



תיק משימטיקה

מציאת משפט מתאים

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות ההערכה
5	משימה 1 שטחים שווים
5	משימה 2 חישובי שטחים
6	משימה 3 רשימת משפטים
7	הערכת תוצרי התלמידים
9	פעילות בעקבות ההערכה
10	דף פעילות 1 ממשיכים לחשב שטחים
11	דף פעילות 2 אסטרטגיה של פתרון

מציאת משפט מתאים



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במהלך פתרון בעיות בגיאומטריה באסטרטגיה של חיפוש משפטים הקשורים לתוכן הבעיה ובחירת משפט מתאים מבניהם, ולהציע מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק בשטחי משולשים¹.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לנסח את המשפטים המרכזיים שנלמדו והקשורים לנושא שטחי משולשים.
- לזהות מבין המשפטים הקשורים לנושא, את אלה שעשויים להיות רלוונטיים לפתרון בעיה נתונה ולנסות להשתמש בהם.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: כ- 30 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 50 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

• דפי המשימות

○ משימה 1 **שטחים שווים**.

○ משימה 2 **חישובי שטחים**.

○ משימה 3 **רשימת משפטים**.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

• דף פעילות 1 **ממשיכים לחשב שטחים**.

• דף פעילות 2 **אסטרטגיה של פתרון**.

¹ נדרש ידע קודם בפרופורציה ודמיון משולשים.



רקע

במהלך לימודי הגאומטריה בחטיבת הביניים ובתיכון, עוסקים רבות בפתרון בעיות. פתרון בעיות מצריך שימוש באסטרטגיות מגוונות. לדוגמה, אסטרטגיה של בחירה מבין משפטים שנלמדו בעבר, משפטים אשר קשורים לנושא בו עוסקת הבעיה, ובדיקת האפשרות להשתמש בהם לצורך הפתרון.

קושי נפוץ של תלמידים בהקשר זה הוא היעדרה של אסטרטגיה זו מארגז הכלים שלהם. בנוסף, לעיתים תלמידים אינם נעזרים באסטרטגיה זו מפני שהם אינם יודעים או אינם זוכרים משפטים הקשורים לנושא שבו עוסקת הבעיה, אשר עשויים להופיע בפרקי לימוד שונים. למשל, משפטים הקשורים לבעיות העוסקות בשטחי משולשים נלמדים בפרקי לימוד העוסקים בשטחי מצולעים, בדמיון משולשים, בתיכון במשולש, ועוד. לכן, כשבאים לפתור בעיה הקשורה בשטחי משולשים יש להכיר את מגוון המשפטים הקשורים בכך ולזהות אילו מבין המשפטים עשויים לעזור בפתרון הבעיה.

התיק **מציאת משפט מתאים** עוסק בנושא שטחי משולשים. התיק נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים במהלך פתרון בעיות בשימוש באסטרטגיה שהוזכרה לעיל ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות הערכה:
 - משימה 1 **שטחים שווים**.
 - משימה 2 **חישובי שטחים**.
 - משימה 3 **רשימת משפטים**.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.



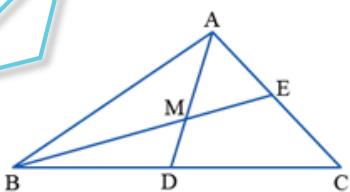
עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- משימה 1 **שטחים שווים**.
- משימה 2 **חישובי שטחים**.
- משימה 3 **רשימת משפטים**.

המשימות מזמנות שימוש באסטרטגיה של חיפוש משפטים מתאימים מבין אלה שכבר נלמדו והקשורים לשטחי משולשים במצבים מגוונים.

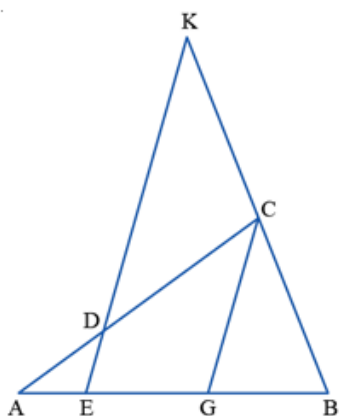
המשימות מיועדות לעבודה עצמית של התלמידים. את משימה 3 מומלץ לתת לתלמידים רק לאחר איסוף התשובות לשתי המשימות הראשונות. זאת כדי לזהות תלמידים שלא השתמשו באסטרטגיה למרות שהם מכירים משפטים מתאימים.



שטחים שווים

נתון: AD ו- BE תיכונים במשולש ABC.

הוכיחו: שטח משולש ADC שווה לשטח משולש ABE.



חישובי שטחים

במשולש ABC הנקודות E ו- G נמצאות על הצלע AB. המשכי הקטעים ED ו- BC נחתכים בנקודה K.

נתון: $EG = GB = 2AE$

$DE \parallel CG$

$S_{\triangle ADE} = 3 \text{ סמ}^2$

הוכיחו:

א. שטח משולש ACG שווה ל- 27 סמ²

ב. שטח משולש CGB שווה ל- 18 סמ²

רשימת משפטים

רשמו משפטים ועקרונות רבים ככל האפשר, הקשורים לחישוב שטחי משולשים, ליחס בין שטחי משולשים או לשוויון שטחי משולשים.



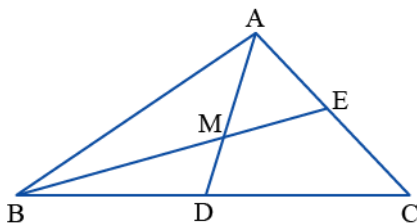
הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

משימה 3		משימה 2 חישובי שטחים						משימה 1			שם התלמיד/ה
רשימת משפטים		סעיף ב'			סעיף א'			שטחים שווים			
כתבו פחות מ-3 משפטים על שטחי משולשים	כתבו לפחות 3 משפטים על שטחי משולשים	אחר	לא השתמשו במשפטים/מתאימים/לא פתרו	פתרו נכון	אחר	לא השתמשו במשפטים/מתאימים/לא פתרו	פתרו נכון	אחר	לא השתמשו במשפטים/מתאימים/לא פתרו	פתרו נכון	
V		משפט נכון פתרון לא					V			V	תלמיד 1
V			V				V			V	תלמיד 2
	V		V				V			V	תלמיד 3
	V			V			V			V	תלמיד 4
											סך-הכל

הערה: העמודה "אחר" מיועדת לסימון תלמידים שהשתמשו במשפטים מתאימים אך טעו במהלך הפתרון או לכל הערה אחרת של המורה.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות² שלהלן:



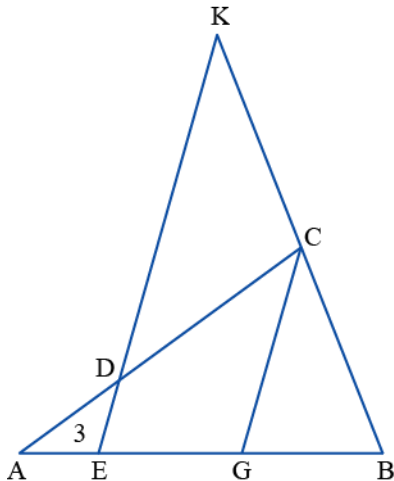
פתרון משימה 1 שטחים שווים

שטח משולש ADC שווה למחצית שטח משולש ABC (התיכון AD במשולש ABC מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שטח).
באמצעות אותו משפט מסיקים ששטח משולש ABE שווה למחצית שטח משולש ABC.

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADC} \quad \Leftarrow$$

² פתרונות אלו הם פתרונות אפשריים, אך ייתכנו דרכים נוספות לפתרון, ועל כן יש להניח שתלמידים שונים ישתמשו במשפטים שונים.

פתרון משימה 2 חישובי שטחים



א. $\triangle ADE \sim \triangle ACG$ לפי משפט דמיון ז.ז.

($\angle ADE = \angle ACG$ משותפת ו- $\angle ADE = \angle ACG$ כי $DE \parallel CG$)

$$\text{יחס הדמיון: } \frac{AG}{AE} = 3 \text{ (נתון)}$$

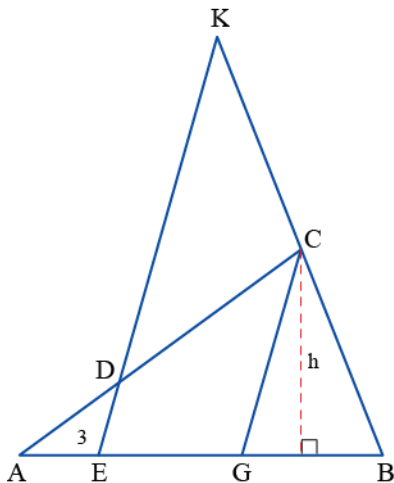
↓

$$\text{(יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון). } \frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle ADE}} = 9$$

↓

$$S_{\triangle ACG} = 9 \cdot S_{\triangle ADE} = 9 \cdot 3 = 27$$

שטח משולש ACG שווה ל- 27 סמ"ר.



ב. האנך מנקודה C לצלע AB הוא גובה משותף h למשולשים CGB ו- CAG.

לכן היחס בין שטחי המשולשים CGB ו- CAG הוא כיחס הצלעות:

$$\left(\frac{S_{\triangle CGB}}{S_{\triangle CAG}} = \frac{\frac{h \cdot GB}{2}}{\frac{h \cdot AG}{2}} = \frac{GB}{AG} \right) \text{ (כי לפי נוסחת השטח)}$$

$$\frac{S_{\triangle CGB}}{S_{\triangle CAG}} = \frac{GB}{AG} = \frac{2}{3}$$

↓

$$S_{\triangle CGB} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle CAG} = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$$

שטח משולש CGB שווה ל- 18 סמ"ר.

פתרון משימה 3 רשימת משפטים

להלן הצעה לרשימת משפטים ועקרונות:

- נוסחה לחישוב שטח משולש.
- שטחי משולשים חופפים שווים זה לזה.
- יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.
- היחס בין אורכי הגבהים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון.
- יחס בין שטחי משולשים בעלי גובה משותף או גבהים שווים באורכם, שווה ליחס בין אורכי הצלעות שאליהן יורד הגובה.
- יחס בין שטחי משולשים בעלי צלע משותפת או צלעות שוות באורכן, שווה ליחס בין אורכי הגבהים לצלעות אלה.
- תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווים שטח.



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים אשר לא עשו שימוש במהלך פתרון הבעיות באסטרטגיה של חיפוש משפטים מתאימים מבין אלה שכבר נלמדו, אך הם מכירים משפטים אלה. כלומר, תלמידים המופיעים בטבלת ההערכה בעמודה המודגשת של משימה 3 ולפחות בשתי עמודות מודגשות נוספות במשימות 1 ו-2.

שלבי הפעילות

- דיון במשימות ההערכה.
- עבודה על דף פעילות 1 **ממשיכים לחשב שטחים**.
- עבודה על דף פעילות 2 **אסטרטגיה של פתרון**.

מהלך הפעילות

- **דיון במשימות ההערכה**
 - רושמים על הלוח רשימה מסכמת של המשפטים והעקרונות שהתלמידים הציעו במשימה 3. במידת הצורך אפשר להוסיף משפטים שהתלמידים לא הזכירו (ניתן להיעזר ברשימת המשפטים מתוך פתרון המשימות).
 - שאלות לדיון
 - אילו משפטים מהרשימה מתאימים לפתרון משימה 1? הסבירו.
 - אילו משפטים מהרשימה מתאימים לפתרון משימה 2 א' הסבירו. אילו משפטים מהרשימה מתאימים לפתרון משימה 2 ב'? הסבירו.
 - איזה יתרון יש לשימוש באסטרטגיה של איסוף משפטים המתאימים לנושא ובחירת המשפטים המתאימים מביניהם?
 - **הערה:** אמנם במשימה זו השלב של חיפוש המשפטים המתאימים לנושא התבצע באמצעות כתיבת רשימה ממשית של משפטים. אך אין הכוונה לעשות זאת בפועל בפתרון בעיות אחרות, אלא ליצור את הרשימה הזו באופן מודע בתהליך החשיבה הקודם לכתיבת הפתרון
 - איך נדע במהלך העבודה אילו משפטים כדאי לבחור מתוך שלל המשפטים הקשורים בשטחי משולשים?
 - כדאי להצביע על כך שבמשימות קיימים סימנים שיכולים לעזור בבחירת המשפטים המתאימים. למשל, נתון: DE II CG. קטע בתוך המשולש המקביל לאחת מצלעות המשולש יוצר זוג משולשים דומים (מדוע?). דבר זה מכון את הפותרים לנסות ולהשתמש במשפט שקשור לדמיון משולשים. דוגמה נוספת: המשולשים GCB -I ACG הם בעלי קודקוד משותף וצלעות המונחות על אותו ישר. מבנה כזה מעיד על משולשים בעלי גובה משותף, ועל כן ניתן לדעת את יחסי השטחים שלהם באמצעות יחסי הצלעות שאליהם יורד הגובה. כלומר, לעיתים קרובות הנתונים עצמם מציעים כיוון לדרך הפתרון.
 - סיכום הדיון: אסטרטגיה אפשרית לפתרון בעיות בגיאומטריה היא לבדוק את הנתונים ומה צריך להוכיח, לחפש משפטים הקשורים בנתונים ובמה שצריך להוכיח ואז לנסות ולראות אם וכיצד משפט מסוים עשוי לעזור בפתרון.

• עבודה על דף פעילות 1 ממשיכים לחשב שטחים

בדף פעילות זה נתון מבנה גיאומטרי זהה לזה שבמשימה 2. יש לחשב את שטחי שאר המשולשים בשרטוט תוך כדי שימוש ברשימת המשפטים שהתהוותה בדיון. מטרת הדף לאפשר לתלמידים להתנסות בפתרון בעיה גיאומטרית תוך כדי שימוש באסטרטגיה של בחירת המשפט המתאים מתוך אוסף משפטים הקשורים לנושא. בשלב זה חלק מהתלמידים עוד לא ניסח רשימה מלאה באופן עצמאי ורק מתנסה בפתרון הבעיות באמצעות הרשימה הקיימת.

ממשיכים לחשב שטחים

במשולש ABC הנקודות E ו-G נמצאות על הצלע AB
כך ש: $EG = GB = 2AE$
נתון: $CG \parallel DE$
 $S_{\triangle ADC} = 3$ סמ"ר
 $S_{\triangle ACG} = 27$ סמ"ר
 $S_{\triangle CGB} = 18$ סמ"ר

המשכי הקטעים ED ו-BC נחתכים בנקודה K.

א. חשבו את שטח המשולש KDC (רמז: חשבו קודם את שטח המשולש KEB). נמקו את תשובתכם.

ב. חשבו את שטח המשולש AKD (רמז: חשבו קודם את שטח המשולש AKE). נמקו את תשובתכם.

ג. **למתקדמים** - חשבו את שטח המשולש AKC בשתי דרכים שונות.

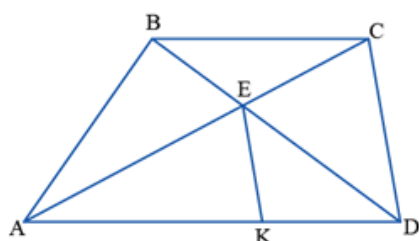
• עבודה על דף פעילות 2 אסטרטגיה של פתרון

דף פעילות זה נועד ליישום ותרגול העקרונות שנלמדו. ניתן להעביר אותו במועד אחר ולא בהכרח ברצף של המערך הנ"ל. הדף מתאים לעבודה עצמית או בזוגות.

בשלב זה התלמידים יוכלו להתנסות באופן מלא בשימוש באסטרטגיה של איסוף משפטים קשורים ובחירת משפט המתאים לפתרון. לפתרון הבעיות שבדף יש להשתמש במשפטים הקשורים בהקבלה של ישרים ובמשפט חוצה הזווית.

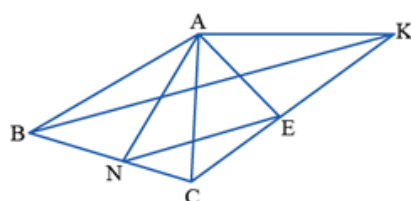
אסטרטגיה של פתרון

בכל אחת מבעיות ההוכחה שלפניכם תארו תחילה במילים את מהלך החשיבה שלכם **בדרך** לפתרון. אחר-כך פתרו את הבעיה.



1. **נתון:** המרובע ABCD הוא טרפז ($BC \parallel AD$).
 E נקודת מפגש האלכסונים.
 K נקודה על AD כך ש- $EK \parallel CD$.

הוכיחו: $\frac{AK}{KD} = \frac{ED}{BE}$



2. **בשרטוט שלפניכם נתון:**

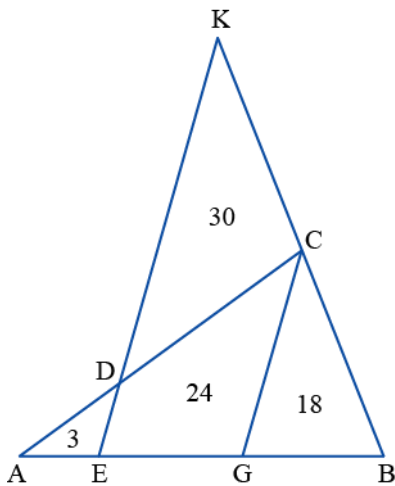
$AB = AK$

AE חוצה את KAC

AN חוצה את BAC.

הוכיחו: $BK \parallel NE$.

הצעה לפתרון דף פעילות 1 ממשיכים לחשב שטחים



א. מחשבים את שטח משולש KEB לפי יחס השטחים של משולשים דומים:

$$CG \parallel KE$$

↓

$$\Delta KEB \sim \Delta CGB \quad (\text{לפי משפט דמיון ז.ז.})$$

$$\frac{EB}{GB} = \frac{2}{1}$$

↓

$$\text{(יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)} \quad \frac{S_{\Delta KEB}}{S_{\Delta CGB}} = \frac{4}{1}$$

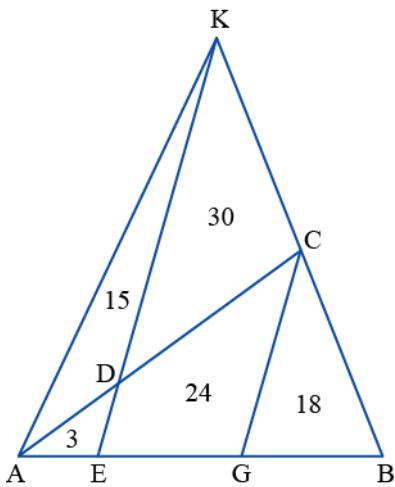
↓

$$S_{\Delta KEB} = 4 \cdot S_{\Delta CGB} = 4 \cdot 18 = 72$$

↓

$$S_{\Delta KDC} = S_{\Delta KEB} - S_{\Delta DCGE} - S_{\Delta CGB} = 72 - 24 - 18 = 30$$

שטח משולש KDC שווה ל- 30 סמ"ר



ב. למשולשים KAE ו- KEB גובה משותף מהקודקוד K, לכן היחס בין שטחי המשולשים האלה הוא יחס בין הקטעים:

$$\frac{S_{\Delta KAE}}{S_{\Delta KEB}} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{4}$$

↓

$$S_{\Delta KAE} = \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta KEB} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$$

לכן שטח משולש KDA שווה ל- 15 סמ"ר

ג. דרך א' – חיבור שטחים:

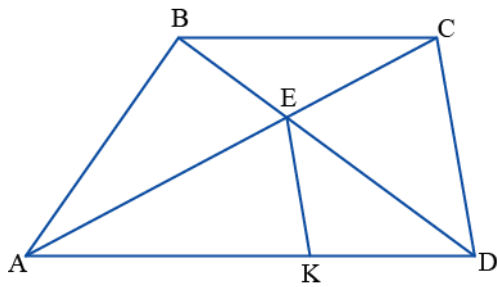
$$S_{\Delta AKC} = S_{\Delta KDA} + S_{\Delta KDC} = 15 + 30 = 45$$

דרך ב' – ניתן להוכיח ש- $KC = CB$ בעזרת דמיון משולשים ($\Delta KEB \sim \Delta CGB$, $\frac{EB}{GB} = \frac{2}{1}$) או משפט תאלס..

כלומר, הקטע AC הוא תיכון במשולש KCB, ולכן מחלק אותו לשני משולשים שווי-שטח.

$$S_{\Delta AKC} = S_{\Delta ABC} = 27 + 18 = 45 \text{ סמ"ר}$$

הצעה לפתרון דף פעילות 2 אסטרטגיה של פתרון



1. $BC \parallel AD$ (נתון)

↓

(הרחבה של משפט תאלס) $\frac{ED}{BE} = \frac{AE}{EC}$

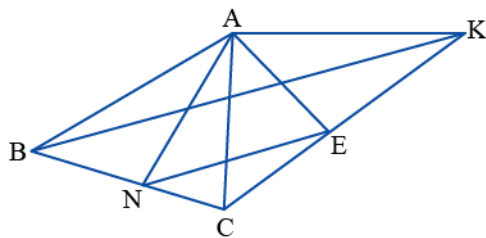
(נתון) $EK \parallel CD$

↓

(משפט תאלס) $\frac{AK}{KD} = \frac{AE}{EC}$

↓

$\frac{AK}{KD} = \frac{ED}{BE}$



2. לפי משפט חוצה הזווית:

(כי AE חוצה את $\angle KAC$) $\frac{CE}{EK} = \frac{AC}{AK}$

לפי משפט חוצה הזווית:

(כי AN חוצה את $\angle BAC$) $\frac{CN}{NB} = \frac{AC}{AB}$

↓

(כי $AB = AK$) $\frac{CE}{EK} = \frac{CN}{NB}$

↓

$BK \parallel NE$ (לפי המשפט ההפוך למשפט תאלס).