



תיק משימטיקה

זהויות מתמטיות:

חוקי החזקות

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן עניינים

3	פתיחה
3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות הערכה
6	משימה 1: זוגות, זוגות...
7	משימה 2: מפרקים חזקות
8	הערכת תוצרי תלמידים
11	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
12	פעילות 1: חזקות עם בסיסים זהים
12	עבודה על דף פעילות 1 חזקות עם בסיסים זהים
14	דיון
15	פעילות 2: חזקות עם מעריכים זהים
15	עבודה על דף פעילות 2 חזקות עם מעריכים זהים
16	דיון
17	פעילות 3: שטחים וצלעות
17	עבודה על דף פעילות 3 שטחים וצלעות
19	דיון

פתיחה¹



מטרות התיק

תיק זה נועד לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים ליצור ולהשתמש בזהויות מתמטיות הנקראות חוקי חזקות, ולתת מענה לקשיים שמתגלים. חוקי החזקות שבהם התיק עוסק, מתייחסים לפעולות בין חזקות עם בסיסים זהים, ולפעולות בין חזקות עם מעריכים זהים, בעבור a ו- b ממשיים ושונים מאפס, x ו- y שלמים:

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ ליצור זהויות מתמטיות המבוססות על חוקי החזקות.
- ❖ להשתמש בחוקי החזקות באופן סימטרי.



זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 20-30 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: 20-30 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

❖ משימה 1 **זוגות, זוגות...**

❖ משימה 2 **מפרקים חזקות.**

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה:

❖ דף פעילות 1 **חזקות עם בסיסים זהים.**

❖ דף פעילות 2 **חזקות עם מעריכים זהים.**

❖ דף פעילות 3 **שטחים וצלעות.**



¹ ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים בזהויות מתמטיות. שני תיקים – **נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות** – עוסקים בזהויות שהשימוש בהן שכיח. התיק – **ביטויים ומשוואות עם מכנים מספריים** עוסק בזהויות המכילות מכנים והטיפול בהם במהלך פתרון משוואות, והתיק – **ביטויים נגדיים** עוסק בקשר בין זהויות זוגות של ביטויים נגדיים.

רקע

פעולת החזקה היא אחת הפעולות הבסיסיות במתמטיקה, ולה שימושים רבים. למשל, בחקר של תופעות גדילה ודעיכה (לדוגמה, התפשטות מגפות), בכתיבה מדעית, בחישובי כדאיות וסיכונים השקעות, בהצפנה, במדידות (לדוגמה, רעידות אדמה, חומציות ובסיסיות) בפיתוח משחקי מחשב ועוד. העיסוק בחזקות במסגרת לימודי האלגברה מהווה בסיס ללימוד של נושאים כמו הפונקציה המעריכית וסדרות הנדסיות. בחטיבת הביניים עוסקים בבניית מושג החזקה והרחבתו למעריכים מסוגים שונים, ובחוקי החזקות היסודיים.

חוקי החזקות, שהם זהויות מתמטיות, מאפשרים החלפה של ביטוי אחד בביטוי אחר זהה לו במהלך פתרון בעיה. למשל, על-ידי שימוש בחוקי החזקות ניתן להקטין בצורה משמעותית את מספר הפעולות שיש לעשות כדי לחשב חזקות עם מעריכים גדולים. לדוגמה, במקום לחשב את 5^{90} על-ידי 89 פעולות כפל של 5 בעצמו, ניתן להשתמש בחוקי החזקה ולקבל את התוצאה בתשע פעולות כפל בלבד: חמש פעולות כפל כדי לחשב את $5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}$ ו- 5^{32} , וארבע פעולות כפל נוספות כדי להכפיל את חמש החזקות $5^2 \cdot 5^8 \cdot 5^{16} \cdot 5^{32} \cdot 5^{32}$. בדרך זאת נקבל:

$$5^{90} = 5^{64+16+8+2} = 5^{64} \cdot 5^{16} \cdot 5^8 \cdot 5^2 = 5^{32} \cdot 5^{32} \cdot 5^{16} \cdot 5^8 \cdot 5^2$$

תלמידים נתקלים בקשיים שונים בהקשר של שימוש בחוקי חזקות. בתיק זה נתייחס לשני קשיים:

❖ אי אבחנה בין הפעולה שבין חזקות לבין הפעולה שבין מעריכי החזקות. שגיאות אופייניות הן, למשל:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3 \cdot 4} ; \quad \frac{3^6}{3^2} = 3^2 ; \quad (5^3)^2 = 5^3$$

קושי זה קשור לייחודיות של פעולת החזקה אשר בשונה מפעולות החיבור והכפל המוכרות לתלמידים, אינה מוגדרת בין כל שני מספרים ממשיים ואינה מקיימת תכונות בסיסיות, כמו חוק החילוף וחוק הקיבוץ.

❖ קושי בפירוק חזקה נתונה וכתיבתה כמכפלה או כמנה של שתי חזקות או כהעלאה של חזקה בחזקה – לדוגמה,

$$\text{כאשר יש צורך לפרק את החזקה } 15^4 \text{ למכפלה של שתי חזקות במטרה לצמצם את השבר } \frac{15^4}{3^3}.$$

התיק **זהויות מתמטיות: חוקי החזקות** נועד לסייע למורים לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

❖ עבודה על משימות הערכה:

▪ משימה 1 **זוגות, זוגות...**

▪ משימה 2 **מפרקים חזקות.**

❖ הערכת תוצרי התלמידים.

❖ פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

❖ משימה 1 **זוגות, זוגות...**

❖ משימה 2 **מפרקים חזקות.**

במשימה 1 **זוגות, זוגות...** התלמידים מתבקשים לחבר בקו זוגות של חזקות שוות: עם בסיסים זהים ועם מעריכים זהים. במשימה זו נבדקת יכולת התלמידים להבחין בין הפעולה שבין חזקות לבין הפעולה שבין מעריכי החזקות.

במשימה 2 **מפרקים חזקות** התלמידים מתבקשים לפרק חזקות נתונות ולכתוב אותן, כמכפלה או כמנה של שתי חזקות או כהעלאה של חזקה בחזקה.



משימה 1: זוגות, זוגות...

משימה 1: זוגות, זוגות...

1. סברו בקו זוגות של חזקות זהות.

טור א'	טור ב'
• 2^5	• $2^1 \cdot 2^2$
• 2^6	• $2^3 \cdot 2^1$
• 2^9	• $(2^3)^2$
• 2^{15}	• $\frac{2^{18}}{2^3}$
• 2	• $\frac{2^5}{2^4}$
• 1	

דוגמה

2. סברו בקו זוגות של חזקות זהות.

טור א'	טור ב'
• 1	
• 6	• $2^5 \cdot 3^5$
• 6^5	• $\frac{18^5}{3^5}$
• 6^{10}	• $\frac{24^5}{4^5}$
• 6^{20}	• $2^{10} \cdot 3^{10}$
• 6^{100}	

3. פשטו ורשמו את התוצאה כחזקה אחת.

א.	$\frac{5^2 \cdot 5^8}{5^6} =$
ב.	$\frac{2^{15}}{(2^5)^3} =$
ג.	$\frac{15^8}{5^8} =$
ד.	$\frac{21^{16}}{3^3 \cdot 7^3} =$

[למשימה 1 מוגשת](#)



משימה 2: מפרקים חזקות

משימה 2: מפרקים חזקות

1. מצאו את הערך של x במשוואות הבאות:

א. $3^2 \cdot 3^x = 3^6$

ב. $\frac{3^{12}}{3^x} = 3^4$

ג. $(3^x)^2 = 3^{12}$

2. כתבו חזקות במקומות הריקים בכל סעיף, כך שהתוצאה 5^{12} תתקבל בשתי דרכים שונות.

□ • □ = 5^{12}

□ • □ = 5^{12}

א. מכפלות:

$\frac{\square}{\square} = 5^{12}$

$\frac{\square}{\square} = 5^{12}$

ב. מנות:

$(\square^{\square}) = 5^{12}$

$(\square^{\square}) = 5^{12}$

ג. חזקות של חזקות:

הערכת תוצרי תלמידים

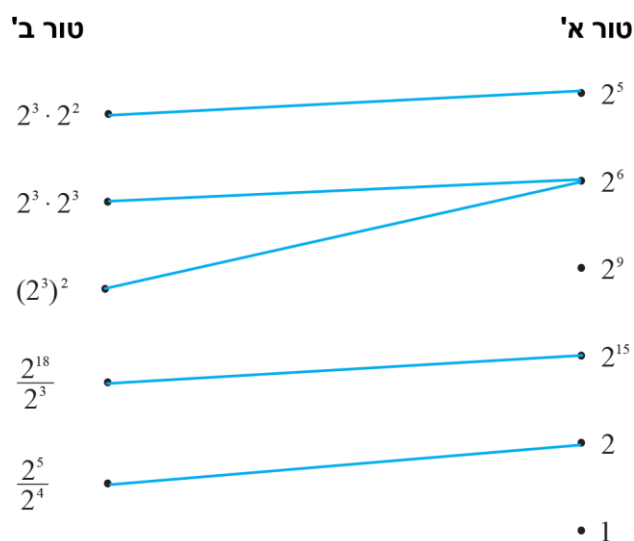
לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

הערות	טעו בפירוק חזקות	טעו בחוקי החזקות עם מעריכים זהים	טעו בחוקי החזקות עם בסיסים זהים	כל תשובות נכונות	שם התלמיד/ה
			✓		תלמיד/ה 1
				✓	תלמיד/ה 2
	✓				תלמיד/ה 3
		✓			תלמיד/ה 4
					סה"כ

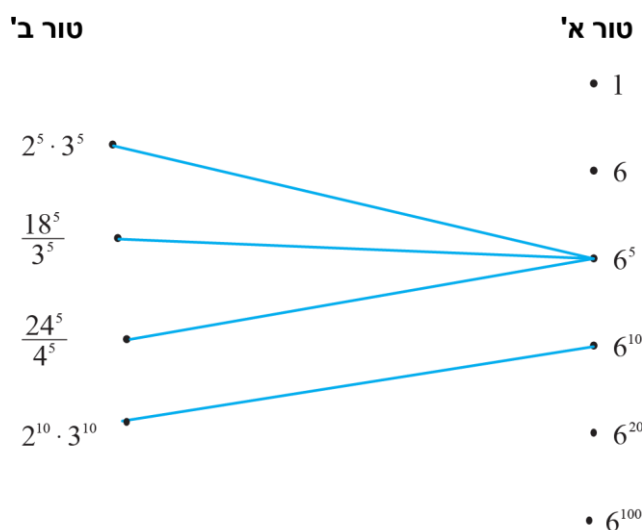
לצורך בדיקת תוצרי התלמידים במשימות ההערכה ניתן להיעזר בפתרונות המשימות, להלן.

משימה 1: זוגות, זוגות...

1. חברו בקו זוגות של חזקות זהות.



2. חברו בקו זוגות של חזקות זהות.



3. פשטו וקְרְשְׁמו את התוצאה כחזקה אחת.

א. $\frac{5^2 \cdot 5^8}{5^6} = 5^4$

ב. $\frac{2^{15}}{(2^5)^3} = 2^0 = 1$

ג. $\frac{15^8}{5^8} = 3^8$

ד. $\frac{21^{16}}{3^5 \cdot 7^5} = 21^{11}$

משימה 2: מפרקים חזקה

1. מצאו את הערך של x במשוואות הבאות:

א. $x = 4$ $3^2 \cdot 3^x = 3^6$

ב. $x = 8$ $\frac{3^{12}}{3^x} = 3^4$

ג. $x = 6$ $(3^x)^2 = 3^{12}$

2. כתבו חזקות במקומות הריקים בכל סעיף, כך שהתוצאה 5^{12} תתקבל בשתי דרכים שונות.

א. מכפלות:

$\square \cdot \square = 5^{12}$ $\square \cdot \square = 5^{12}$

דוגמאות לפתרונות אפשריים: $5^0 \cdot 5^{12}$ או $5^3 \cdot 5^9$ או $5^{10} \cdot 5^2$

ב. מנות:

$\frac{\square}{\square} = 5^{12}$ $\frac{\square}{\square} = 5^{12}$

דוגמאות לפתרונות אפשריים: $5^{13} : 5$ או $5^{20} : 5^8$

ג. חזקות של חזקות:

$(\square^{\square})^{\square} = 5^{12}$ $(\square^{\square})^{\square} = 5^{12}$

דוגמאות לפתרונות אפשריים: $(5^3)^4$ או $(5^2)^6$

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שלוש פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

❖ פעילות 1 **חזקות עם בסיסים זהים.**

❖ פעילות 2. **חזקות עם מעריכים זהים.**

❖ פעילות 3 **שטחים וצלעות.**

פעילות 3	פעילות 2	פעילות 1	למי מיועדת הפעילות?
		V	לתלמידים שטעו בשימוש בחוקי החזקות עם בסיסים זהים
	V		לתלמידים שטעו בשימוש בחוקי החזקות עם מעריכים זהים
V			לתלמידים שטעו בפירוק חזקות



פעילות 1: חזקות עם בסיסים זהים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1 **חזקות עם בסיסים זהים**.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1 **חזקות עם בסיסים זהים**

חזקות עם בסיסים זהים

1. השלימו את הטבלה.

פירוק החזקות	מכפלה או מנה של חזקות	חזקה אחת
$(7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7)$	$7^3 \cdot 7^2$	דוגמה: 7^5
$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$		
		2^7
$(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$		
	$6 \cdot 6^5$	
	$4^6 \cdot 4^3$	
$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5}$		

2. בעמודה השמאלית בטבלה מופיעים שלושה חוקים של פעולות בחזקות.

א. השלימו את החוקים החסרים (מניחים כי $a \neq 0$, $b \neq 0$).

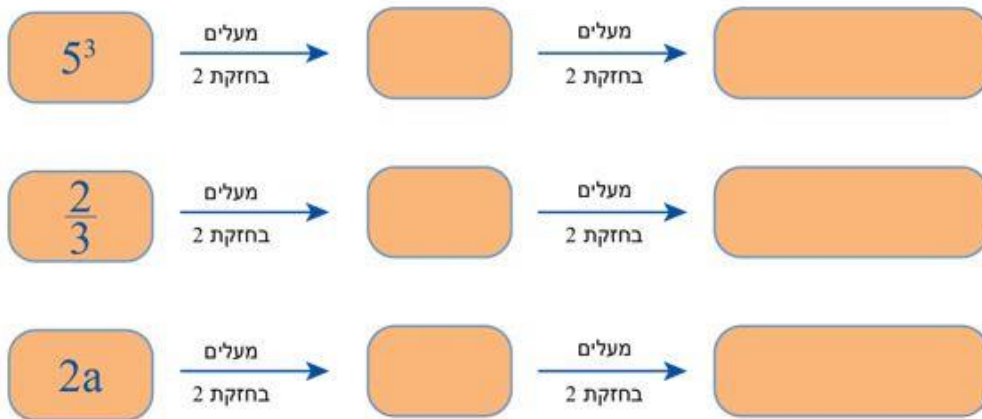
ב. הציגו שתי דוגמאות מספריות לכל חוק.

החוק	דוגמה מספרית א	דוגמה מספרית ב
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$4^2 \cdot 4^7 = 4^9$	דוגמה $3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$
$\frac{a^x}{a^y} = \underline{\hspace{2cm}}$		
$(a^x)^y = \underline{\hspace{2cm}}$		

3. לפניכם לוח כפל. השלימו בו את החזקות החסרות.

•	7	7^3	7^5
7^2			
7^5			
7^8			

4. השלימו חזקות או ביטויים חסרים.



[לפעילות 1 מוגשת](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

❖ אורי וקובי פתרו את התרגילים הבאים:

א. $2^3 \cdot 2^4$

ב. $2^4 \cdot 2^3$

ג. $(2^4)^3$

אורי אמר: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ קובי אמר: התשובה היא 2^{12} כי זו מכפלה.

מי צודק? הסבירו.

מהן התשובות לסעיפים ב' ו- ג? אילו טעויות אפשריות? הציעו סיבות אפשריות לטעויות בתרגילים אלה.

❖ הציעו טעויות אפשריות בתרגילים שבהם בסיס החזקה הוא ביטוי (למשל, בדף הפעילות בתרגיל 4, בשורה

האחרונה, טעויות נפוצות בביצוע הפעולה $(2a)^2$ הן $4a$ או $2a^2$ - במקום $4a^2$).



פעילות 2: חזקות עם מעריכים זהים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 2 **חזקות עם מעריכים זהים**.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 2 חזקות עם מעריכים זהים

חזקות עם מעריכים זהים

1. השלימו את הטבלה.

חזקה	מכפלה של שתי חזקות עם מעריכים זהים	מנה של שתי חזקות עם מעריכים זהים
6^{10}	$2^{10} \cdot 3^{10}$	$\frac{18^{10}}{3^{10}}$
10^6		
		$\frac{20^{10}}{2^{10}}$
	$5^6 \cdot 4^6$	
12^{12}		

דוגמה

2. כתבו את החזקה 32^4 לפי התיאור הנתון בכל סעיף.

דוגמה: כמכפלה של שתי חזקות עם מעריכים זהים: $2^4 \cdot 16^4$

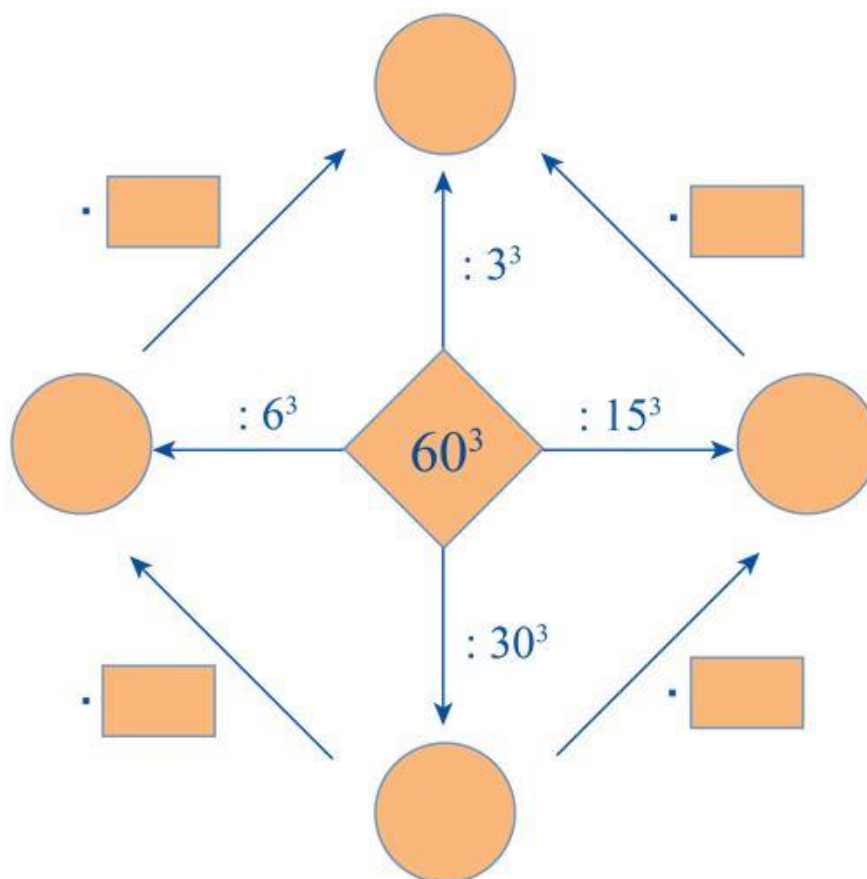
- כמנה של שתי חזקות עם מעריכים זהים: _____

- כחזקה עם בסיס 2: _____

- כמכפלה של שתי חזקות עם בסיס 2: _____

- כמנה של שתי חזקות עם בסיס 2: _____

3. השלימו את החזקות המתאימות בעיגולים ובמלבנים הריקים.



בדיקה: מכפלת החזקות שרשמתם במלבנים היא מיליון.

לפעילות 2 מוגשת

דיון

לסיכום:

שערו אילו מבין השוויונות הבאים נכונים. הסבירו והכלילו אם אפשר.

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 + 3^4$$

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$$

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3$$

$$(2 \cdot 3)^4 = 2 \cdot 3^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 2^4 - 3^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3^4}$$

$$(5ab)^3 = 125a^3b^3$$

$$(5ab)^3 = 5a^3b^3$$

$$(5ab)^3 = 5ab^3$$

$$\frac{a}{8b} = \frac{2a}{16b}$$

$$\frac{a}{8b} = \frac{a}{2^3b}$$

$$\frac{a}{8b} = \frac{a}{(2b)^3}$$



פעילות 3: שטחים וצלעות

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 3 **שטחים וצלעות**.
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 3 שטחים וצלעות

שטחים וצלעות

1. בעמודה הימנית של הטבלה משורטטים שלושה מלבנים.
הביטוי הרשום בתוך כל מלבן מייצג את הערך המספרי של שטחו ביחידות שטח.
כתבו שתי דוגמאות לביטויים המתאימים לאורכי הצלעות בכל סעיף.
(מניחים כי $a > 0$, והביטויים לאורכי הצלעות מייצגים ערכים מספריים של יחידות אורך.)

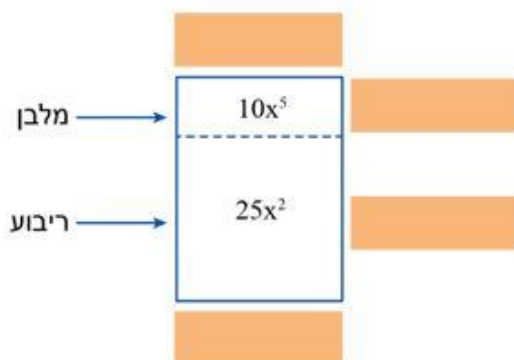
שטח המלבן	דוגמה 1	דוגמה 2
a^7	צלע _____ צלע _____	צלע _____ צלע _____
$18a^9$	צלע _____ צלע _____	צלע _____ צלע _____
$12a^2$	צלע _____ צלע _____	צלע _____ צלע _____

2. לפניכם חלוקות של מלבן גדול למלבנים קטנים יותר.

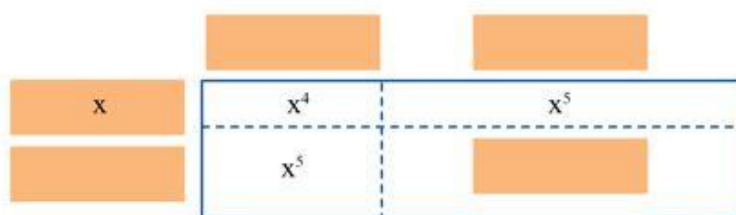
הביטויים בשרטוטים הבאים מייצגים ערכים מספריים של מידות אורך או של מידות שטח.

השלימו ביטויים במקומות החסרים (מניחים כי $x > 0$).

א.

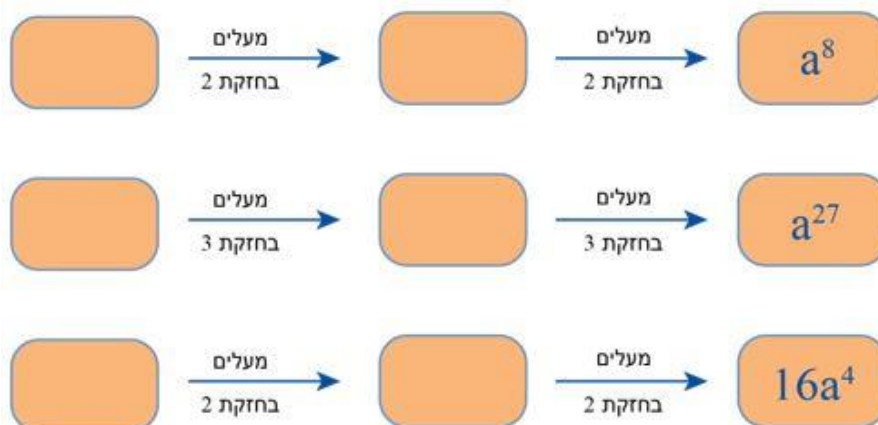


ב.



3. לפניכם שלוש "שרשרות" של העלאה בחזקה.

השלימו ביטויים חסרים לפי הביטוי שבסוף ה"שרשרת".



[לפעילות 3 מוגשת](#)

לסיכום דנים בנקודות הבאות:

❖ אוספים תשובות של תלמידים עבור ה"שרשרת" הבאה:



❖ מבקשים להשלים את ה"שרשרת" הבאה:



❖ מבקשים להשלים את ה"שרשרת" בשתי דרכים שונות.

