



תיק משימטיקה

נקודות חשובות

ונקודות קיצון

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימת ההערכה
5	נקודות חשובות
6	הערכת תוצרי התלמידים
8	פעילות בעקבות ההערכה
8	דף פעילות נקודות קיצון

נקודות חשודות ונקודות קיצון



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקבוע מתי נקודה החשודה כנקודת קיצון היא אכן נקודת קיצון. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים לקבוע אם נקודה שבה הנגזרת של פונקציית פולינום מתאפסת, היא נקודת קיצון או נקודת פיתול.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: 10-15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: 20-30 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

- לצורך עבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):
- דף המשימה **נקודות חשודות**.
- לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
- דף הפעילות **נקודות קיצון**.



רקע

חקירת פונקציות כוללת בין השאר מציאה של נקודות קיצון. נקודות "החשודות" כנקודות קיצון הן הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת. אולם לא כל הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת הן בהכרח נקודות קיצון, שכן הן עשויות להיות נקודות פיתול. ישנן דרכים שונות לבדוק אילו מהנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת הן נקודות קיצון. לדוגמה: השוואת ערכי הפונקציה בנקודות בסביבת הנקודה החשודה כקיצון, בדיקת סימני נגזרת הפונקציה בסביבת הנקודה החשודה כקיצון, או בדיקת ערך הנגזרת השנייה בנקודה החשודה כקיצון.¹

ישנם תלמידים המתייחסים לכל נקודה שבה הנגזרת מתאפסת כאל נקודת קיצון, בלי להתייחס לאפשרות שהנקודה יכולה להיות נקודת פיתול. התיק **נקודות חשודות ונקודות קיצון** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים אלו ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה **נקודות חשודות**.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

¹ דרך זו פחות מומלצת מבחינה דידיקטית בשלב הראשון של חקירת פונקציות, משום שהיא דורשת ידע בנושא הקשר בין סימן הנגזרת השנייה לקעירות הפונקציה, ידע שאין לתלמידים בשלב זה.



עבודה על משימת ההערכה

במשימה **נקודות חשודות** התלמידים נדרשים להתייחס לפתרון של תלמיד, שקבע שנקודות שבהן הנגזרת של פונקציית פולינום מתאפסת הן נקודות קיצון בלי לבדוק את האפשרות שהן עשויות להיות נקודות פיתול.

נקודות חשודות

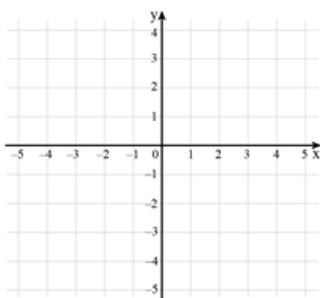
המורה רשמה על הלוח את הפונקציה $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$. היא ביקשה למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

אור כתב כך:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$$
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$
$$12x^3 + 12x^2 = 0$$
$$12x^2(x+1) = 0$$
$$x = -1, 0$$

אור המשיך וכתב:

קיבלנו שתי נקודות שבהן הנגזרת שווה ל-0, ולכן נשאר לנו למצוא איזו מהן היא נקודת מינימום ואיזו מהן היא נקודת מקסימום.



$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 - 1 = -2$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 - 1 = -1$$

$$\min(-1, -2)$$

$$\max(0, -1)$$

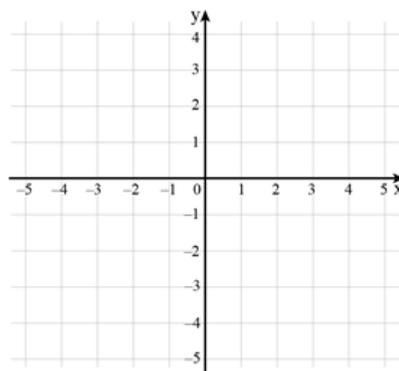
ברור ש $-2 < -1$ ולכן:

א. שרטטו במערכת הצירים שמשמאל את הגרף על פי תשובתו של אור.

ב. האם זהו הגרף הנכון? אם כן – נמקו מדוע. אם לא – שרטטו את הגרף הנכון והסבירו מה הטעות של אור.

הסבר:

שרטוט:





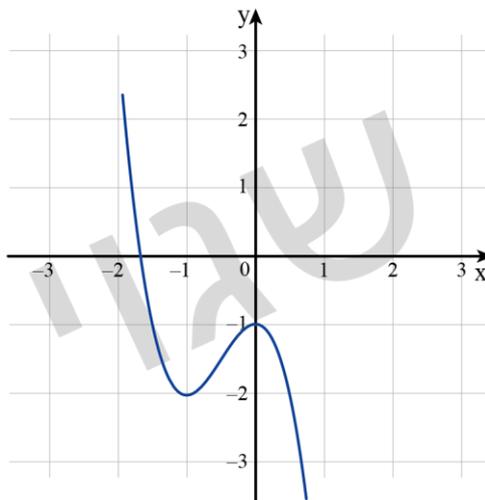
הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיין התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

נקודות חשודות				שם התלמיד/ה
הערות	קבעו שאור טועה		קבעו שאור צודק	
	נימקו או שרטטו באופן שגוי	נימקו ושרטטו נכון		
אין נימוק, גרף שגוי	V			תלמיד 1
		V		תלמיד 2
		V		תלמיד 3
		V		תלמיד 4
				סך-הכל

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

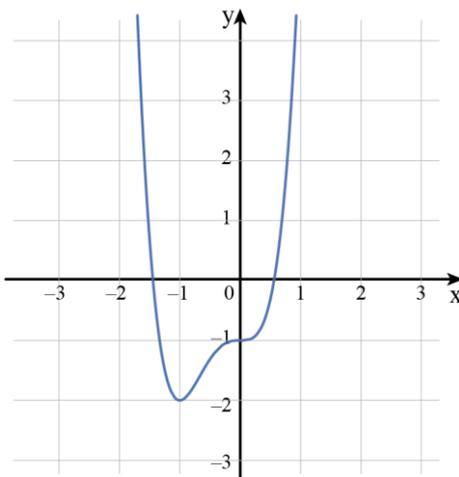
הגרף השגוי שאור שרטט:



האם זהו הגרף הנכון?

לא. אור מניח שבנקודה שבה הנגזרת מתאפסת, קיימת בהכרח נקודת קיצון. זוהי הנחה שגויה. הנקודה שבה מתאפסת הנגזרת יכולה להיות נקודת קיצון, ויכולה להיות נקודת פיתול. היה על אור לבדוק בעזרת "טבלת שכנים" בפונקציה או בנגזרת, למשל, אם הנקודה שאיפסה את הנגזרת היא אכן נקודת קיצון, ולא להסתפק בבדיקת ערכי ה- y של הנקודות החשודות כקיצון.

הגרף הנכון:





פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות הבאה מיועדת לתלמידים שלא התייחסו לאפשרות שנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת עשויות להיות נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף הפעילות **נקודות קיצון**.
- דיון מסכם.

מהלך הפעילות

- עבודה על דף הפעילות **נקודות קיצון**.

עם פתרון הבעיות בדף זה התלמידים נוכחים לראות שלא כל נקודה שבה השיפוע 0 היא נקודת קיצון. זאת באמצעות השוואת מספר נקודות הקיצון למספר הנקודות שבהן השיפוע 0.

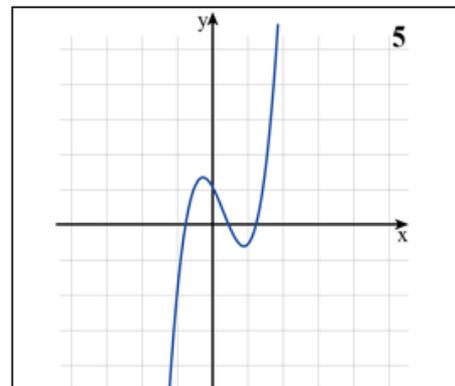
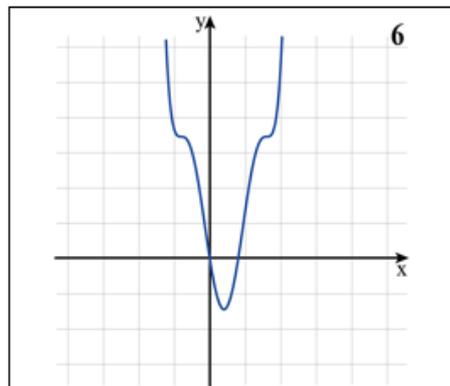
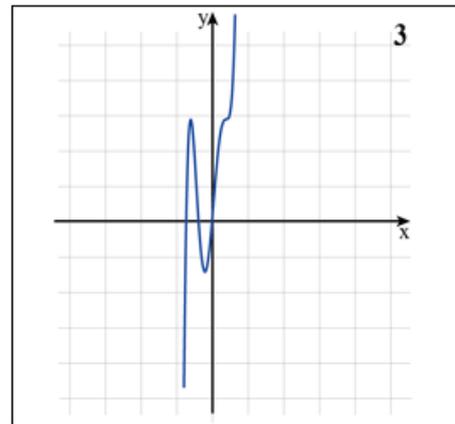
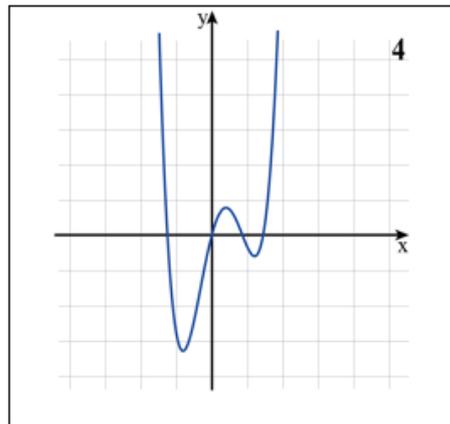
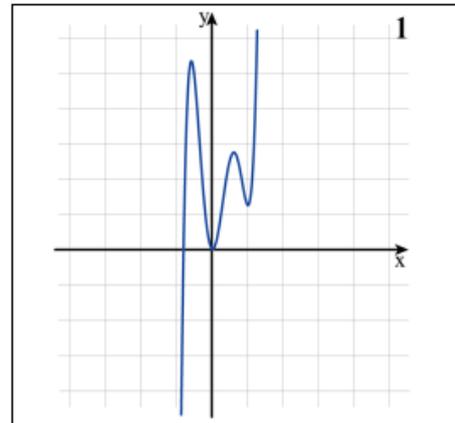
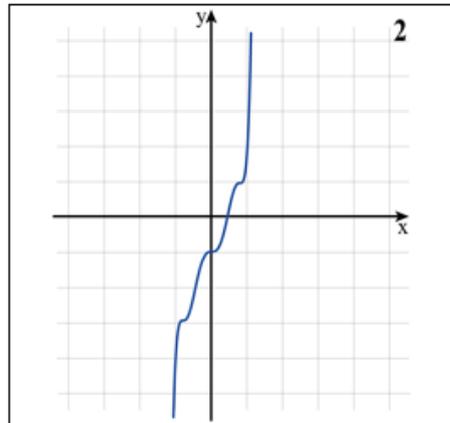
נקודות קיצון

1. לפניכם ארבע פונקציות. ענו על השאלות הבאות בהתייחס לכל אחת מהן.

מספר הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת	מספר נקודות הקיצון של הפונקציה	מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלו) וקבעו את סוגן.	← המשימה
			↓ הפונקציה
			$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 23$
			$g(x) = x^3 - 3x$
			$h(x) = x^3$
			$k(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 2$

2. נתונה פונקציה $f(x)$. ידוע שהפונקציה הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת ב-3 נקודות שונות.

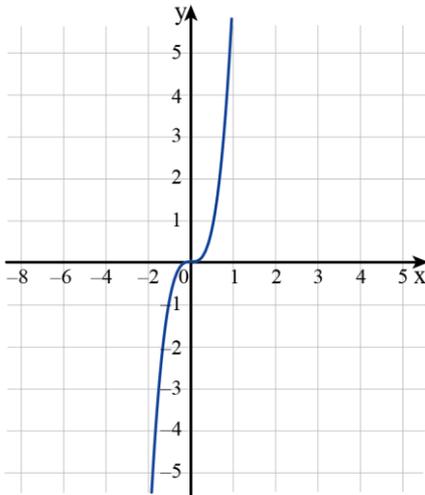
קבעו אם כל אחד מהגרפים הבאים יכול לתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו.



• **דין מסכם**

ניתן לסכם את הפעילות באמצעות הנקודות הבאות:

- על מנת למצוא נקודות קיצון פנימיות יש למצוא את כל הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת. לנקודות אלו קוראים "נקודות חשודות לקיצון".



- הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת (הנקודות ה"חשודות לקיצון"), הן לא בהכרח נקודות קיצון. חלק מהן עשויות להיות נקודות פיתול שסביבן הגרף "שטוח" כמו בנקודה $(0,0)$ בפונקציה $y = x^3$ (ראו שרטוט).
- ישנן שיטות שונות הבודקות אם נקודה "חשודה" היא אכן נקודת קיצון ואת סוג הקיצון. כל לומד יבחר את הדרך העדיפה עליו ובלבד שתתקיים בדיקה כלשהי.