



תיק משימטיקה מתיחות וכיווצים של פונקציה

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
4	החומרים והעזרים הדרושים
5	רקע
5	הצעה למהלך העבודה
6	עבודה על משימת ההערכה
6	מתאימים מתיחות וכיווצים
7	הערכת תוצרי התלמידים
9	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
9	פעילות 1
10	דף פעילות מתיחות וכיווצים 1 – חלק א'
12	דף פעילות מתיחות וכיווצים 1 – חלק ב'
14	פעילות 2
14	דף פעילות מתיחות וכיווצים 2 – חלק א'
17	דף פעילות מתיחות וכיווצים 2 – חלק ב'

מתיחות וכיווצים של פונקציה



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים בין ייצוגים גרפיים, סימבוליים ומילוליים של מתיחות וכיווצים של פונקציות בכיוונים אנכי ואופקי, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להתאים בין מתיחה וכיווץ של גרף הפונקציה $f(x)$ בכיוון **אנכי** לבין ביטוי סימבולי מהצורה $k f(x)$
 - (k פרמטר חיובי), כך ש:
 - בעבור $k > 1$ הגרף נמתח בכיוון אנכי,
 - בעבור $0 < k < 1$ הגרף מתכווץ בכיוון אנכי.
- להתאים בין מתיחה וכיווץ של גרף הפונקציה $f(x)$ בכיוון **אופקי** לבין ביטוי סימבולי מהצורה $f(kx)$
 - (k פרמטר חיובי), כך ש:
 - בעבור $k > 1$ הגרף מתכווץ בכיוון אופקי,
 - בעבור $0 < k < 1$ הגרף נמתח בכיוון אופקי.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: 10-15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 90 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף הוראות למשימה **מתאימים מתיחות וכיווצים**.
- ערכת כרטיסים למשימה **מתאימים מתיחות וכיווצים**.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות **מתיחה וכיווץ 1**.
- יישומון גיאוגברה [מתיחות וכיווצים 1](#).

לפעילות 2

- דף פעילות **מתיחה וכיווץ 2**.
- יישומון גיאוגברה [מתיחות וכיווצים 2](#).



רקע

במסגרת המבוא ללימודי אנליזה של פונקציות עוסקים בפעולות שונות על פונקציות (הזזות, מתיחות וכיווצים, שיקופים ועוד) ובייצוגים המילולי, הגרפי והאלגברי של פעולות אלה. בעזרת פעולות על פונקציות ניתן להשתמש בידע קודם על פונקציה אחת כדי להסיק על תכונותיה של פונקציה אחרת. בנוסף שימוש בפעולות אלה מאפשר לבצע בקרה על תוצאות חקירה של פונקציה המתקבלת מפונקציה מוכרת אחרת על ידי הרכבה של פעולות כאלה. לדוגמה, ניתן לשרטט בקלות את גרף הפונקציה $f(2x)$ אם מתייחסים אליו כאל כיווץ אופקי פי 2 של גרף הפונקציה f .

הפעולות המתבצעות על פונקציות כוללות מתיחות וכיווצים בכיוונים אנכיים ואופקיים. ידועים מספר קשיים בקרב תלמידים בנושא זה. קושי נפוץ קשור בבלבול בין הביטוי הסימבולי המתאים למתיחה או כיווץ של פונקציה נתונה f בכיוון אנכי, לבין ביטוי המתאים למתיחה או כיווץ של הפונקציה f בכיוון אופקי. קושי נוסף קשור לנטייה של תלמידים להתאים ביטוי מהצורה $f(kx)$, כאשר $k > 1$, למתיחה אופקית (במקום לכיווץ אופקי), וכאשר $0 < k < 1$ לכיווץ אופקי (במקום למתיחה אופקית).

התיק **מתיחות וכיווצים של פונקציה** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה **מתאימים מתיחות וכיווצים**.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.



עבודה על משימת ההערכה

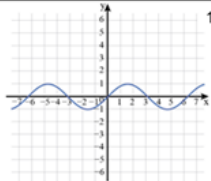
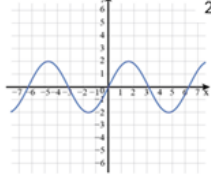
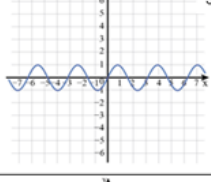
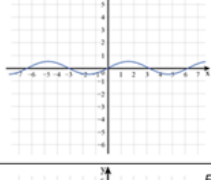
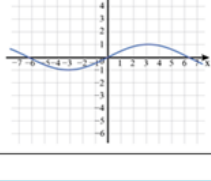
במשימה **מתאימים מתיחות וכיווצים** מופיעות חמש פונקציות: פונקציית מקור וארבע פונקציות שהתקבלו ממתיחות או מכיווצים שלה (בכיוון אנכי או אופקי). כל אחת מחמש הפונקציות מתוארת באופן גרפי, מילולי וסימבולי, וכל תיאור מופיע על כרטיס נפרד.

התלמידים מתבקשים ליצור שלשות כרטיסים, כך שכל שלשה כוללת דרכים שונות לתאר אותה פונקציה.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

מתאימים מתיחות וכיווצים

לפניכם שלוש קבוצות של כרטיסים. בכל קבוצה חמישה כרטיסים. בקבוצה אחת יש תיאורים גרפיים, בקבוצה שנייה תיאורים מילוליים, ובקבוצה השלישית ביטויים סימבוליים. בשורה הראשונה שבטבלה שלפניכם מופיעה פונקציית מקור בשלושת התיאורים (גרפי, מילולי וסימבולי). בעמודה הראשונה מופיעים גרפים המתקבלים כתוצאה ממתיחות או כיווצים שונים של פונקציית המקור. עליכם ליצור שלשות של כרטיסים, כך שלכל גרף יותאם תיאור מילולי וביטוי סימבולי שלו. מלאו את הטבלה לפי השלשות שהרכבתם.

תיאור גרפי	תיאור מילולי	ביטוי סימבולי
1 	פונקציית המקור	$f(x)$
2 		
3 		
4 		
5 		

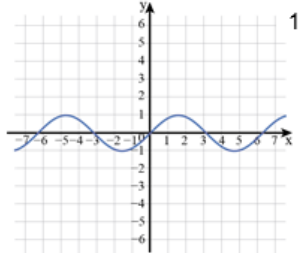
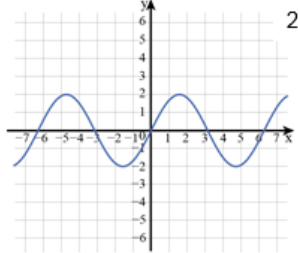
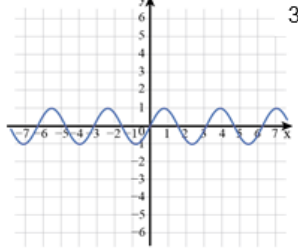
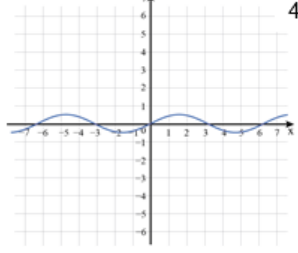
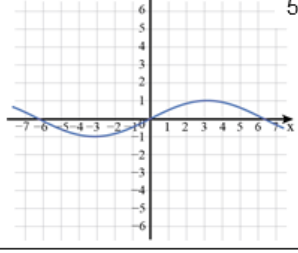


הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

הערות	טעויות		תשובה נכונה	שם התלמיד/ה
	במתיחה/כיווץ בכיוון אנכי	במתיחה/כיווץ בכיוון אופקי		
	✓	✓		תלמיד 1
			✓	תלמיד 2
		✓		תלמיד 3
				סך-הכל

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

ביטוי סימבולי	תיאור מילולי	תיאור גרפי
$f(x)$	פונקציית המקור	
$2f(x)$	מתיחה אנכית פי 2	
$f(2x)$	כיווץ אופקי פי 2	
$0.5f(x)$	כיווץ אנכי פי 2	
$f(0.5x)$	מתיחה אופקית פי 2	



פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שהתקשו במתיחות ובכיווצים אנכיים (מסומנים בעמודה מודגשת בטבלת ההערכה).	V	
לתלמידים שהתקשו במתיחות ובכיווצים אופקיים (מסומנים בעמודה מודגשת בטבלת ההערכה).		V

פעילות 1

שלבי הפעילות

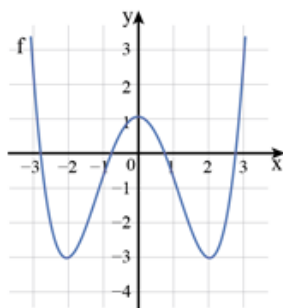
- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 1** – חלק א'.
- דיון.
- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 1** – חלק ב'.
- דיון מסכם מלווה ביישומון [מתיחות וכיווצים 1](#).

מהלך הפעילות

- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 1** – חלק א' בהינתן הגרף של פונקציה $f(x)$, התלמידים צריכים למצוא איך ייראה הגרף של $k f(x)$.

מתיחות וכיווצים 1

חלק א'



1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

א. איך ייראה גרף הפונקציה $g(x) = 3f(x)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אנכי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אנכי.

ב. איך ייראה גרף הפונקציה $h(x) = \frac{1}{3}f(x)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אנכי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אנכי.

ג. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.

ד. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.

• דיון

○ דנים בפתרונות התלמידים של המטלה בדף הפעילות **מתיחות וכיווצים 1 – חלק א'** בסיוע השאלות הבאות:

- האם סוג נקודות הקיצון נשמר או השתנה בביצוע פעולת מתיחה או כיווץ?
- האם שיעור ה- x של נקודות הקיצון נשמר או השתנה?
- מה לגבי שיעור ה- y ?
- מה השתנה בנקודות הקיצון של הפונקציה בביצוע פעולת המתיחה וכיצד?
- האם נכון לומר כי בביצוע המתיחה שינוי זה מתרחש **לכל** נקודה על גרף הפונקציה?
- מה ישתנה בתשובות האחרונות אם נתבונן בפעולת הכיווץ?
- האם נקודות האפס של הפונקציה נשמרו או השתנו בביצוע פעולת מתיחה או כיווץ?
- האם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע פעולת מתיחה וכיווץ כאלה?
- האם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע פעולת מתיחה וכיווץ כאלה?

○ כדאי לציין את השילוב של התבוננות נקודתית המתמקדת בנקודות הקיצון בביצוע פעולות המתיחה והכיווץ, עם התבוננות גלובאלית במתיחה או בכיווץ של הגרף כיחידה שלמה:

כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$, ומגדירים פונקציה חדשה $g(x) = 3f(x)$ אז שיעור ה- y של נקודות הקיצון מוכפל ב- 3. למעשה שיעור ה- y של כל הנקודות על גרף הפונקציה f מוכפל ב- 3. לכן גרף הפונקציה g המתקבל הוא מתיחה של גרף הפונקציה f פי 3 בכיוון אנכי.

○ ניתן לסכם את תשובות התלמידים באמצעות הטבלה הבאה¹:

אם השתנה, כיצד השתנה		השתנה	נשמר	
בפעולת מתיחה	בפעולת כיווץ			
				סוג הקיצון
				שיעור ה- x של נקודת הקיצון
				שיעור ה- y של נקודת הקיצון
				תחומי עלייה וירידה
				נקודות אפס
				תחומי חיוביות ושליליות
				שיעורי נקודה כלשהי

¹ ניתן להוסיף פרמטרים נוספים כגון: זוגיות/אי-זוגיות של פונקציה, אסימפטוטות אנכיות/אופקיות ועוד. זאת בהתאם לחומר הנלמד בכיתה.

• עבודה על דף הפעילות מתיחות וכיווצים 1 – חלק ב'

בדומה לחלק א' בדף הפעילות, התלמידים נדרשים למצוא איך יראה הגרף של $f(x)$ בהינתן הגרף של פונקציה $f(x)$, אך הפעם במקום לעסוק במקרים פרטיים עוסקים במקרה הכללי.

חלק ב'

2. הפונקציה $g(x)$ הוגדרה כך: $g(x) = kf(x)$ (k פרמטר חיובי).

עבור אילו ערכים של k גרף הפונקציה g :

א. יהיה מתיחה אנכית של גרף הפונקציה f ? _____

ב. יהיה כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f ? _____

ג. יתלכד עם גרף הפונקציה f ? _____

3. פתחו את קובץ גיאוגרפה הבא: [מתיחות וכיווצים 1](#)

בצד שמאל של המסך מופיע סרגל גרירה. ניתן לגרור את הנקודה שבסרגל וכך לשנות את הערך של k . שנו את הערך של k ובדקו את תשובותיכם לשאלה 2.

הפונקציה $g(x) = kf(x)$ היא **מתיחה אנכית או כיווץ אנכי** של גרף הפונקציה $f(x)$.

דיון מסכם מלווה ביישומון [מתיחות וכיווצים 1](#)

לסיכום מומלץ לדון בנקודות הבאות:

○ ביטוי מהצורה $k f(x)$ מתאר מתיחות וכיווצים אנכיים של גרף הפונקציה $f(x)$.

– אם $k > 1$, אז הגרף ימתח פי k .

– אם $0 < k < 1$, אז הגרף יתכווץ פי $\frac{1}{k}$.

○ כדאי להדגים את המתיחות והכיווצים המתקבלים עבור ערכים שונים של הפרמטר k , ולשים לב כי שיעור ה- y של כל נקודה על גרף הפונקציה מוכפל ב- k ובפרט,

– שיעור ה- y של נקודות הקיצון מוכפל ב- k ,

– שיעור ה- y של נקודת החיתוך עם ציר ה- y מוכפל ב- k .

– תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אינם משתנים בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אנכי, כי סוג הקיצון ושיעורי ה- x של נקודות הקיצון אינם משתנים.

– נקודות האפס של הפונקציה אינן משתנות בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אנכי.

– תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה אינם משתנים בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אנכית, כי נקודות האפס אינן משתנות, וכאשר כופלים מספר ב- k ($k > 0$) סימן המכפלה הוא כסימן המספר.

○ ביישומון מוצעות שתי אפשרויות. באפשרות א' ישנה הפונקציה שהוצגה בדף הפעילות **מתיחות וכיווצים 1**. ניתן לבחור במקומה באפשרות ב', כדי להדגים מתיחות וכיווצים אנכיים של פונקציה אחרת.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 2** – חלק א'.
- דיון.
- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 2** – חלק ב'.
- דיון מסכם מלווה ביישומון [מתיחות וכיווצים 2](#).

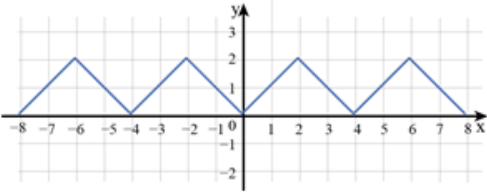
מהלך הפעילות

- עבודה על דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 2** – חלק א'

התלמידים נדרשים לשרטט גרפים של פונקציות "מתוחות" או "מכווצות" ולתאר באופן אלגברי ומילולי את הפונקציות המתקבלות לאחר המתיחה או הכיווץ. תשומת לב ניתנת גם לנקודות הקיצון של הפונקציה הנתונה ושל הפונקציה שהתקבלה.

מתיחות וכיווצים 2

חלק א'



1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-8 \leq x \leq 8$.

א. השלימו את טבלת הערכים הבאה:

x	-8	-6	-4	-2	0	1	2	3	4	6	8
$f(x)$											

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(2x)$.

השלימו את טבלת הערכים הבאה:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$									

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. השלימו בעזרת מחסן המילים: גרף הפונקציה $g(x)$ הוא _____ פי 2 של גרף הפונקציה $f(x)$ בכיוון _____.

מחסן מילים: מתיחה, כיווץ, אופקי, אנכי

2. נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)(x+2)$.

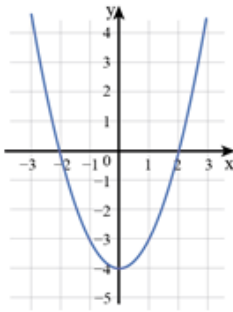
א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ב. מגדירים פונקציה חדשה המקיימת: $g(x) = f(2x)$. כתבו ביטוי אלגברי

עבור הפונקציה $g(x)$.

ג. מהן נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$?

ד. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.



3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

א. איך ייראה גרף הפונקציה $g(x) = f(3x)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אנכי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אנכי.

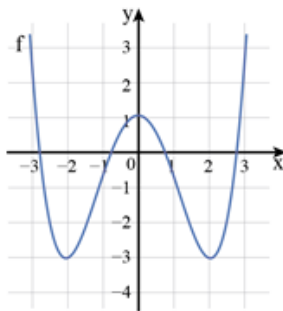
ב. איך ייראה גרף הפונקציה $h(x) = f(\frac{1}{3}x)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אופקי.
- ☐ הגרף יימתח פי 3 בכיוון אנכי.
- ☐ הגרף יתכווץ פי 3 בכיוון אנכי.

ג. כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן. _____

ד. כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן. _____



○ דנים בפתרונות התלמידים של דף הפעילות **מתיחות וכיווצים 2 – חלק א'** בסיוע השאלות הבאות:

– ראינו כי הפונקציה $g(x) = f(2x)$ היא כיווץ פי 2 של גרף הפונקציה $f(x)$, בכיוון אופקי. איזו פונקציה תתאר כיווץ פי 5 של גרף הפונקציה בכיוון אופקי?

– איזו פונקציה תתאר **מתיחה** פי 2 של גרף הפונקציה בכיוון אופקי?

○ כדאי לציין את המעבר מהתבוננות נקודתית על פעולת המתיחה האופקית או הכיווץ האופקי המתבצעת, להתבוננות גלובאלית שבה רואים את המתיחה או הכיווץ של גרף הפונקציה כיחידה שלמה:

כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$, ומגדירים פונקציה חדשה $g(x) = f(2x)$, אז שיעור ה- y של כל נקודה על גרף הפונקציה g שווה לשיעור ה- y שהפונקציה f מקבלת בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא פי 2 מנקודה זו. לכן גרף הפונקציה g המתקבל הוא כיווץ פי 2 של גרף הפונקציה f בכיוון אופקי.

○ בהתייחס לבעיה 3 או לגרף שבבעיה 1:

– האם סוג נקודות הקיצון נשמר או השתנה בביצוע פעולת מתיחה או כיווץ?

– האם שיעור ה- x של נקודות הקיצון נשמר או השתנה?

– מה לגבי שיעור ה- y ?

– מה השתנה בנקודות הקיצון של הפונקציה בביצוע פעולת הכיווץ וכיצד?

– האם יש נקודת קיצון שלא השתנתה בכלל?

– מה ישתנה בתשובות האחרונות אם נתבונן בפעולת המתיחה?

– האם נקודות האפס של הפונקציה נשמרו או השתנו בביצוע פעולת מתיחה או כיווץ?

– האם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע פעולת מתיחה וכיווץ כאלה?

– האם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע פעולת מתיחה וכיווץ כאלה?

• עבודה על דף הפעילות מתיחות וכיווצים 2 – חלק ב'

הפעילות מתמקדת בהכללת הקשר בין פעולה של מתיחה או כיווץ בכיוון אופקי מהצורה $f(kx)$ והערך של הפרמטר k . התלמידים יכולים להיעזר ביישומון [מתיחות וכיווצים 2](#) הממחיש את פעולות המתיחה והכיווץ באופן דינמי.

חלק ב'

4. הפונקציה $h(x)$ הוגדרה כך: $h(x) = f(kx)$ (k פרמטר חיובי).

עבור אילו ערכים של k גרף הפונקציה g :

א. יהיה כיווץ אופקי של גרף הפונקציה f ? _____

ב. יהיה מתיחה אופקית של גרף הפונקציה f ? _____

ג. יתלכד עם גרף הפונקציה f ? _____

5. פתחו את קובץ גיאוגברה הבא: [מתיחות וכיווצים 2](#).

בצד שמאל של המסך מופיע סרגל גרירה. ניתן לגרור את הנקודה שבסרגל וכך לשנות את הערך של k . שנו את הערך של k ובדקו את תשובותיכם לשאלה 4.

הפונקציה $g(x) = f(kx)$ היא מתיחה אופקית או כיווץ אופקי של גרף הפונקציה $f(x)$.

• דיון מסכם מלווה ביישומון [מתיחות וכיווצים 2](#)

לסיכום מומלץ לדון בנקודות הבאות:

○ ביטוי מהצורה $f(kx)$ מתאר מתיחות וכיווצים אופקיים של גרף הפונקציה $f(x)$.

– אם $k > 1$ אז הגרף יתכווץ פי k .

– אם $0 < k < 1$ אז הגרף ימתח פי $\frac{1}{k}$.

– שיעור ה- x ($x \neq 0$) של נקודות הקיצון משתנה בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אופקי, אך שיעור ה- y אינו משתנה, וגם סוג הקיצון נשמר.

– נקודת החיתוך עם ציר ה- y אינה משתנה, שכן לכל ערך של הפרמטר k מתקיים: $f(k \cdot 0) = f(0)$. לכן אם נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא נקודת קיצון, אז נקודת קיצון זו לא תשתנה בכלל.

– תחומי העלייה והירידה של הפונקציה משתנים בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אופקי, כי שיעור ה- x של נקודות הקיצון משתנה (מלבד נקודת קיצון שהיא נקודת חיתוך עם ציר ה- y).

– נקודות האפס של הפונקציה משתנות בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אופקי (מלבד נקודת אפס בראשית הצירים).

– תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה משתנים בביצוע מתיחה או כיווץ בכיוון אופקי, כי נקודות האפס משתנות.

- ביישומן מוצעות שתי אפשרויות. באפשרות א' ישנה הפונקציה שהוצגה בדף הפעילות **מתיחות וכיווצים 2**. ניתן לבחור במקומה באפשרות ב', כדי להדגים מתיחות וכיווצים אופקיים של פונקציה אחרת.
- לסיום, אפשר לרכז בטבלה את ההבדלים בין מתיחות וכיווצים אנכיים למתיחות וכיווצים אופקיים בהצגה הסימבולית, ובתכונות שתוארו בשתי הפעילויות.