



תיק משימטיקה

בניית עזר – פרופורציה

ודמיון

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימות ההערכה
6	משימה 1 מחפשים בניית עזר
7	משימה 2 מה כדאי להוסיף?
7	הערכת תוצרי התלמידים
10	פעילות בעקבות ההערכה
11	דף פעילות בחירות מתאימות
13	דף פעילות מוצאים בניית עזר מתאימה

בניית עזר – פרופורציה ודמיון



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים לבעיה נתונה בגיאומטריה בניית עזר שעשויה לעזור בפתרון הבעיה, ולסייע למורה לתת מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק בנושא פרופורציה ודמיון.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- למצוא בניית עזר
 - שתאפשר שימוש בנתונים ותקשר ביניהם,
 - שתקשר בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח או לחשב,
 - שתקשר בין הנתונים ומה שצריך להוכיח או לחשב לבין משפטים שנלמדו.
- להשתמש בבניית העזר שנבחרה לצורך פתרון הבעיה.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: כ- 30 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
 - משימה 1 **מחפשים בניית עזר**.
 - משימה 2 **מה כדאי להוסיף?**
- לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):
 - דף לדיון **בחירות מתאימות**.
 - דף פעילות **מוצאים בניית עזר מתאימה**.



רקע

בבעיות הוכחה או חישוב בגיאומטריה צריך לעיתים להוסיף בניית עזר שתסייע לפתור את הבעיה. למשל, לשרטט ישר מקביל לקו המופיע בשרטוט, לשרטט אנך לישר שבשרטוט, לחבר נקודות המופיעות בשרטוט וכו'.

במקרים רבים ניתן להוסיף לשרטוט בניות עזר שונות, אך לא כולן מסייעות בהוכחה או בחישוב הנדרשים. בניית עזר בעלת פוטנציאל לסייע בפתרון בעיה מתאפיינת בכך שהיא מאפשרת שימוש בנתונים, קישור בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח וביניהם לבין משפטים הקשורים לנושא הבעיה. כלומר, בניית עזר מועילה מתאפיינת בכך שהיא תורמת מידע רלוונטי נוסף על הנתון בבעיה, ובכך מאפשרת שימוש במשפטים שכבר נלמדו.

עם זאת לא כל בניית עזר המקיימת את התנאים שלעיל אכן מסייעת בפתרון הבעיה. במקרים אלו צריך לוותר עליה ולנסות בניית עזר אחרת. ישנם תלמידים המתקשים לוותר על בניית עזר שאינה מסייעת להם, ובמקומה לנסות בניית עזר אחרת. גמישות בבחירה של בניית עזר, ובאופן כללי היכולת לוותר על מהלך פתרון מסוים ולנסות מהלך אחר, היא יכולת חשובה בפתרון בעיות בגיאומטריה, כמו גם בתחומים אחרים במתמטיקה.

הנושאים פרופורציה ודמיון הם נושאים מרכזיים בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. פתרון בעיות בנושאים אלה מצריך לעיתים קרובות שימוש בבניית עזר. התיק **בניית עזר – פרופורציה ודמיון** מתמקד בכך. התיק נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בבחירה של בניית עזר מועילה ולהציע להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
 - משימה 1 **מחפשים בניית עזר**.
 - משימה 2 **מה כדאי להוסיף?**
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.



עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

- משימה 1 **מחפשים בניית עזר**.
- משימה 2 **מה כדאי להוסיף?**

בשתי המשימות קיימות אפשרויות שונות של בניית עזר, אלא שלא כולן מסייעות בהוכחה הנדרשת.

במשימה 1 **מחפשים בניית עזר** מופיעים מספר שרטוטים זהים, כדי לעודד תלמידים שלא הצליחו להוכיח בעזרת בניית עזר אחת, לנסות בניית עזר אחרת. במשימה זו בניית עזר המאפשרת פתרון היא שרטוט קטע המחבר שתי נקודות בשרטוט, אלא שלא כל חיבור נקודות מאפשר שימוש בנתונים ובמשפטים שנלמדו ומקשר אותם למה שצריך להוכיח.

במשימה 2 **מה כדאי להוסיף?** יש לבחור בניית עזר שתאפשר שימוש בפרופורציה (דמיון משולשים או משפט תלס) ובנוסף תאפשר להגיע לחישוב גודל הקטע המבוקש.

הערה: יש בעיות בספרי הלימוד שלפתרון דרושה בניית עזר, אך בספר אין מציינים זאת, והתלמידים צריכים להחליט בעצמם שיש בה צורך ולמצוא מהי. תיק זה מתמקד ביכולת התלמידים למצוא או לבחור בניית עזר מועילה ולהוכיח בעזרתה את הנדרש, ולכן נאמר לתלמידים במפורש שיש צורך בבנייה כזו.

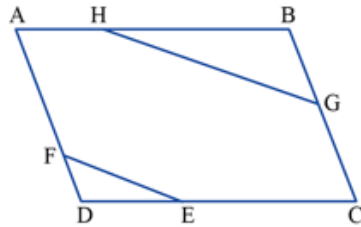
מחפשים בניית עזר

מרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות E, F, G, H נמצאות כל אחת על צלע אחרת

של המקבילית כך ש: $EF \parallel GH$ (ראו שרטוט).

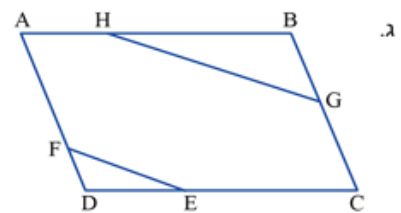
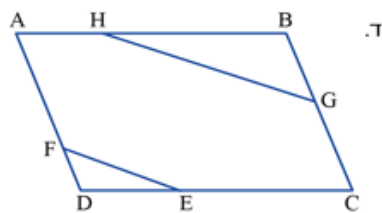
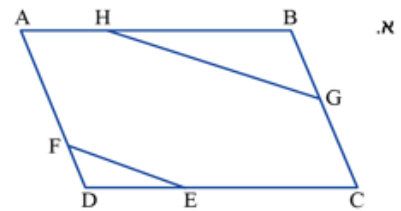
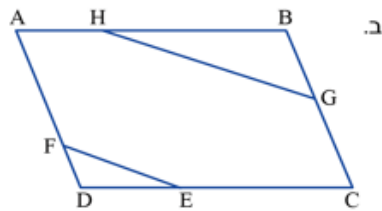
צריך להוכיח: $\triangle BGH \sim \triangle DFE$.



לצורך פתרון הבעיה יש להוסיף בניית עזר.

לפניכם מספר שרטוטים זהים. היעזרו בהם על מנת לנסות בניית עזר שונות.

כשתמצאו בניית עזר מועילה, הוכיחו.



מה כדאי להוסיף?

בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$)

נתון: $DC \parallel GE$

$AB = 6$ ס"מ

$CD = 10$ ס"מ

$CE = \frac{1}{4} CB$

חשבו את אורך הקטע EG .

לצורך פתרון הבעיה יש להוסיף בניית עזר.
כשתמצאו בניית עזר מועילה, הוכיחו.



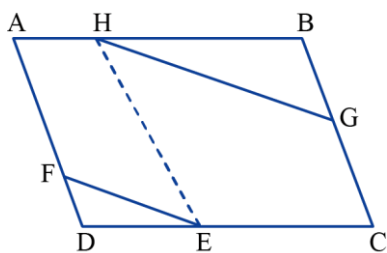
הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם תוכלו להיעזר בטבלה הבאה.

משימה 2 מה כדאי להוסיף?			משימה 1 מחפשים בניית עזר			שם התלמיד/ה
לא מצאו בנייה מועילה	מצאו בניית עזר מועילה ושגו בהוכחה	מצאו בניית עזר מועילה והוכיחו	לא מצאו בנייה מועילה	מצאו בניית עזר מועילה ושגו בהוכחה	מצאו בניית עזר מועילה והוכיחו	
V					V	תלמיד 1
	V		V			תלמיד 2
						סך-הכל

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1 מחפשים בניית עזר



אפשר למשל, לשרטט כבניית עזר את הקטע HE.

ABCD מקבילית לכן הצלעות הנגדיות מקבילות.

$\angle BHE = \angle DEH \Leftarrow$ (כי הן זוויות מתחלפות בין הקטעים המקבילים AB ו-DC).

נתון גם $EF \parallel GH$,

$\angle EHG = \angle HEF \Leftarrow$ (כי הן זוויות מתחלפות בין הקטעים האלה).

$\angle BHG = \angle DEF \Leftarrow$ (חיסור גדלים של זוויות שוות מגדלים של זוויות שוות).

$\angle B = \angle D$ (זוויות נגדיות במקבילית שוות).

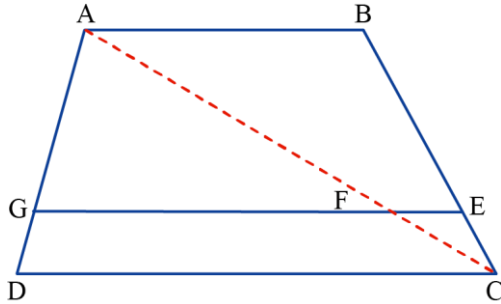
$\triangle BGH \sim \triangle DFE \Leftarrow$ (לפי משפט דמיון ז.ז).

לחילופין אפשר לשרטט כבניית עזר את הקטעים FG, GE או את האלכסון BD ולהוכיח את דמיון המשולשים הנדרש.

פתרון משימה 2 מה כדאי להוסיף?

כדי להשתמש בנתונים ABCD טרפז, $GE \parallel CD$ וביחס בין הצלעות $CE = \frac{1}{4}BC$ בניית עזר מועילה יכולה ליצור משולשים דומים או לאפשר שימוש במשפט תלס.

אפשרות א'



כבניית עזר משרטטים את אחד האלכסונים, למשל AC.

נסמן את נקודת החיתוך של האלכסון עם GE באות F.

$\triangle CBA \sim \triangle CEF$ (ישר מקביל לצלע של משולש חותך מהמשולש משולש דומה).

מהדמיון מסיקים:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EF}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow EF = 1.5\text{cm}$$

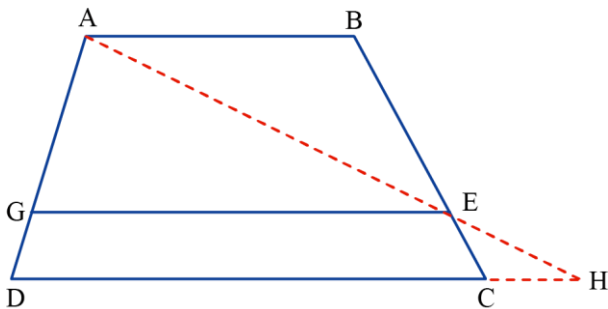
$$\frac{AF}{AC} = \frac{3}{4} \quad \text{מהדמיון הנ"ל מסיקים גם:}$$

$\triangle ADC \sim \triangle AGF$ (ישר מקביל לצלע של משולש חותך מהמשולש משולש דומה).

$$\frac{GF}{DC} = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{GF}{10} = \frac{3}{4} \Rightarrow GF = 7.5\text{cm} \Rightarrow GE = 7.5 + 1.5 = 9\text{cm}$$

הערה: אפשר להשתמש במשפט תלס במקום בדמיון.

אפשרות ב'



משרטטים כבניית עזר קטע AE וממשיכים אותו עד לנקודת

חיתוכו עם המשך הצלע DC. נסמן נקודה זו ב-H.

(ניתן לשרטט בניית עזר דומה מהקודקוד B).

ושוב באמצעות דמיון המשולשים ABE ו-HCE

מחשבים את CH, אחר-כך את היחס $\frac{AE}{EH}$.

באמצעות דמיון המשולשים AGE ו-AHD מחשבים את אורך GE.



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שלא הצליחו למצוא את בניית העזר המועילה באחת המשימות או בשתייהן. (מסומנים באחת או יותר מהעמודות המודגשות בטבלת הערכה). הפעילות עשויה להתאים גם לתלמידים שמצאו בניית עזר מועילה ולא הצליחו להוכיח.

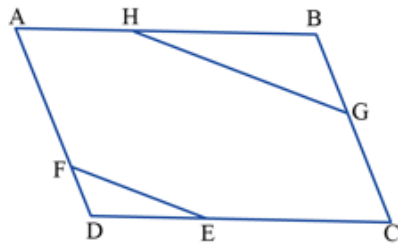
שלבי הפעילות

- דיון בפתרון משימה 1 **מחפשים בניית עזר** מלווה בדף **בחירות מתאימות**.
- דיון מסכם בעקרונות לבחירת בניית עזר מועילה.
- עבודה על דף הפעילות **מוצאים בניית עזר מתאימה**.

מהלך הפעילות

- דיון בפתרון משימה 1 **מחפשים בניית עזר** מציגים את המשימה וארבע הצעות של בניות עזר באמצעות הדף **בחירות מתאימות**.

בחירות מתאימות



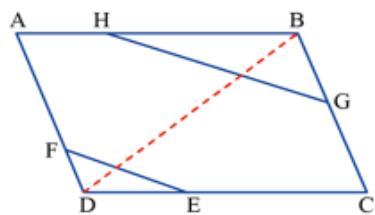
מרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות E, F, G, H נמצאות כל אחת על צלע אחרת

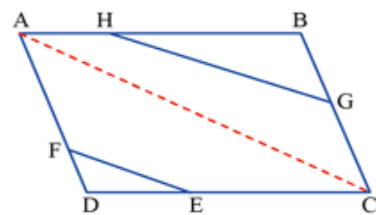
של המקבילית כך ש: $EF \parallel GH$ (ראו שרטוט).

צריך להוכיח: $\triangle BGH \sim \triangle DFE$.

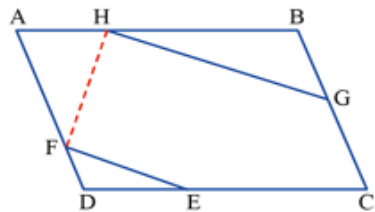
לפניכם ארבע הצעות לבניית עזר. בחרו בניית עזר מועילה והוכיחו.



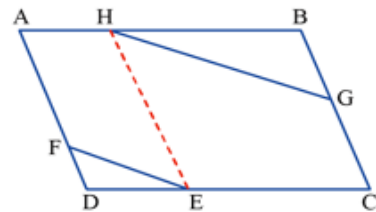
ב.



א.



ד.



ג.

לגבי כל אחת מבניות העזר שואלים האם יש תלמידים שבחרו בבנייה זו? אם כן, האם הצליחו להוכיח בעזרתה? ומבקשים הסבר.

במהלך הדיון מדגישים מדוע בניית העזר א' אינה מועילה ומדוע שאר הבניות עשויות לעזור.

הסברים

בנייה א: שרטוט אלכסון AC אינו תורם מידע לגבי זוויות שוות העשויות לעזור בהוכחת הדמיון המבוקש. האלכסון AC גם אינו עוזר לקשר בין הנתונים של הקבלת הקטעים HG ו-FE ובין המשולשים שאת הדמיון שלהם צריך להוכיח.

בנייה ב: שרטוט אלכסון BD יוצר חותך המאפשר למצוא זוויות מתחלפות שוות בין הצלעות המקבילות של המקבילית וזוויות מתחלפות שוות בין הקטעים המקבילים HG ו-FE. בכך הוא קושר בין הנתונים, מאפשר שימוש במשפט העוסק בזוויות מתחלפות בין מקבילים ומאפשר להוכיח את דמיון המשולשים המבוקש באמצעות משפט דמיון.

בנייה ג: בדומה לבנייה ב', חיבור HE יוצר חותך המאפשר למצוא זוויות מתחלפות שוות בין הצלעות המקבילות של המקבילית וזוויות מתחלפות שוות בין הקטעים המקבילים HG ו-FE. בכך הוא קושר בין הנתונים, מאפשר שימוש במשפט העוסק בזוויות מתחלפות בין מקבילים ומאפשר להוכיח את דמיון המשולשים המבוקש (הוכחה זו מפורטת בפתרון המשימה לעיל).

בנייה ד: חיבור FH מאפשר להשתמש בזוויות חד צדדיות בין המקבילים EF ו-GH אשר סכומן 180° , יחד עם זוג זוויות חד צדדיות בין הצלעות הנגדיות במקבילית עד לקבלת הדמיון המבוקש.

הערות

- במקרים רבים יש יותר מבניית עזר אחת שמועילה לפתרון. כדאי לשאול כאן אם יש תלמידים שבחרו בבניית עזר אחרת, ואם יש כאלה להציג את הבנייה ולדון ביעילותה.
- במקרה כזה שבו יש דרכים שונות לפתרון הבעיה, ניתן לדון בשאלה איזו דרך עדיפה? איזו דרך קצרה/ ישירה/ "אלגנטית" יותר?
- אם יש צורך, מקרינים על הלוח את המשימה **מה כדאי להוסיף?** ודנים בבניות העזר שהתלמידים בחרו ובהוכחה.

• דיון מסכם בעקרונות לבחירת בניית עזר מועילה

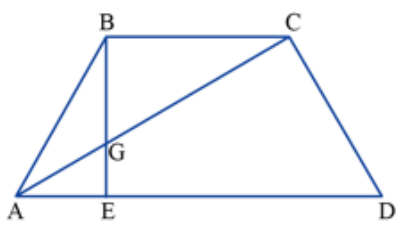
- בסיכום כדאי לבקש מהתלמידים להציע עקרונות חשובים לשרטוט בניית עזר מועילה.
- א. לחפש בניית עזר העשויה לאפשר שימוש בנתונים וקישור ביניהם.
 - ב. לחפש בניית עזר שתקשר בין הנתונים לבין מה שצריך להוכיח.
 - ג. לחפש בניית עזר שתחשוף תכונות ותוביל לשימוש במשפט הקשור לנתוני הבעיה ו/או למה שצריך להוכיח.
 - ד. לא ליצור בנייה "המקלקלת" את הנתון או את מה שצריך להוכיח.
- כדאי גם לציין שכאשר אין מצליחים להוכיח בעזרת בניית עזר מסוימת, כדאי לבדוק אותה על פי העקרונות הנ"ל ולנסות להוכיח באמצעות בניית עזר אחרת.
- היכולת לעבור מניסיון לא מוצלח לניסיון אחר היא בעלת חשיבות בפתרון בעיות מתמטיות ומאפיינת עבודה מתמטית.

• עבודה על דף הפעילות מוצאים בניית עזר מתאימה

דף פעילות זה נועד ליישום ותרגול העקרונות שנלמדו. הפעילות מיועדת לתלמידים שלא מצאו בניית עזר מתאימה לפתרון אחת המשימות או שתיהן, והיא מתאימה גם לתלמידים שמצאו בניית עזר כזו ושגו בהוכחה.

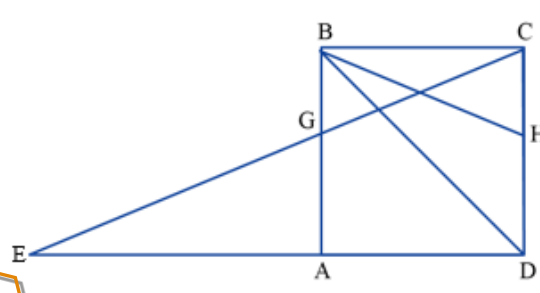
מוצאים בניית עזר מתאימה

לפתרון כל אחת מהבעיות הבאות יש צורך בבניית עזר. מצאו בניית עזר מתאימה והוכיחו.

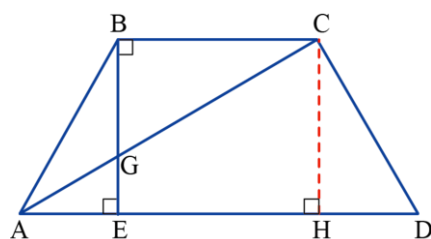


1. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AD \parallel BC$, $AB = DC$).
האלכסון AC והגובה BE נחתכים בנקודה G.
נתון: $AD = 2 BC$.
חשבו את היחס $\frac{GE}{GB}$.

2. בריבוע ABCD המשיכו את הצלע DA עד הנקודה E, כך שמתקיים $AE = BD$.
H היא נקודה על צלע CD כך שהקטע BH חוצה את הזווית $\angle CBD$.
הוכיחו: $\triangle BCH \sim \triangle EAG$.



הצעה לפתרון דף הפעילות מוצאים בניית עזר מתאימה



- 1.** בניית עזר מועילה היא שרטוט גובה נוסף CH. הטרפז ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים, ולכן מתקבלים מלבן ושני משולשים ישרי זווית חופפים. כלומר:

$$AE = DH \quad , \quad BC = EH$$

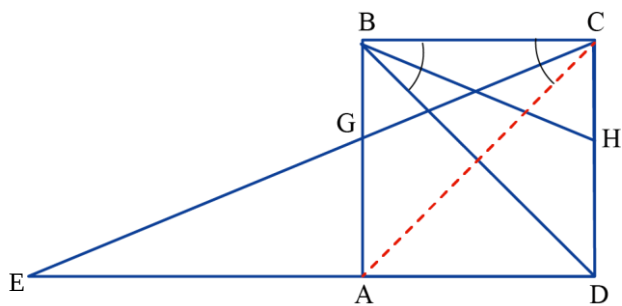
$$AD = 2 BC$$

$$AE + HD = BC \quad \Leftarrow$$

$$HD = \frac{1}{2} BC = AE \quad \Leftarrow$$

(בכל אחד מהמשולשים יש זווית ישרה ויש זוויות מתחלפות שוות.) $\triangle CBG \sim \triangle AEG$

$$\frac{GE}{GB} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow$$



2. נוסף אלכסון AC כבניית עזר.

האלכסונים בריבוע שווים, ונתון $AE = BD$,

$\Leftarrow$ משולש AEC הוא שווה-שוקיים

$\Leftarrow \angle E = \angle ECA$ (זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים)

$\angle E = \angle ECB$ (זוויות מתחלפות בין $BC \parallel ED$)

$\Leftarrow \angle ECA = \angle ECB = 22.5^\circ$ (כי גודלן חצי של $\angle BCA$)

$\Leftarrow \angle E = 22.5^\circ$

נתון כי BH הוא חוצה זווית CBD $\Leftarrow \angle CBH = 22.5^\circ$

ולכן, $\angle CBH = \angle E$

$\angle BCH = \angle GAE = 90^\circ$

$\Leftarrow \triangle BCH \sim \triangle EAG$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)