תיק משימטיקה

קו עזר והנחות שגויות

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

קו עזר והנחות שגויות

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולתם של התלמידים להוסיף קו עזר במהלך הוכחה של בעיה בגיאומטריה ולייחס לו רק תכונות הנובעות מהנתונים וממשפטים ידועים, ולא תכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד. התיק עוסק במעגלים ובדמיון משולשים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים לנמק כל תכונה שמייחסים לקו עזר על סמך הנתונים ומשפטים ידועים, ולא על סמך מראה השרטוט בלבד.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: 15-20 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: 35-45 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימה ***מהו אורך הקטע?***

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה:

- המשימה ***מהו אורך הקטע?*** (להקרנה על הלוח).
- דף פעילות 1 ***הוספת קווי עזר*** מלווה ביישומון **הוספת קווי עזר** (לכל תלמיד/ה).
- דף פעילות 2 ***שני מעגלים*** (לכל תלמיד/ה).

רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. לעיתים במהלך ההוכחה יש צורך להוסיף בניית עזר שתקדם את מהלך הפתרון. למשל, למתוח קו בין שתי נקודות מסוימות. במקרים כאלו קיימת נטייה של תלמידים לייחס לקו זה תכונה כלשהי רק על סמך מראה השרטוט. למשל, תלמידים מוסיפים קו בין שתי נקודות וטוענים שהוא מקביל לקו אחר בשרטוט "כי כך זה נראה", או מחברים שתי נקודות ומניחים שהקטע עובר גם דרך נקודה שלישית המופיעה בשרטוט. לפעמים הנחות אלה נכונות, וניתן להצדיק אותן על ידי שיקולים גיאומטריים; לפעמים הנחות אלה נכונות רק במקרים פרטיים אך לא במקרה הכללי; ובמקרים אחרים הנחות אלה אינן נכונות כלל ויוצרות סתירה בינן ובין נתוני הבעיה.

שימוש בתוכנת גיאומטריה דינמית מאפשר בדיקה של נכונות התכונות המיוחסות לקווי עזר שהוספו במהלך הוכחה. באופן כזה ניתן להמחיש את הזהירות שיש לנקוט בהסקת תכונות משרטוט ואת הצורך להשתמש בשיקולים גיאומטריים במקום במראה השרטוט בלבד.

התיק ***קו עזר והנחות שגויות*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים לייחס תכונות לקו עזר שהוסיפו במהלך הוכחה, בהתבסס על מראה השרטוט בלבד וללא הנמקה, ולתת מענה לקושי זה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***מהו אורך הקטע?***
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***מהו אורך הקטע?*** ישנן ארבע הצעות שונות לפתרון בעיה באמצעות קו עזר. התלמידים צריכים לקבוע עבור כל אחת מההצעות אם היא נכונה או שגויה ולנמק את קביעתם.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של התלמידים.

מהו אורך הקטע?

תמר, רון, אליה ורועי פתרו את הבעיה הבאה:

נתון: AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הַעֲבירו משיק למעגל בנקודה C. הנקודה B נמצאת על המשיק.
הקטע AB חותך את המעגל בנקודה D. $AO = 6$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ. **חשבו** את אורך הקטע AB.

כל אחד מארבעת התלמידים הציע להוסיף קו עזר שיסייע לפתרון הבעיה.

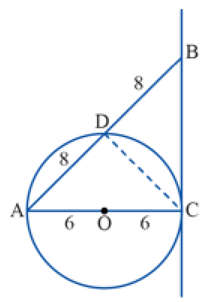
קראו כל הצעה וקבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו את קביעתכם.

ההצעה של תמר:

נוסיף תיכון DC לצלע AB ב- ΔABC.

$AD = 8$ ס״מ

לכן: $AB = 16$ ס״מ



ההצעה של רון:

נוסיף מיתר DC במעגל O

DC גובה לצלע AB במשולש ABC

(כי זווית ADC נשענת על קוטר).

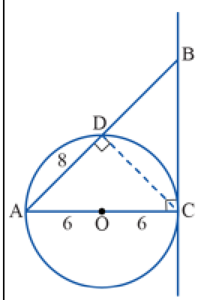
$\Delta ADC \sim \Delta ACB$

(משפט דמיון ז.ז.).

לכן: $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

נציב נתונים ונקבל:

$AB = 18$ ס״מ



ההצעה של אליה:

נוסיף קטע EA היוצא מאמצע BC וחוצה את זווית A.

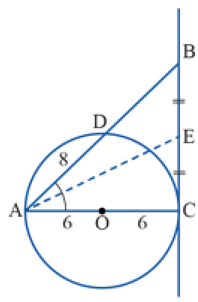
לפי משפט חוצה זווית

ב- ΔABC: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB}$

ולפי קו העזר: $BE = EC$

נציב ונקבל $AC = AB$

לכן: $AB = 12$ ס״מ



ההצעה של רועי:

נוסיף רדיוס DO המקביל לקטע BC.

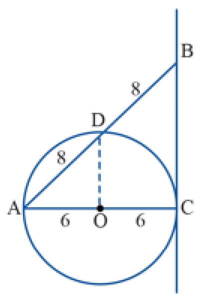
$AO = CO = 6$ ס״מ

לכן DO הוא קטע

אמצעים ב- ΔABC

נקבל: $BD = AD = 8$ ס"מ

לכן: $AB = 16$ ס״מ



הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון תשובותיהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	ההצעה של תמר		ההצעה של רון		ההצעה של אליה		ההצעה של רועי	
	שגויה	נכונה	שגויה	נכונה	שגויה	נכונה	שגויה	נכונה
תלמיד 1	V			V		V	V	
תלמיד 2		V	V		V			V
סך-הכל								

בטבלה יש לסמן את תגובת התלמידים על כל אחת מן ההצעות.

העמודות המודגשות מייצגות פתרון שבו קיימת הנחה שגויה על קו עזר.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

- **ההצעה של רון נכונה.** רון קבע שקו העזר DC ששרטט הוא גובה במשולש ונימק זאת באופן נכון.

  הערה: בעזרת בניית העזר של רון ניתן לפתור את הבעיה גם בדרך נוספת לפי משפט פיתגורס.

- **ההצעה של תמר שגויה.**

  קו העזר DC איננו תיכון (לפי הצעתה מתקבל משולש ישר-זווית ושווה שוקיים ADC שצלעותיו הן 8 ס"מ, 8 ס"מ ו- 12 ס"מ בסתירה למשפט פיתגורס).

- **ההצעה של אליה שגויה.**

  קו העזר AE היוצא מאמצע הצלע BC אינו חוצה את הזווית A (לפי הצעתו מתקבל משולש שווה-שוקיים שבו אחת מזוויות הבסיס ישרה בסתירה לסכום זוויות במשולש).

- **ההצעה של רועי שגויה.**

  קו העזר DO אינו מקביל לקטע AB (לפי הצעתו מתקבל משולש AOD ישר זווית שאורכי צלעותיו הן 6 ס"מ 6 ס"מ ו- 12 ס"מ, בסתירה למשפט פיתגורס).

פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שסימנו פתרון שגוי אחד או יותר במשימה כפתרון נכון. כלומר, ייחסו תכונה שגויה לקו עזר (מסומנים בעמודות המודגשות בטבלת ההערכה).

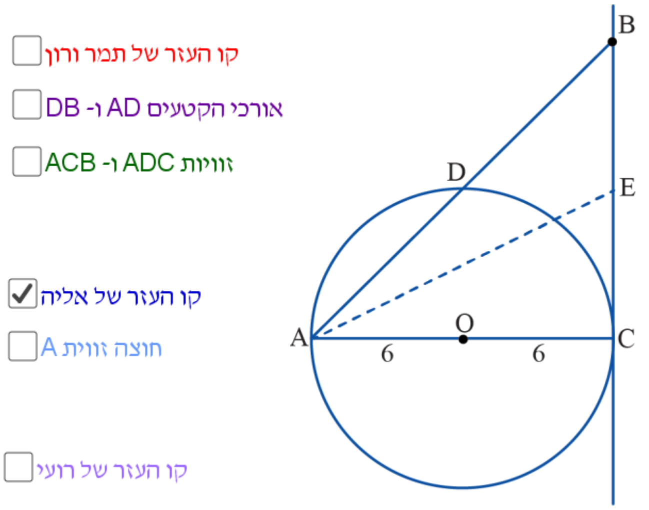
שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 ***הוספת קווי עזר*** מלווה ביישומון **הוספת קווי עזר**.
- דיון.
- עבודה על דף פעילות 2 ***שני מעגלים***.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 1 *הוספת קווי עזר***

דף העבודה מלווּה ביישומון גיאוגברה **הוספת קווי עזר** שבעזרתו ניתן לבדוק את ההצעות שהציעו ארבעת התלמידים. בעזרת היישומון ניתן לראות שהתכונות הגיאומטריות שתמר, אליה ורועי ייחסו לקווי העזר עומדות בסתירה לנתונים. למשל: אמנם קיים מצב שבו הקטע DC הוא תיכון לצלע AB, אולם במצב כזה $AD \neq 8\text{cm}$.



הוספת קווי עזר

פתחו את היישומון הוספת קווי עזר ועֲנו על השאלות הבאות:

1. תמר הציעה: **נוסיף תיכון DC לצלע AB במשולש ABC.**

רון הציע: **נוסיף מיתר DC. DC גובה לצלע AB במשולש ABC.**

הוסיפו את קווי העזר של תמר ורון, את אורכי הקטעים AD ו- BD ואת הזוויות ADC ו- ACB.

גררו את הנקודה B לאורך המשיק וקבעו:

א. האם ההצעה של תמר נכונה? נמקו ____

____

ב. האם ההצעה של רון נכונה? נמקו____

____

2. אליה הציע: **נוסיף קטע AE היוצא מאמצע BC וחוצה את זווית A.**

הוסיפו את קו העזר של אליה ואת חוצה הזווית A . גררו את הנקודה B לאורך המשיק וקבעו:

האם ההצעה של אליה נכונה? נמקו ____

____

3. רועי הציע: **נוסיף רדיוס DO המקביל לקטע BC.**

הוסיפו את קו העזר של רועי, גררו את הנקודה B לאורך המשיק וקבעו:

האם הצעתו של רועי נכונה? נמקו ____

____

שאלה למתקדמים

התבוננו בכל אחת מההצעות שאינן נכונות. **הוכיחו** עבור כל אחת שהיא אינה יכולה להתקיים בתנאי השאלה.

- **דיון**

לסיכום מומלץ לדון בנקודות הבאות:

– מיהן ההצעות השגויות? מה משותף לכולן ? (כולן מבוססות על ההנחה שקו העזר מקיים תכונה מסוימת שעומדת בסתירה לנתוני השאלה).

– במה שונה קו העזר בהצעה של רון מזה שבשאר ההצעות? במה הוא שונה מההצעה של תמר? (רון מציע בתחילה להוסיף מיתר. הוא מייחס לקו העזר שלו תכונה נוספת – שהוא גובה, רק אחרי שהוא מוכיח זאת. לעומתו המציעים האחרים מייחסים תכונות לקווי העזר שלהם בלי לבדוק ולהוכיח שהן אכן מתקיימות בו-זמנית).

– כיצד ייתכן שההצעות שגויות? הרי בכל משולש ניתן להעביר תיכון, גובה או חוצה זווית? (יש לשים לב שחיבור בין שתי נקודות נתונות מגדיר תכונה בפני עצמה, והיא קו ישר אחד ויחיד. כלומר, אם מחברים קטע בין שתי נקודות נתונות, לא ניתן להניח שהקטע מקיים תכונה נוספת אלא אם כן מוכיחים זאת באמצעות נימוקים גיאומטריים. לעומת זאת ניתן להעביר תיכון/גובה/חוצה זווית במשולש בלי לקבוע שקצהו נמצא בנקודה מסוימת בשרטוט).
– הוכיחו ששלוש ההצעות השגויות אינן יכולות להתקיים ביחד עם תנאי הבעיה. (ראו "פתרון המשימה").

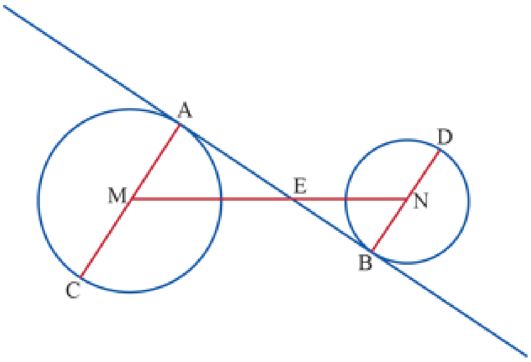
מסקנה: כאשר מוסיפים קו עזר בין שתי נקודות, יש לנמק במהלך ההוכחה כל תכונה שקטע זה מקיים.

- **עבודה על דף פעילות 2 *שני מעגלים***

דף פעילות זה נועד ליישום ולהרחבת העקרונות שנלמדו. הבעיה שבדף מדגימה כיצד ייחוס תכונה לקו עזר על סמך מראה השרטוט בלבד עלול לגרום לכך שבתהליך ההוכחה משתמשים במה שצריך להוכיח (הוכחה מעגלית). במקרה הנתון תלמידים נוטים לחבר את הנקודות C ו- D ולהניח שקטע זה עובר גם דרך הנקודה E. כלומר, מניחים שהנקודות C, D ו- E נמצאות על ישר אחד ואז מתקבלות זוויות קודקודיות. הנחה זו נכונה אמנם, אך לא ניתן להוכיח אותה לפני שמוכיחים את דמיון המשולשים המבוקש $\Delta END \sim \Delta EMC$ לפי משפט דמיון צ.ז.צ.

מתאים לעבודה עצמית או בזוגות.

שני מעגלים



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו M.

BD הוא קוטר במעגל שמרכזו N.

ישר משיק למעגלים M ו- N בנקודות A ו- B בהתאמה.

המשיק חותך את קטע המרכזים MN בנקודה E (ראו ציור).

נתון: רדיוס המעגל M הוא 30 ס"מ,

רדיוס המעגל N הוא 20 ס"מ,

אורך קטע המרכזים MN הוא 90 ס"מ.

א. מצאו את היחס $\frac{ME}{MC}$. נמקו.

ב. איתמר וגליה ניסו להוכיח כי $\Delta EMC \sim \Delta END$

איתמר טען: זה קל מאוד! נשרטט קטע DC העובר דרך הנקודה E, באופן זה נוכיח דמיון משולשים בעזרת משפט הדמיון ז.ז.

גליה טענה: אי אפשר לעשות את זה כך!

מי צודק? נמקו. בתשובתכם התייחסו לטענות של איתמר ושל גליה.

ג. הוכיחו: $\Delta EMC \sim \Delta END$.

הצעה לפתרון דף פעילות 2 *שני מעגלים*

א. $\measuredangle MAE = \measuredangle NBE = 90^o$ (המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה)

$\measuredangle MEA = \measuredangle NEB$ (זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\Delta MEA \sim \Delta NEB$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

נסמן $ME = x$

$MN = 90\text{ cm}$ (נתון)

$EN = 90 - x$ (חיסור קטעים)

$\frac{MA}{NB} = \frac{ME}{NE}$ (פרופורציה בין צלעות במשולשים דומים)

$\frac{30}{20} = \frac{x}{90 - x}$ (הצבה)

$x = 54\text{ cm}$

$\frac{ME}{MC} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}$

ב. גליה צודקת. איתמר הניח שקו העזר DC עובר גם דרך הנקודה E אך לא נימק זאת במהלך ההוכחה. קטע זה אכן עובר דרך הנקודה E אך ניתן להוכיח זאת רק לאחר הוכחת סעיף ג', ולכן לא ניתן להסתמך על כך בשלב זה.

ג. נשרטט קווי עזר קטעים CE ו- DE.

$\sphericalangle MAE = \sphericalangle NBE = 90^{o}$ (המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה)

$\Downarrow$

$AC \parallel BD$ (שני ישרים המאונכים לישר שלישי מקבילים זה לזה)

$\Downarrow$

$\sphericalangle CME = \sphericalangle DNE$ (בין ישרים מקבילים, זוויות מתחלפות שוות זו לזו)

$$\frac{ME}{NE} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{MC}{ND} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{ME}{NE} = \frac{MC}{ND}$$

$\Downarrow$

$\Delta EMC \sim \Delta END$ (משפט דמיון צ.ז.צ.)