



# תיק משימטיקה

## *התנהגות הפונקציה*

## *וסימן הנגזרת*

להנגשה פרטנית נא לפנות: [st.negishut@weizmann.ac.il](mailto:st.negishut@weizmann.ac.il)

## תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
4	החומרים והעזרים הדרושים
5	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימת ההערכה
6	<b>רצף פונקציה-נגזרת</b>
7	הערכת תוצרי התלמידים
8	פעילות בעקבות ההערכה
9	דף פעילות 1 עליה ירידה ונקודות קיצון
11	דף פעילות 2 מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת

# התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת<sup>1</sup>



## מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשור בין ההתנהגות של פונקציה בתחום מסוים (עלייה, ירידה, נקודות קיצון) לבין סימן הנגזרת בתחום זה. בפרט להעריך את יכולתם להסיק כיצד קשר זה מתבטא בגרפים של שתי הפונקציות, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להסיק שאם הפונקציה  $f$  עולה בתחום מסוים, אז הנגזרת  $f'$  היא אי-שלילית בתחום זה. באופן דומה אם הפונקציה  $f$  יורדת בתחום מסוים, אז הנגזרת  $f'$  אינה חיובית בתחום זה.
- להסיק שאם הנגזרת  $f'$  חיובית בתחום מסוים, אז הפונקציה  $f$  עולה בתחום זה. באופן דומה אם הנגזרת  $f'$  שלילית בתחום מסוים, אז הפונקציה  $f$  יורדת בתחום זה.
- להסיק שאם לפונקציה  $f$  יש נקודת קיצון בנקודה פנימית של התחום, אז הנגזרת  $f'$  מתאפסת בנקודה זו.
- להשתמש בכל המסקנות שלעיל כדי להתאים בין גרף של פונקציה לבין הגרף של נגזרתה.



## זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 45 דקות.

<sup>1</sup> שלושה תיקי משימטיקה עוסקים בקשרי פונקציה-נגזרת. התיק **התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת** עוסק בקשרים שבין התנהגות פונקציה בתחום מסוים לבין סימן הנגזרת שלה בתחום זה. התיק **התנהגות הפונקציה והתנהגות הנגזרת** עוסק, בנוסף לקשרים אלה, גם בקשרים נוספים בין התנהגות פונקציה לבין התנהגות הנגזרת שלה, תוך כדי התמקדות בלינאריות ובנקודות פיתול. התיק **מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה** מתמקד בקשרים שבין גרף הנגזרת לגרפים של פונקציות שזוהי נגזרתן (פונקציות קדומות).



## החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- הוראות למשימה **רצף פונקציה-נגזרת**.
- ערכת כרטיסים למשימה **רצף פונקציה-נגזרת**.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף פעילות 1 **עלייה, ירידה ונקודות קיצון**.
- דף פעילות 2 **מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת**.
- יישומון גיאוגברה **התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת**.



## רקע

הפונקציה הנגזרת מהווה כלי חשוב המסייע לחקור התנהגות של פונקציות. במהלך לימודי האנליזה נעשה שימוש רב בקשרים שבין התנהגות פונקציה לבין תכונות פונקציית הנגזרת שלה. לדוגמה, בהינתן פונקציה בייצוג אלגברי, ניתן למצוא את תחומי העלייה והירידה שלה, בהתבסס על הקשר ביניהם ובין סימן הנגזרת: בתחום שבו סימן הנגזרת חיובי – הפונקציה עולה, ובתחום שבו סימן הנגזרת שלילי – הפונקציה יורדת.

תלמידים רבים מתקשים בהבנת הקשרים שבין התנהגות פונקציה בתחום מסוים לבין סימן הנגזרת שלה בתחום זה. אחד הגורמים לקושי זה נעוץ בהבנת המשמעות של ערך הנגזרת בנקודה כשיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו, ושל הפונקציה הנגזרת כמבטאת את השתנות שיפועי המשיקים. גורם אפשרי נוסף הוא בלבול בין המושגים עלייה וירידה לבין המושגים חיוביות ושליליות, בפרט כאשר הם מבוטאים בגרף.

התיק **התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים בשימוש בקשרים שבין התנהגות הפונקציה לבין סימן הנגזרת ולתת להם מענה.



## הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה **רצף פונקציה-נגזרת**.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.



## עבודה על משימת הערכה

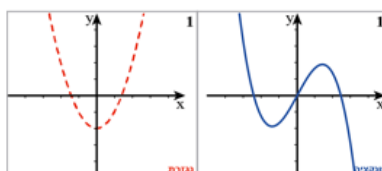
במשימה **רצף פונקציה-נגזרת** כל תלמיד/ה מקבל/ת חפסת כרטיסים. על כל כרטיס משורטט גרף של פונקציה (כחול) וגרף נוסף (אדום) המתאר את הנגזרת של פונקציה **אחרת**. יש ליצור רצף מכל הכרטיסים בעזרת התאמה בין גרף של פונקציה לבין גרף הנגזרת שלה.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

אופייה של המשימה מאפשר לתלמידים הערכה ותיקון עצמיים.

### רצף פונקציה-נגזרת

לפניכם שמונה כרטיסים הממוספרים מ-1 עד 8. כל כרטיס מחולק לשני חלקים: בצד ימין משורטט גרף כחול (רצף) של פונקציה, ובצד שמאל משורטט גרף אדום (מרוסק) המתאר את הנגזרת של פונקציה **אחרת**. יש להתאים לכל גרף של פונקציה את גרף נגזרתה ובכך ליצור רצף של כל הכרטיסים.

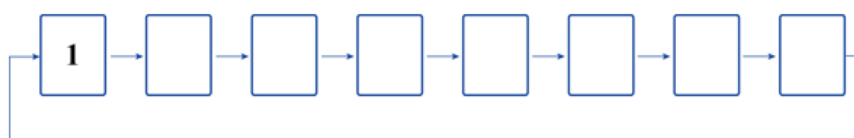


הניחו את כרטיס מספר 1 על השולחן. התבוננו בגרף הפונקציה הכחול (הרצף) שבכרטיס המונח על השולחן. בחרו מבין הכרטיסים הנותרים את הכרטיס שעליו משורטט גרף אדום (מרוסק) המתאר את הפונקציה הנגזרת המתאימה. הצמידו את הכרטיס שבחרתם לכרטיס הקודם, כך שגרף הנגזרת יהיה מונח מתחת גרף הפונקציה, כמתואר בציור. עכשיו התבוננו בגרף הפונקציה הכחול (הרצף) שבכרטיס החדש והמשיכו להתאים לכל גרף של פונקציה את הגרף המתאים של הנגזרת עד שיתקבל רצף מכל הכרטיסים. בסיום התהליך אמורה להיות התאמה בין גרף הפונקציה שבכרטיס האחרון לבין גרף הנגזרת שבכרטיס הראשון.

**מלאו בתחתית הדף את סדרת מספרי הכרטיסים לפי הרצף שיצרתם.**



סדרת מספרי הכרטיסים לפי הרצף שהתקבל:





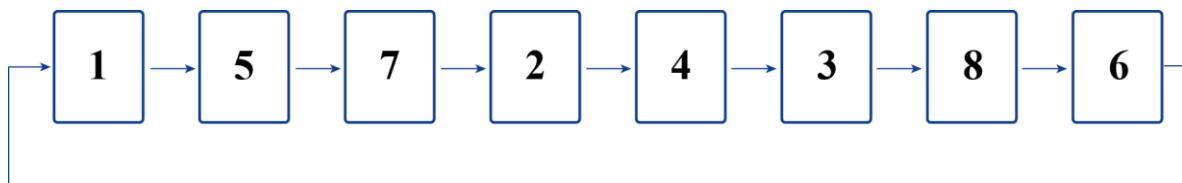
## הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיין התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	רצף נכון	רצף שגוי	הערות
<a href="#">תלמיד 1</a>	V		
<a href="#">תלמיד 2</a>		V	
סך-הכל			

אין בטבלה התמקדות בכל אחד מהקשרים בנפרד, אלא רק אבחנה בין תלמידים שיצרו רצף נכון לבין תלמידים שיצרו רצף שגוי או שלא הצליחו להשלים רצף מכל הכרטיסים.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:





## פעילות בעקבות ההערכה

פעילות זו מיועדת לתלמידים שלא הצליחו ליצור רצף נכון במשימת ההערכה.

### שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 **עלייה, ירידה ונקודות קיצון**.
- דיון וסיכום.
- עבודה על דף פעילות 2 **מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת**.

### מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 1 עלייה, ירידה ונקודות קיצון**

בדף פעילות זה נעשה שימוש ביישומון גיאוגברה הממחיש את ההשתנות הדינמית של המשיקים ושל שיפועי המשיקים בנקודות שונות לאורך גרף הפונקציה. בנוסף היישומון מציג גם את גרף הנגזרת, וכך מאפשר לבחון את הקשרים בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת.

בעיה 1 מתמקדת בכך שבתחומי העלייה של הפונקציה, גם המשיקים הם ישרים עולים. לכן שיפועי המשיקים חיוביים בתחומי העלייה של הפונקציה, וערכי הנגזרת חיוביים בתחומים אלה. באופן דומה בתחומי הירידה של הפונקציה שיפועי המשיקים שליליים, ולכן ערכי הנגזרת שליליים.

בעיה 2 מתמקדת בכך שבנקודות הקיצון של הפונקציה, המשיקים הם ישרים אופקיים. לכן שיפועי המשיקים שווים לאפס בנקודות הקיצון של הפונקציה, וערך הנגזרת מתאפס בנקודות אלה.

בעיה 3 התלמידים מסכמים לעצמם את שני הקשרים שהודגמו בבעיות הקודמות, תוך כדי מילוי המילים החסרות בהיגדים שלפניהם.



## עלייה, ירידה ונקודות קיצון

הפעילו את היישומן [התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת](#).

1. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x)$ .

- א. מהם תחומי העלייה של הפונקציה? \_\_\_\_\_
- ב. מהם תחומי הירידה של הפונקציה? \_\_\_\_\_
- ג. הציגו את המשיק בעזרת תיבת הבחירה "הצג משיק". מעל תיבת הבחירה מופיע סרגל גרירה. ניתן לגרור את הנקודה שבסרגל, וכך להזיז את נקודת ההשקה D לאורך גרף הפונקציה. חלק מהמשיקים המתקבלים הם ישרים עולים וחלקם ישרים יורדים.
- באילו תחומים יהיו המשיקים שיתקבלו ישרים יורדים? \_\_\_\_\_
- ד. באילו תחומים, לדעתכם, יהיו שיפועי המשיקים המתקבלים חיוביים? \_\_\_\_\_
- ה. הציגו את שיפוע המשיק בעזרת תיבת הבחירה המתאימה ובדקו את תשובתכם.
- ו. הנגזרת של פונקציה בנקודה היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.
- ז. באילו תחומים, לדעתכם, תהיה הנגזרת חיובית? \_\_\_\_\_
- ח. הציגו את גרף הנגזרת בעזרת תיבת הבחירה המתאימה ובדקו את תשובתכם.

2. בטלו את הבחירה "הצג נגזרת" והתבוננו בגרף הפונקציה  $f(x)$ .

- א. כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן \_\_\_\_\_
- ב. הזיזו את המשיק בעזרת סרגל הגרירה עד שנקודת ההשקה D תתלכד עם נקודת המינימום של הפונקציה. מהו שיפוע המשיק המתקבל בנקודה זו? \_\_\_\_\_
- ג. מהו שיפוע המשיק המתקבל בנקודת המקסימום של הפונקציה? \_\_\_\_\_
- ד. מה יהיה, לדעתכם, ערך הנגזרת בנקודת המקסימום של הפונקציה? \_\_\_\_\_
- ה. הציגו את גרף הנגזרת בעזרת תיבת הבחירה המתאימה ובדקו את תשובתכם.

3. ההיגדים הבאים קושרים בין תכונות של הפונקציה, תכונות של הנגזרת ותכונות של גרף הנגזרת. השלימו בעזרת מילים מ"מחסן המילים".

- א. בנקודה שבה המשיק לפונקציה הוא ישר עולה, ערך הנגזרת \_\_\_\_\_ וגרף הנגזרת \_\_\_\_\_.
- ב. אם  $f'(a) < 0$ , אז הפונקציה  $f$  \_\_\_\_\_ בנקודה שבה  $x = a$ , ונקודה זו על גרף הנגזרת \_\_\_\_\_.
- ג. בנקודת קיצון, ערך הנגזרת \_\_\_\_\_, וגרף הנגזרת \_\_\_\_\_.

### מחסן מילים:

עולה, יורדת, קבועה, חיובי, שלילי, אפס, חותך את ציר ה- $x$ , מעל ציר ה- $x$ , מתחת ציר ה- $x$ .

## דיון וסיכום

- מומלץ לבקש מהתלמידים לנסח את הקשרים בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת, שהיו יכולים להקל על ביצוע ההתאמות שנדרשו במשימה **רצף פונקציה-נגזרת**. כדאי לרשום על הלוח את סיכום הקשרים כלהלן:
    - אם הפונקציה  $f$  עולה בתחום מסוים, אז הנגזרת  $f'$  היא חיובית או 0 בתחום זה.
    - אם הפונקציה  $f$  יורדת בתחום מסוים, אז הנגזרת  $f'$  היא שלילית או 0 בתחום זה.
    - בנקודת קיצון פנימית של הפונקציה  $f$  ערך הנגזרת  $f'$  הוא 0
  - חשוב לשים לב שהקשר בין נקודות הקיצון לבין התאפסות הנגזרת אינו דו-כיווני:
    - אמנם אם הנגזרת  $f'$  חיובית (שלילית) בתחום ניתן להסיק שהפונקציה  $f$  עולה (יורדת) בתחום זה.
    - אבל אם ערך הנגזרת הוא 0 בנקודה פנימית בתחום, ייתכנו שלוש אפשרויות:
      - לפונקציה יש נקודת קיצון
      - הפונקציה עולה (נקודת פיתול)
      - הפונקציה יורדת (נקודת פיתול).
- ניתן להדגים זאת באמצעות היישומון, כאשר נקודת ההשקה נמצאת בראשית הצירים. בנקודה זו יש לפונקציה נקודת פיתול, והמשיק מתלכד עם ציר ה- $x$ . לכן הנגזרת מתאפסת בנקודה זו, למרות שהיא אינה נקודת קיצון של הפונקציה.

## • עבודה על דף פעילות 2 מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת

בדף פעילות זה נדרשים התלמידים לשרטט שני גרפים בכל בעיה:

- גרף של פונקציה המקיים תנאי או תנאים נתונים.
  - גרף הנגזרת של הפונקציה הקודמת.
- התלמידים יכולים לבחור את גרף הפונקציה ולהיעזר בכרטיסי המשימה **רצף פונקציה-נגזרת** או לשרטט גרף אחר, לפי בחירתם. בשרטוט גרף זה הם צריכים לשים לב להתאמה בין הגרף שהם בוחרים לשרטט לבין התנאים הנתונים. לאחר שרטוט גרף הפונקציה, על התלמידים לשרטט את גרף הנגזרת, ולהקפיד על קיום הקשרים שבהם עוסק תיק זה.

## מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת

חפשו בין כרטיסי המשחק או חשבו בעצמכם על דוגמאות לפונקציות המקיימות את התנאים הנתונים בהמשך. בכל סעיף שרטטו במערכת הצירים הראשונה את גרף הפונקציה שבחרתם, ובמערכת הצירים שמתחתיה שרטטו סקיצה של גרף הנגזרת המתאימה.

1. לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה.

גרף הפונקציה:



גרף הנגזרת



2. הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

גרף הפונקציה



גרף הנגזרת



3. לפונקציה יש שתי נקודות מקסימום ונקודת מינימום אחת.

גרף הפונקציה:



גרף הנגזרת

