תיק משימטיקה

פונקציה מונוטונית

תוכן העניינים

מטרות התיק 3

זמני עבודה משוערים 3

החומרים והעזרים הדרושים 3

רקע 4

הצעה למהלך העבודה 4

עבודה על משימת ההערכה 5

תחומי עלייה וירידה 5

הערכת תוצרי התלמידים 6

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה 7

פעילות 1 7

דף פעילות 1 **מהי פונקציה מונוטונית?** 8

פעילות 2 9

דף פעילות 2 **פונקציה יורדת פונקציה עולה** 10

פונקציה מונוטונית

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים למצוא תחומי עלייה וירידה של פונקציית פולינום מונוטונית ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לקבוע אם פונקציית פולינום היא מונוטונית.
- לקבוע אם פונקציית פולינום מונוטונית היא פונקציה עולה או פונקציה יורדת.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 40 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימה ***תחומי עלייה וירידה***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות 1 ***מהי פונקציה מונוטונית?***

לפעילות 2

- דף פעילות 2 ***פונקציה יורדת, פונקציה עולה***.

רקע

אחד הנושאים המרכזיים בלימוד אנליזה הוא חקירת פונקציות. במהלך חקירת פונקציות עוסקים בין היתר במציאת תחומי העלייה והירידה שלהן. קביעת תחומי העלייה והירידה של פונקציות גזירות המוגדרות על כל מתבססת לעתים קרובות על מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה באמצעות השוואת הנגזרת $f'(x)$ לאפס וקביעת סוג הקיצון (מקסימום או מינימום). באמצעות מידע זה קל להסיק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. כאשר אין פתרון למשוואה $f'(x)=0$, לפונקציה אין נקודות קיצון והיא עולה בכל התחום או יורדת בכל התחום, כלומר, היא מונוטונית.

ישנם תלמידים המתקשים בקביעת תחום העלייה או הירידה במקרה של חקירה של פונקציית פולינום מונוטונית. לדוגמה, כאשר אין פתרון למשוואה $f'(x)=0$, תלמידים טוענים לעתים שלפונקציה אין תחומי עלייה וירידה כלל, או שהם לא יודעים איך להמשיך מנקודה זאת. תגובה דומה של תלמידים מתקבלת גם כאשר הם מוצאים שאין לפונקציה נקודות קיצון. בנוסף, גם במקרים שבהם התלמידים מצאו שהפונקציה מונוטונית – כלומר עולה בכל התחום או יורדת בכל התחום – גם אז קיים לעתים קושי בקביעה אם היא עולה בכל התחום או יורדת בכל התחום.

התיק ***פונקציה מונוטונית*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***תחומי עלייה וירידה***.
- הערכת תוצרי התלמידים
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***תחומי עלייה וירידה*** התלמידים מתבקשים לעזור לגיא למצוא את תחומי העלייה והירידה של פונקציה, שבהשוואת הנגזרת שלה, שהיא פונקציה ריבועית, לאפס מתקבלת דיסקרימיננטה שלילית, ולכן אין לנגזרת נקודות אפס.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

תחומי עלייה וירידה

מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=-x^3+x^2-2x+1$ המוגדרת לכל x ממשי?

גיא התחיל לפתור.

הוא רשם:

$$f'(x)=-3x^2+2x-2$$

$$-3x^2+2x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)}}{2\cdot(-3)}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{-6}$$

האם תוכלו לעזור לגיא לסיים את פתרון המשימה?

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם תוכלו להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	פתרון נכון	מצאו שהפונקציה מונוטונית אך לא מצאו שהיא יורדת	לא מצאו שהפונקציה מונוטונית	הערות
תלמיד 1		V		
תלמיד 2	V			
תלמיד 3			V	
סך-הכל				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה. להלן מוצגות שתי גישות לפתרון:

פתרון המבוסס על חיפוש נקודות הקיצון של הפונקציה

למשוואה $-3x^2+2x-2=0$ אין פתרון

$\Downarrow$

לפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות אפס

$\Downarrow$

לפונקציה הנתונה f אין נקודות קיצון

$\Downarrow$

הפונקציה f עולה לכל x או יורדת לכל x בתחום.
נבדוק את סימן הפונקציה הנגזרת בנקודה כלשהי,
למשל ב- $x=0$, ונקבל $f'(0)=-2$

$\Downarrow$

$f'(0)<0$

$\Downarrow$

הפונקציה הנתונה f יורדת בכל תחום ההגדרה

פתרון המבוסס על בדיקת תחומי חיוביות/שליליות של הפונקציה הנגזרת

למשוואה $-3x^2+2x-2=0$ אין פתרון

$\Downarrow$

לפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות אפס

$\Downarrow$

הפונקציה הנגזרת f' היא רק חיובית או רק שלילית
בכל תחום הגדרתה.
נציב מספר כלשהו, למשל $x=0$ ב- $f'(x)$
ונקבל $f'(0)=-2$

$\Downarrow$

בעבור כל x בתחום ההגדרה $f'(x)<0$

$\Downarrow$

הפונקציה הנתונה f יורדת בכל תחום ההגדרה

<u>הערה</u>: כדי לבדוק אם הפונקציה עולה או יורדת, אפשר לחשב את ערכי הפונקציה בשתי נקודות כלשהן. למשל, $f(0)=1$, $f(1)=-1$ כלומר, $f(0)>f(1)$, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שלא מצאו שהפונקציה היא מונוטונית.	V	V
לתלמידים שמצאו שהפונקציה מונוטונית, אך התקשו בקביעה שהיא יורדת בכל תחום הגדרתה.		V

פעילות 1

מטרת הפעילות המוצעת היא לסייע ביצירת תמונת מושג ויזואלית בעבור פונקציה מונוטונית באמצעות למידה מתוך התנסות. זאת כדי שהתלמידים יוכלו לקשר בין פונקציה שאין לה נקודות קיצון לבין תמונה ויזואלית של פונקציה מונוטונית.

שלבי הפעילות

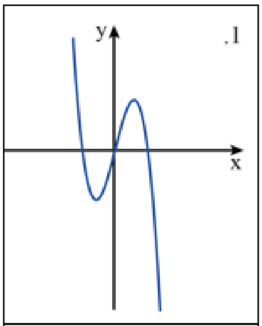
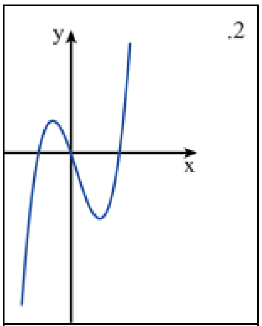
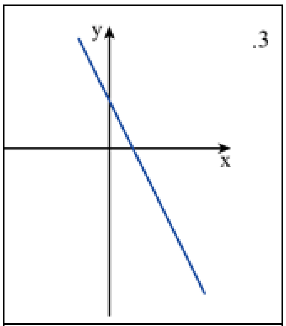
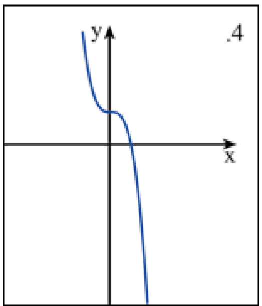
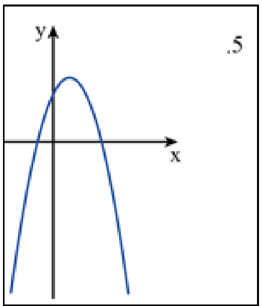
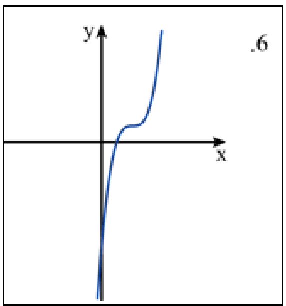
- עבודה על דף פעילות 1 ***מהי פונקציה מונוטונית?***
- דיון וסיכום.

מהלך הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***מהי פונקציה מונוטונית?***

מהי פונקציה מונוטונית?

א. לפניכם גרפים של שש פונקציות. תארו את ההתנהגות של כל פונקציה לפי הדוגמה של גרף 1.

גרף הפונקציה			
תיאור התנהגות הפונקציה	בהתחלה הפונקציה יורדת, בהמשך היא עולה ואחר כך שוב יורדת		
גרף הפונקציה			
תיאור התנהגות הפונקציה			

ב. רשמו בכל אחד מהתאים בטבלה הבאה את מספרי הפונקציות המתאימות:

הפונקציה	**יש לפונקציה נקודות קיצון**	**אין לפונקציה נקודות קיצון**
עולה בכל תחום ההגדרה		
יורדת בכל תחום ההגדרה		
עולה בחלק מתחום ההגדרה ויורדת בחלק מתחום ההגדרה		

ג. אם לפונקציה אין נקודות קיצון, אז היא ______________________

- **דיון וסיכום**
  - מבקשים מהתלמידים להציע מסקנות שהגיעו אליהן מדף הפעילות. לדוגמה:
    - בכל נקודה שבה פונקציית פולינום משנה כיוון מעלייה לירידה (או להפך), יש לה נקודת קיצון פנימית.
    - בכל נקודת קיצון פנימית הפונקציה משנה כיוון מעלייה לירידה או להפך.
    - אם פונקציית פולינום עולה בכל תחום הגדרתה או יורדת בכל תחום הגדרתה – אין לה נקודות קיצון.
    - ניתן להסיק שאם לפונקציית פולינום אין נקודות קיצון פנימיות, אז היא עולה בכל תחום הגדרתה או יורדת בכל תחום הגדרתה; שכן לו הייתה משנה כיוון מעלייה לירידה או להפך, אז באותה נקודה הייתה לה נקודת קיצון, וזאת בסתירה לנתון.
  - מבקשים מהתלמידים לשרטט גרפים של פונקציות שהן רק עולות או רק יורדות בכל תחום ההגדרה, ולדון במאפיינים שונים שלהן. לדוגמה:
    - האם קיימת פונקציה ריבועית שהיא פונקציה מונוטונית? אם כן, תנו דוגמה. אם לא, נמקו.
    - האם קיימת פונקציית פולינום ממעלה שלישית שהיא פונקציה מונוטונית? אם כן, תנו דוגמה. אם לא, נמקו.
  - דיון ברמה מתקדמת יותר:
    - האם קיימת פונקציית פולינום ממעלה זוגית שהיא פונקציה מונוטונית בכל תחום ההגדרה? אם כן, תנו דוגמה. אם לא, נמקו.
    - ניתן לבחון גם פונקציות רציפות בתחום ההגדרה שלהן, פונקציות שאינן מוכרות לתלמידים כגון פונקציה מעריכית או פונקציית שורש.

פעילות 2

מטרת הפעילות המוצעת היא לסייע בקביעת תחומי עלייה וירידה של פונקציה שאין לה נקודות קיצון.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 ***פונקציה יורדת, פונקציה עולה***.
- דיון וסיכום.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 2 *פונקציה יורדת, פונקציה עולה*.**

בדף הפעילות יש ארבע שאלות. בכל אחת מהן נתונה פונקציה רציפה שאין לה נקודות קיצון פנימיות. התלמידים מתבקשים לקבוע עבור כל אחת אם היא פונקציה עולה או יורדת בתחום ההגדרה.

בשאלות 1 ו- 3 ניתן לקבוע על פי ערכי הפונקציה בשתי נקודות שונות בתחום ההגדרה. בשאלה 2 על פי סימן הנגזרת, ובשאלה 4 אפשר לקבוע בשתי הדרכים.

פונקציה יורדת, פונקציה עולה

1. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת בקטע הסגור [2,7] כלומר $2 \le x \le 7$.

נתון כי לפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות בקטע זה ובנוסף $f(3)=5$ ו- $f(5)=2$.

לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם.

- הפונקציה עולה בתחום ההגדרה.
- הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה.
- אי אפשר לדעת.

2. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נתון כי לפונקציה אין נקודות קיצון, ושיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ הוא 17.

לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם.

- הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.
- הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.
- אי אפשר לדעת.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2-x}{(x-5)^2}$ בתחום $x>5$.

נתון כי לפונקציה אין נקודות קיצון.

א. לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם	ב. לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם
○ הפונקציה עולה בתחום ההגדרה ○ הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה ○ אי אפשר לדעת	○ $f(20)<f(15)$ ○ $f(20)>f(15)$ ○ $f(20)=f(15)$
נימוק:	נימוק:

4. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+2x-7$.

נתון כי לפונקציה אין נקודות קיצון.

א. לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם	ב. לפניכם שלושה היגדים. קבעו איזה מהם נכון ונמקו את תשובותיכם
○ הפונקציה עולה בתחום ההגדרה ○ הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה ○ אי אפשר לדעת	○ $f'(1)<0$ ○ $f'(1)>0$ ○ $f'(1)=0$
נימוק:	נימוק:

- **דיון וסיכום**

מבקשים מהתלמידים להציע מסקנות שהגיעו אליהן מדף הפעילות. לדוגמה:

- נתונה פונקציה רציפה שאין לה נקודות קיצון, ונתון $a>b$ וגם $f(a)>f(b)$, אז הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.
- נתונה פונקציה רציפה שאין לה נקודות קיצון, ונתון $a>b$ וגם $f(a)<f(b)$, אז הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.
- נתונה פונקציה גזירה שאין לה נקודות קיצון, וערך הפונקציה הנגזרת בנקודה כלשהי על גרף הפונקציה הוא שלילי, אז הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.
- נתונה פונקציה גזירה שאין לה נקודות קיצון, וערך הפונקציה הנגזרת בנקודה כלשהי על גרף הפונקציה הוא חיובי, אז הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.