבילית שבה יש זווית ישרה היא מלבן.



3. המסקנה אינה נכונה. דוגמה נגדית: