תיק משימטיקה

משפטים הפוכים –
מעגל

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

משפטים הפוכים – מעגל

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במהלך פתרון בעיות בגיאומטריה במשפט מתאים כנימוק לטענה, ולא במשפט ההפוך לו, ולתת מענה לקשיים המתגלים. התיק עוסק בנושא מעגל.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לזהות מה נתון ומה צריך להוכיח במשפט מתמטי הכתוב בצורה מילולית.
- לנמק טענה בגיאומטריה באמצעות משפט מתאים ולא באמצעות המשפט ההפוך לו.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: 20-30 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 30 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
  - משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
  - משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***.
  - משימה 3 ***בודקים נימוקים***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות 1 ***משפטים הפוכים***.

לפעילות 2

- דף פעילות 2 ***מהו הנימוק הנכון?***

רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. לעיתים במהלך הוכחה תלמידים מנמקים טענות בצורה שגויה, באמצעות המשפט ההפוך למשפט המתאים. למעשה, במקרים רבים התלמידים אינם מבחינים בין השניים. למשל, כנימוק להיסק שזוג ישרים הם מקבילים, תלמידים רושמים לעיתים כנימוק: "זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו" במקום "אם שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו אז הישרים מקבילים". בהחלפה בין המשפט המתאים ובין המשפט ההפוך לו מתרחש כשל לוגי, שכן מסתמכים על המסקנה שאותה רוצים להוכיח. אחד הגורמים לחוסר ההבחנה של תלמידים בין שני משפטים שהם הפוכים זה לזה הוא שהתלמידים אינם מזהים את הנתון ואת מה שצריך להוכיח במשפט מסוים. זיהוי זה הוא תנאי מוקדם להבחנה בין שני משפטים שהם הפוכים זה לזה.

נושא המעגל הוא נושא מרכזי בתכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק ***משפטים הפוכים – מעגל*** מסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים להחליף בין משפט ובין המשפט ההפוך לו, ולתת מענה לקושי זה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
  - משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
  - משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***.
  - משימה 3 ***בודקים נימוקים***.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- משימה 1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
- משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***.
- משימה 3 ***בודקים נימוקים***.

שלוש המשימות מיועדות לעבודה עצמית של תלמידים, ומומלץ לבצע אותן ברצף בזו אחר זו.

המשימה הראשונה היא משימה שמטרתה לבדוק אם התלמידים מזהים במשפט מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח. התלמידים נדרשים לכתוב זאת במילים או בכתיב מתמטי. מיומנות זו היא בסיסית.

בשתי המשימות הנוספות שבתיק זה נתונות הוכחות קצרות לבעיות העוסקות במעגל. התלמידים נדרשים לנמק את שלבי ההוכחה או לבדוק את הנימוקים. על-פי תשובות התלמידים ניתן לבדוק אם הם מבחינים בין שני משפטים ההפוכים זה לזה.

מה נתון ומה יש להוכיח?

רשמו במילים **או** בכתיב מתמטי מה **נתון** ומה **צריך להוכיח** עבור כל אחד מהמשפטים הבאים:

דוגמה: בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

אפשרות ראשונה: במילים

נתון: טרפז שווה-שוקיים

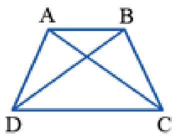
צריך להוכיח: אלכסוני הטרפז שווים.

אפשרות שנייה: בכתיב מתמטי

נתון: ABCD טרפז (AB || DC)

AD = BC

צריך להוכיח: AC = BD



א. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

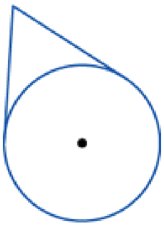
נתון:______________________________

צריך להוכיח:________________________

ב. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל, שווים.

נתון:______________________________

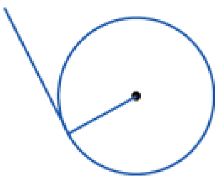
צריך להוכיח:________________________



ג. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

נתון:______________________________

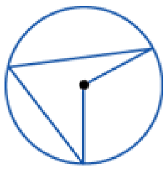
צריך להוכיח:________________________



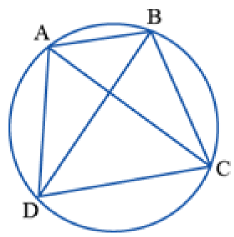
ד. במעגל זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

נתון:______________________________

צריך להוכיח:________________________



מוסיפים נימוקים



מרובע ABCD חסום במעגל.

נתון: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

צריך להוכיח: $AB \parallel DC$.

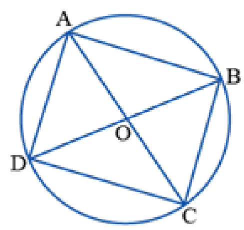
לפניכם הוכחה לבעיה. השלימו את הנימוקים החסרים.

טענה	נימוק
א. $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$	נתון
ב. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$	
ג. $AB \parallel DC$	

בודקים נימוקים

מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O. אלכסוני המרובע AC ו- BD עוברים דרך הנקודה O.

צריך להוכיח: ABCD מלבן.



לפניכם שתי הוכחות של תלמידים.

סמנו √ ליד כל טענה נכונה וליד כל נימוק נכון.

אם מצאתם טענה או נימוק שאינם נכונים, תקנו אותם.

ההוכחה של ורד:

טענה	נימוק
א. $AO = OC$, $BO = OD$	רדיוסים במעגל שווים זה לזה.
ב. $BD = AC$	קטרים במעגל שווים זה לזה.
ג. ABCD מלבן	במלבן האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה.

ההוכחה של שי:

טענה	נימוק
א. AC ו- BD קטרים במעגל.	כי הם עוברים דרך מרכז המעגל O.
ב. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^{o}$	אם זווית היקפית היא ישרה אז היא נשענת על קוטר.
ג. ABCD מלבן.	במלבן כל הזוויות ישרות.

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם במשימה 1, ניתן להיעזר בטבלה הבאה. משתמשים בסימונים שונים עבור תשובה נכונה ותשובה שגויה.

שם התלמיד/ה	משימה1 ***מה נתון ומה יש להוכיח?***								
	משפט א		משפט ב		משפט ג		משפט ד		הערות
	נתון	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	**נתון**	**צ.ל.**	
תלמיד 1	**V**	**V**	**V**	**V**	**X**	**X**	**X**	**V**	
סך-הכל									

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם במשימות 2 ו- 3, ניתן להיעזר בטבלה הבאה.

שם התלמיד/ה	משימה 2 ***מוסיפים נימוקים***			משימה 3 ***בודקים נימוקים***			הערות
	תשובה נכונה	טעויות בנימוקים **ב ו- ג**		**תשובה נכונה**	טעויות בנימוקים **ורד - ג שי - ב שי - ג**		
		כתבו נימוק הפוך או חלקי	**אחר**		**לא זיהו שהנימוק הפוך**	**אחר**	
תלמיד 1		**V**		**V**			
סך-הכל							

ההערכה אינה מתייחסת לטענות אלא רק לחלק מן הנימוקים (ראו בטבלה). בנימוקים אלה קיימת אפשרות לבלבול בין המשפט המתאים לבין המשפט ההפוך לו.

מקרא

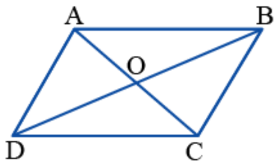
נימוק "הפוך" – נימוק באמצעות המשפט ההפוך לנדרש.

נימוק "חלקי" – נימוק באמצעות חלק של המשפט הנכון כמו "זוויות מתחלפות".

הערה: נימוק **אחר** עשוי להצביע על חוסר הבנה של ההוכחה או על בעיה בהכרת המשפטים שבאמצעותם יש לנמק או בזכירתם. הפעילות שבתיק אינה עוסקת במקרה זה.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרונות שלהלן:

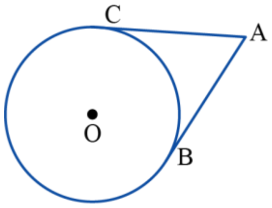
פתרון משימה 1 *מה נתון ומה יש להוכיח?*



א. **נתון**: מרובע ABCD, O מפגש האלכסונים.

$BO = OD \quad , \quad AO = OC$

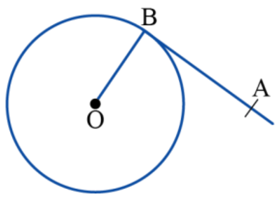
צריך להוכיח: המרובע ABCD הוא מקבילית.



ב. **נתון**: שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A מחוץ למעגל.

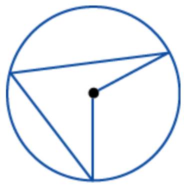
נקודות ההשקה הן B ו- C.

צריך להוכיח: $AB = AC$



ג. **נתון**: מעגל שמרכזו O, OB רדיוס ו- AB משיק למעגל בנקודה B.

צריך להוכיח: $OB \perp AB$

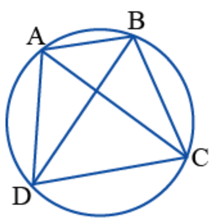


ד. **נתון**: זווית היקפית וזווית מרכזית במעגל הנשענות על אותה קשת.

צריך להוכיח: הזווית ההיקפית שווה למחצית הזווית המרכזית.

פתרון משימה 2 *מוסיפים נימוקים*

הוכחה:



טענה	נימוק
א. $AD = BC$	נתון
ב. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC$	לקשתות שוות במעגל מתאימות זוויות היקפיות שוות.
ג. $AB \parallel DC$	אם בין שני ישרים וחותך יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים זה לזה.

פתרון משימה 3 *בודקים נימוקים*

ההוכחה של ורד:

טענה		נימוק	
א. BO = OD , AO = OC	√	רדיוסים במעגל שווים זה לזה.	√
ב. BD = AC	√	קטרים במעגל שווים זה לזה.	√
ג. ABCD מלבן	√	במלבן האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה.	X

תיקון לנימוק ג': אם במרובע האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה, אז המרובע הוא מלבן.

ההוכחה של שי:

טענה		נימוק	
א. AC ו- BD קטרים במעגל.	√	כי הם עוברים דרך מרכז המעגל O.	√
ב. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^o$	√	זווית היקפית בת 90^o נשענת על קוטר.	X
ג. ABCD מלבן.	√	במלבן כל הזוויות ישרות.	X

תיקון לנימוק ב': זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה.

תיקון לנימוק ג': מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן או לפי הגדרת המלבן.

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

בתיק שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שלא זיהו נתון ומסקנה במשפט גיאומטרי (התקשו במשימה 1).	V	
לתלמידים שנימקו באמצעות משפט הפוך למשפט הנדרש (מסומנים בטבלת ההערכה בטור צבוע במשימות 2 או 3).		V

פעילות 1

פעילות זו מיועדת לתלמידים שהתקשו לזהות את הנתון ואת מה שיש להוכיח במשפט גיאומטרי.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***משפטים הפוכים***.
- דיון.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 1 *משפטים הפוכים***

בדף הפעילות:

  - ניסוח משפטים נתונים באמצעות המילים "אם" ו"אז".
  - ניסוח טענות הפוכות למשפטים נתונים.
  - בדיקת נכונות טענות הפוכות למשפטים.

משפטים הפוכים

1. רשמו את המשפטים הבאים באמצעות המילים "אם" ו"אז".

א. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

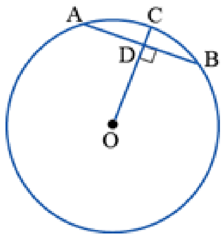
ב. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל שווים.

ג. במעגל זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

2. בכל סעיף מנוסחת טענה באמצעות נתון ומסקנה הנובעת ממנו.

– נסחו במילים את המשפט המתאים לטענה.

– נסחו את המשפט ההפוך.



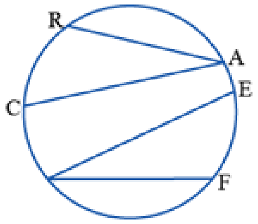
א. **נתון:** מעגל שמרכזו O. הרדיוס OC חותך את המיתר AB בנקודה D,

כך ש: $OD \perp AB$

מסקנה: $AD = BD$

המשפט:____

המשפט ההפוך:____________________________________



ב. **נתון:** מעגל שבו $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{RC}$. הנקודות A ו- D נמצאות על המעגל.

מסקנה: $\sphericalangle RAC = \sphericalangle FDE$

המשפט:____

המשפט ההפוך:____________________________________

3. בכל סעיף רשום משפט נכון.

נסחו במילים את הטענה ההפוכה למשפט. האם הטענה ההפוכה שניסחתם נכונה?

א. אם המצולע הוא משולש, אז ניתן לחסום אותו במעגל.

הטענה ההפוכה:____

הקיפו: הטענה ההפוכה נכונה / הטענה ההפוכה אינה נכונה

ב. לזוויות מרכזיות שוות במעגל מתאימים מיתרים שווים.

הטענה ההפוכה:____

הקיפו: הטענה ההפוכה נכונה / הטענה ההפוכה אינה נכונה

דיון

מתייחסים לאסטרטגיה של ניסוח משפט באמצעות המילים "אם" ו"אז". ניסוח כזה מארגן את המשפט מחדש ומאפשר לזהות את הנתון והמסקנה של המשפט, וכך עשוי לסייע גם בניסוח המשפט ההפוך.

חשוב לבדוק את נכונות הטענות ההפוכות. אפשר לבקש מן התלמידים לתת דוגמאות נוספות למשפטים שהטענות ההפוכות להם אינן נכונות. (דוגמאות: זוויות קודקודיות שוות זו לזו, שני משולשים חופפים הם בעלי שטחים שווים וכו'). דוגמאות כאלה עשויות לחדד את ההבדל בין טענה וטענה הפוכה לה ולהבהיר מדוע חשוב לנמק באמצעות המשפט המתאים ולא באמצעות המשפט ההפוך לו.

פעילות 2

הפעילות מיועדת לתלמידים שלא הבחינו בין משפט ישר ובין המשפט ההפוך לו.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 ***מהו הנימוק הנכון?***
- דיון.

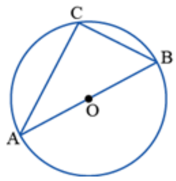
מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 2 *מהו הנימוק הנכון?***

התלמידים נדרשים לבחור נימוק לטענה מבין שני משפטים הפוכים זה לזה או לבדוק אם הנימוקים מתאימים.

מהו הנימוק הנכון?

1. א. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה O נמצאת על הצלע AB.

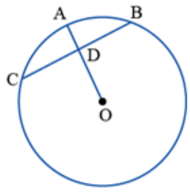


דנה טוענת: מהנתונים האלה נובע שזווית C שווה ל- 90°.

באיזה מהמשפטים הבאים היא צריכה לבחור כנימוק לטענתה?

- במעגל זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר במעגל היא זווית ישרה.

ב. במעגל שמרכזו O, הרדיוס OA חותך את המיתר CB בנקודה D, כך ש- BD = CD.



יוסי טוען: מהנתונים האלה נובע שזווית ADC שווה ל- 90°.

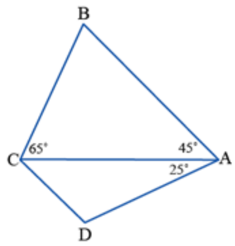
באיזה מהמשפטים הבאים הוא צריך לבחור כנימוק לטענתו?

- האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר.
- קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

2. במרובע ABCD נתון ש- **AB || DC**

קבעו לפי נתון זה ולפי הנתונים הרשומים על השרטוט אם ניתן לחסום את המרובע ABCD במעגל.

הקיפו: כן / לא / אי אפשר לדעת



סמנו את הנימוק לקביעתכם.

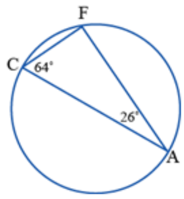
☐ אם ניתן לחסום מרובע במעגל, אז הסכום של כל זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

☐ אם הסכום של זוג זוויות נגדיות במרובע שווה ל- 180°, אז ניתן לחסום אותו במעגל.

☐ אין מספיק נתונים כדי לקבוע.

3. לפניכם התשובה של דנה לבעיה הבאה:

קבעו לפי הנתונים הרשומים על השרטוט אם אחת מצלעות המשולש היא קוטר במעגל.



הקיפו: **כן / לא / אי אפשר לדעת**

נימוק: *F זווית היקפית הנשענת על קוטר*

מה דעתכם על תשובתה של דנה?

- **דיון**
  - מתייחסים לאפשרויות שונות לכתיבת נימוקים באופן שמבהיר שמתכוונים למשפט המתאים ולא להפוך לו.
    - ניסוח מלא של המשפט (ולא חלקי כמו הנימוק בשאלה 3 בדף פעילות 2)
    - שמו של המשפט (אם יש לו שם) כמו משפט פיתגורס
    - שימוש בביטוי המדגיש את הסיבתיות. דוגמה: המרובע הוא מלבן **כי**...
  - דנים בכשל הלוגי של הסתמכות על טענה שרוצים להוכיח. לכן לא ניתן, למשל, להסיק שאפשר לחסום את המרובע במעגל (בעיה 2 בדף פעילות 2) על סמך נימוק המתחיל במילים "אם ניתן לחסום מרובע במעגל".

הצעה לפתרון דפי הפעילות

פתרון דף פעילות 1 *משפטים הפוכים*

1. א. **אם** קטע ממרכז המעגל חוצה את המיתר, **אז** הוא מאונך למיתר.

ב. **אם** שני משיקים למעגל יוצאים מאותה נקודה, **אז** הם שווים באורכם.

ג. **אם** במעגל זווית היקפית וזווית מרכזית נשענות על אותה קשת, **אז** הזווית ההיקפית שווה למחצית הזווית המרכזית.

2. א. **המשפט**: רדיוס המאונך למיתר חוצה אותו.

המשפט ההפוך: רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.

ב. **המשפט**: אם זוויות היקפיות נשענות על קשתות שוות, אז הן שוות זו לזו.

המשפט ההפוך: אם זוויות היקפיות שוות זו לזו, אז הן נשענות על קשתות שוות.

3. א. אם מצולע חסום במעגל, אז הוא משולש.
טענה זו אינה נכונה. המצולע יכול להיות בעל מספר צלעות כלשהו.

ב. למיתרים שווים במעגל מתאימות זוויות מרכזיות שוות.
משפט זה נכון.

פתרון דף פעילות 2 *מהו הנימוק הנכון?*

1. א. **הנימוק**: זווית היקפית הנשענת על קוטר במעגל היא זווית ישרה.

ב. **הנימוק**: קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

2. ניתן לחסום את המרובע ABCD במעגל.

הנימוק: אם הסכום של זוג זוויות נגדיות במרובע שווה ל- 180^o, אז ניתן לחסום אותו במעגל.

3. דנה נימקה נימוק חלקי, לכן אי-אפשר לדעת לאיזה משפט היא מתכוונת.

הנימוק המלא: במעגל זווית היקפית ישרה נשענת על הקוטר.