תיק משימטיקה

התנהגות הפונקציה והתנהגות הנגזרת

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן העניינים

התנהגות הפונקציה והתנהגות הנגזרת[1]

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקשור בין ההתנהגות של פונקציה בתחום מסוים (עלייה, ירידה, נקודות קיצון ונקודות פיתול, לינאריות) לבין התנהגות הפונקציה הנגזרת בתחום זה. בפרט להעריך את יכולתם להסיק כיצד קשר זה מתבטא בגרפים של שתי הפונקציות, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.[2]

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לקשור בין ההתנהגות של פונקציה בתחום מסוים לבין **סימן** הנגזרת בתחום זה:
  - אם הפונקציה f עולה בתחום מסוים, אז הנגזרת f' היא אי-שלילית בתחום זה. באופן דומה, אם הפונקציה f יורדת בתחום מסוים, אז הנגזרת f' אינה חיובית בתחום זה.
  - אם הנגזרת f' חיובית בתחום מסוים, אז הפונקציה f עולה בתחום זה. באופן דומה אם הנגזרת f' שלילית בתחום מסוים, אז הפונקציה f יורדת בתחום זה.
  - אם לפונקציה f יש נקודת קיצון בנקודה פנימית, אז הנגזרת f' מתאפסת בנקודה זו.
  - אם הנגזרת f' של פונקציית פולינום f מתאפסת בנקודה מסוימת, אז לפונקציה f יש בנקודה זו או נקודת קיצון או נקודת פיתול.
- לקשור בין ההתנהגות של פונקציה בתחום מסוים לבין **התנהגות** הפונקציה הנגזרת בתחום זה:
  - אם לפונקציית פולינום f יש נקודת קיצון בנקודה פנימית, אז בנקודה זו גרף הפונקציה הנגזרת f' חותך את ציר ה- x.
  - אם לפונקציה f יש נקודת פיתול[3], אז בנקודה זו לגרף הפונקציה הנגזרת f' יש נקודת קיצון שבה הוא משיק לציר ה- x .
  - אם הפונקציה f היא פונקציה קווית (לינארית), אז הפונקציה הנגזרת f' היא פונקציה קבועה. כמו כן אם הפונקציה f אינה פונקציה קווית, אז הפונקציה הנגזרת f' אינה פונקציה קבועה.
- להשתמש בכל המסקנות שלעיל כדי להתאים בין גרף של פונקציה לבין הגרף של נגזרתה.

---

[1] שלושה תיקי משימטיקה עוסקים בקשרי פונקציה-נגזרת. התיק ***התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת*** עוסק בקשרים שבין התנהגות פונקציה בתחום מסוים לבין סימן הנגזרת שלה בתחום זה. התיק ***התנהגות הפונקציה והתנהגות הנגזרת*** עוסק, בנוסף לקשרים אלה, גם בקשרים נוספים בין התנהגות פונקציה לבין התנהגות הנגזרת שלה, תוך כדי התמקדות בלינאריות ובנקודות פיתול. התיק ***מגרף הנגזרת לגרף הפונקציה*** מתמקד בקשרים שבין גרף הנגזרת לגרפים של פונקציות שזוהי נגזרתן (פונקציות קדומות).

[2] מומלץ לעסוק בתיק זה לאחר שהתלמידים עבדו על התיק ***התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת***.

[3] תיק זה עוסק רק בנקודות פיתול שבהן שיפוע הפונקציה הוא אפס.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 45 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- הוראות למשימה ***רצף פונקציה-נגזרת***.
- ערכת כרטיסים למשימה ***רצף פונקציה-נגזרת***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה:

- דף פעילות 1 ***איזה כרטיס מתאים?*** (לכל תלמיד/ה).
- דף פעילות 2 ***מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת*** (לכל תלמיד/ה).
- יישומון גיאוגברה ***התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת***.

רקע

הפונקציה הנגזרת מהווה כלי חשוב המסייע לחקור התנהגות של פונקציות. במהלך לימודי האנליזה נעשה שימוש רב בקשרים שבין התנהגות פונקציה לבין תכונות הנגזרת שלה. לדוגמה, בהינתן פונקציה בייצוג אלגברי, ניתן למצוא את תחומי העלייה והירידה שלה, בהתבסס על הקשר ביניהם ובין סימן הנגזרת: בתחום שבו סימן הנגזרת חיובי – הפונקציה עולה, ובתחום שבו סימן הנגזרת שלילי – הפונקציה יורדת.

תלמידים רבים מתקשים בהבנת הקשרים שבין התנהגות פונקציה בתחום מסוים לבין סימן הנגזרת שלה בתחום זה. אחד הגורמים לקושי זה נעוץ בהבנת המשמעות של ערך הנגזרת בנקודה כשיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו, ושל הפונקציה הנגזרת כמבטאת את השתנות שיפועי המשיקים. גורם אפשרי נוסף הוא בלבול בין המושגים עלייה וירידה לבין המושגים חיוביות ושליליות, בפרט כאשר הם מבוטאים בגרף.

קושי נוסף נובע מכך שהקשרים שבין פונקציה לבין הנגזרת שלה אינם דו-כיווניים. לדוגמה, אם הנגזרת של פונקציה חיובית אז הפונקציה עולה בתחום זה. אם הפונקציה עולה בתחום מסוים אז הנגזרת אינה בהכרח חיובית, היא יכולה להיות 0 בנקודה מסוימת בתחום. גם הקשר בין נקודות הקיצון של הפונקציה לבין התאפסות הנגזרת נכון רק בכיוון אחד. בנקודות קיצון הנגזרת מתאפסת, אך נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת אינן בהכרח נקודות קיצון. בפונקציות פולינום נקודות כאלה יכולות להיות נקודות קיצון או נקודות פיתול. כדי לקבוע אם בנקודה כזו יש לפונקציה נקודת קיצון או נקודת פיתול, יש לבדוק למשל, אם הנגזרת מחליפה סימן בנקודה זו.

קושי אחר שיש לתלמידים הוא חוסר התייחסות לנגזרת של פונקציה בתחום מסוים כמייצגת את קצב השינוי של הפונקציה בתחום זה. למשל, במקרה של פונקציה קווית שקצב השינוי שלה אחיד, תלמידים רבים אינם קושרים זאת לכך שהנגזרת של פונקציה קווית היא פונקציה קבועה.

התיק ***התנהגות פונקציה והתנהגות הנגזרת*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים המתקשים בשימוש בקשרים שבין התנהגות הפונקציה לבין התנהגות הנגזרת ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***רצף פונקציה-נגזרת***.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

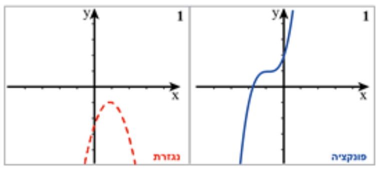
עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***רצף פונקציה-נגזרת*** כל תלמיד/ה מקבל/ת חפיסת כרטיסים. על כל כרטיס משורטט גרף של פונקציה (כחול) וגרף נוסף (אדום) המתאר את הנגזרת של פונקציה **אחרת**. יש ליצור רצף מכל הכרטיסים בעזרת התאמה בין גרף של פונקציה לבין גרף הנגזרת שלה.
המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

אופייה של המשימה מאפשר לתלמידים הערכה ותיקון עצמיים.

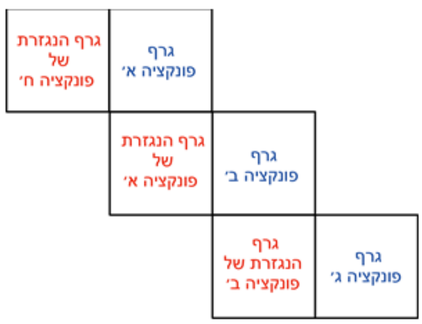
רצף פונקציה-נגזרת

לפניכם שמונה כרטיסים הממוספרים מ-1 עד 8. כל כרטיס מחולק לשני חלקים: בצד ימין משורטט גרף כחול (רצוף) של פונקציה, ובצד שמאל משורטט גרף אדום (מרוסק) המתאר את הנגזרת של פונקציה **אחרת**. יש להתאים לכל גרף של פונקציה את גרף נגזרתה ובכך ליצור רצף של כל הכרטיסים.

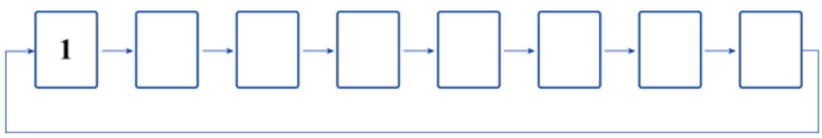


הניחו את כרטיס מספר 1 על השולחן. התבוננו בגרף הפונקציה הכחול (הרצוף) שבכרטיס המונח על השולחן. בחרו מבין הכרטיסים הנותרים את הכרטיס שעליו משורטט גרף אדום (מרוסק) המתאר את הפונקציה הנגזרת המתאימה. הצמידו את הכרטיס שבחרתם לכרטיס הקודם, כך שגרף הנגזרת יהיה מונח מתחת גרף הפונקציה, כמתואר בציור. עכשיו התבוננו בגרף הפונקציה הכחול (הרצוף) שבכרטיס החדש והמשיכו להתאים לכל גרף של פונקציה את הגרף המתאים של הנגזרת עד שיתקבל רצף מכל הכרטיסים. בסיום התהליך אמורה להיות התאמה בין גרף הפונקציה שבכרטיס האחרון לבין גרף הנגזרת שבכרטיס הראשון.

מלאו בתחתית הדף את סדרת מספרי הכרטיסים לפי הרצף שיצרתם.



סדרת מספרי הכרטיסים לפי הרצף שהתקבל:



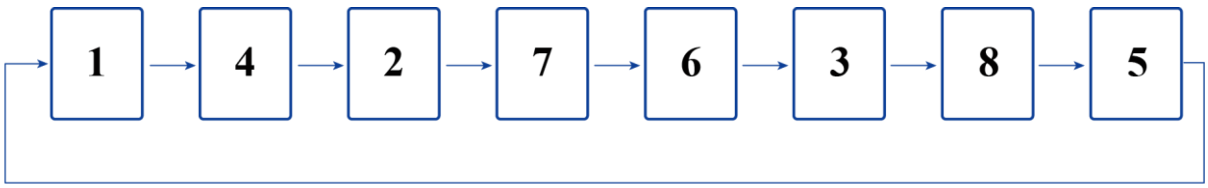
הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	רצף נכון	רצף שגוי	הערות
תלמיד 1	V		
תלמיד 2		V	
סך-הכל			

אין בטבלה התמקדות בכל אחד מהקשרים בנפרד, אלא רק אבחנה בין תלמידים שיצרו רצף נכון לבין תלמידים שהגישו רצף שגוי או שלא הצליחו להשלים רצף מכל הכרטיסים.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:



פעילויות בעקבות ההערכה

פעילות זו מיועדת לתלמידים שלא הצליחו ליצור רצף נכון במשימת ההערכה.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 1 **איזה כרטיס מתאים?**
- דיון וסיכום בעזרת יישומון גיאוגברה ***התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת***.
- עבודה על דף פעילות 2 **מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת**.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף פעילות 1 *איזה כרטיס מתאים?***

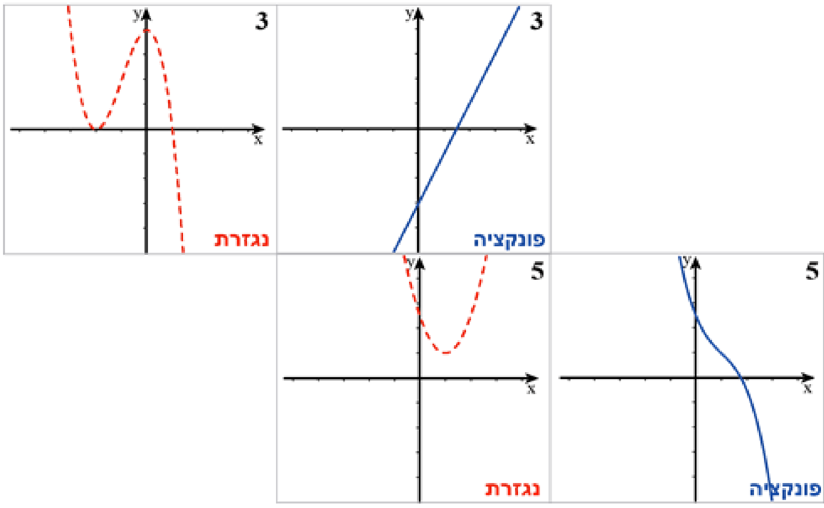
בדף פעילות זה שתי בעיות. בכל בעיה התלמידים נדרשים לקבוע איזו משתי ההצעות שלפניהם היא הנכונה, ולנמק מדוע ההצעה האחרת היא שגויה. שתי הבעיות מזמנות התבוננות מעמיקה בקשרים שבין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת.

בבעיה 1 מתבוננים בגרף של פונקציה מונוטונית עולה. בשתי ההצעות גרף הפונקציה הנגזרת הוא תמיד חיובי, אך מסתבר שעובדה זו אינה מספיקה כדי לקבוע מהי ההצעה המתאימה. גרף הפונקציה מתאר פונקציה קווית, ולכן גרף הנגזרת חייב להיות קבוע.

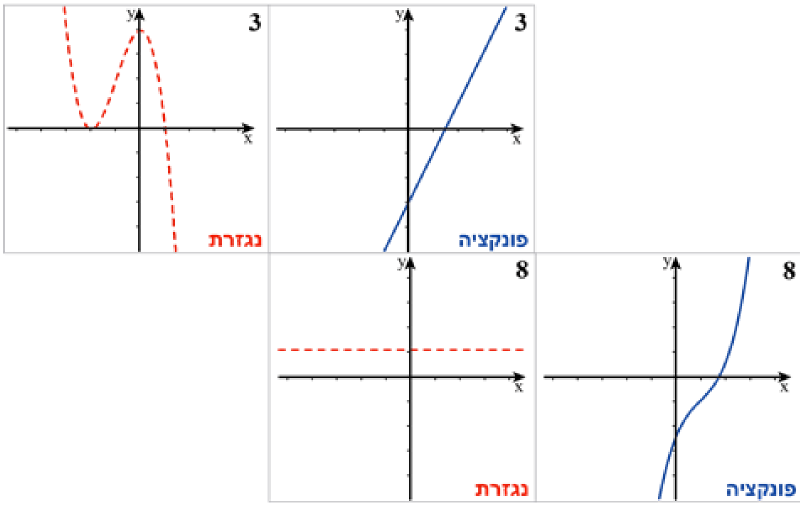
גם בבעיה 2 מתבוננים בגרף של פונקציה מונוטונית עולה, והפעם הפונקציה אינה קווית. בשתי ההצעות גרף הפונקציה הנגזרת הוא תמיד אי-שלילי, אך באחת מההצעות הנגזרת אינה מתאפסת, ובהצעה האחרת היא מתאפסת בנקודה אחת. בעיה זו מזמנת התמודדות עם התפיסה השגויה ש"אם הנגזרת מתאפסת אז בהכרח יש לפונקציה נקודת קיצון". לפונקציה המתוארת בגרף יש נקודת פיתול שבה שיפוע הפונקציה מתאפס, ולכן ההצעה המתאימה היא של הפונקציה הנגזרת שיש לה נקודת התאפסות.

איזה כרטיס מתאים?

1. צור אמר: גרף הפונקציה שבכרטיס 3 הוא תמיד עולה, לכן התאמתי לו את גרף הנגזרת שבכרטיס 5, שהוא תמיד חיובי.



גלעד ענה: אני התאמתי לגרף הפונקציה שבכרטיס 3 את גרף הנגזרת שבכרטיס 8.



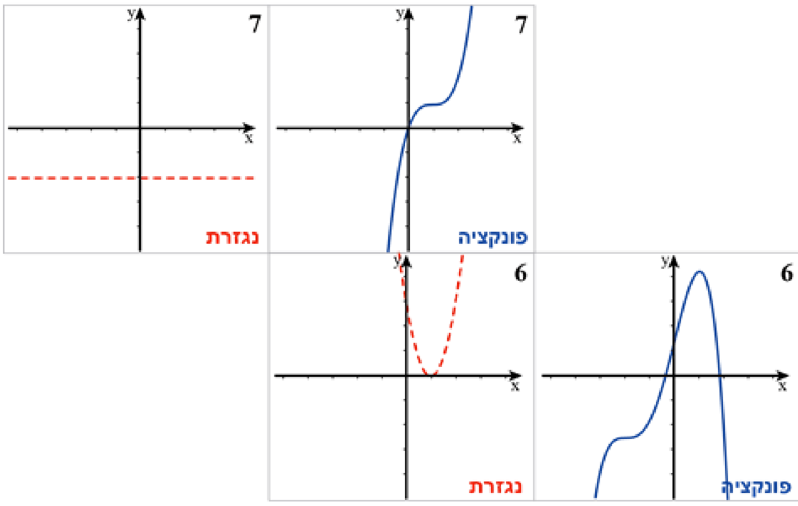
א. מי משניהם צודק? ___________

ב. כיצד, לדעתכם, יכול התלמיד הצודק לשכנע את חברו שהוא טועה?

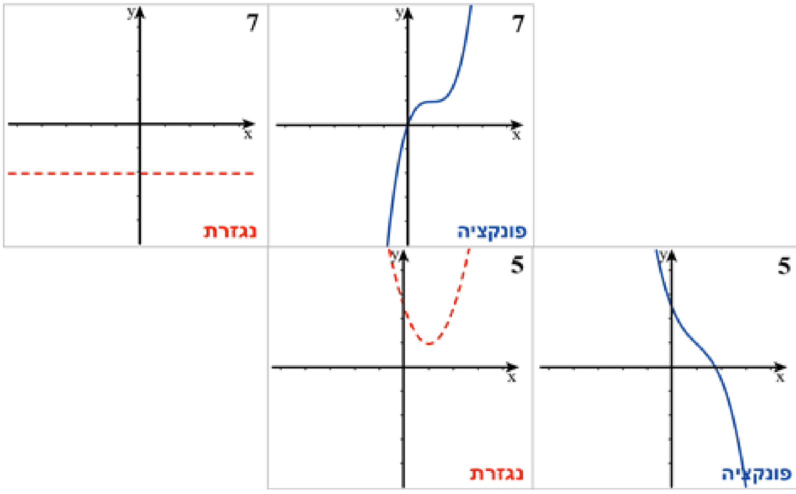
____

____

2. אילת אמרה: לגרף הפונקציה שבכרטיס 7 התאמתי את גרף הנגזרת שבכרטיס 6.



רעות ענתה: לא ייתכן שהנגזרת מתאפסת כי אין פה נקודת קיצון! אני התאמתי לגרף הפונקציה שבכרטיס 7 את גרף הנגזרת שבכרטיס 5.



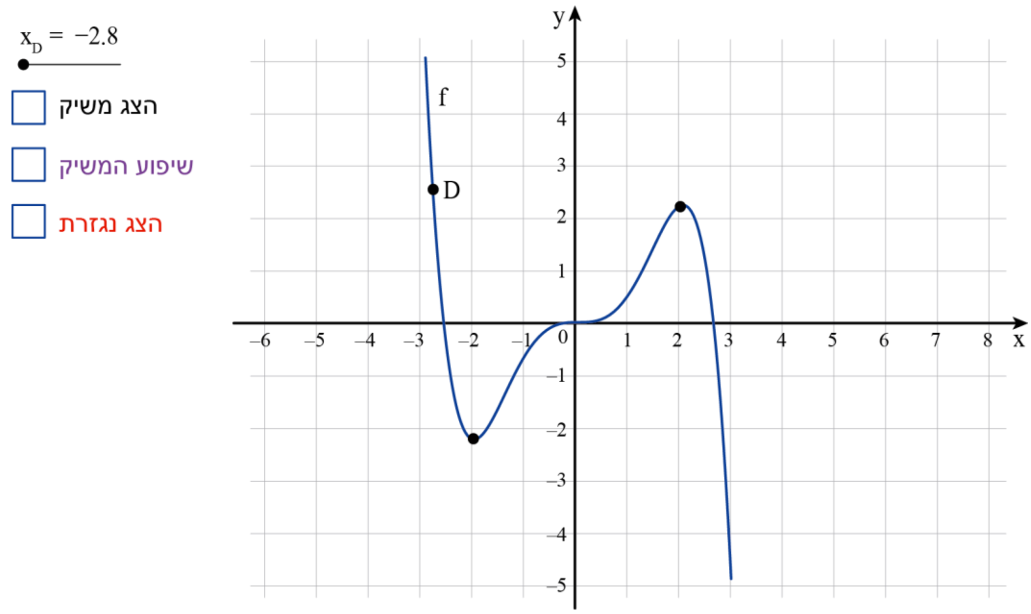
א. מי משתיהן צודקת? ___________

ב. כיצד, לדעתכם, יכולה התלמידה הצודקת לשכנע את חברתה שהיא טועה?

____

____

- **דיון בעזרת יישומון גיאוגברה *התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת***
  - מומלץ לבדוק עם התלמידים את תשובותיהם לדף הפעילות ***איזה כרטיס מתאים?***
  - מפעילים את היישומון ***התנהגות הפונקציה וסימן הנגזרת*** ומקרינים אותו על הלוח. היישומון ממחיש את ההשתנות הדינמית של המשיקים ושל שיפועי המשיקים בנקודות שונות לאורך גרף הפונקציה. בנוסף היישומון מציג גם את גרף הנגזרת וכך מאפשר לבחון את הקשרים בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת. גם אם התלמידים כבר השתמשו ביישומון זה בעבר, כדאי לרענן את זיכרונם ולהדגים כיצד כאשר הפונקציה עולה – שיפוע המשיק חיובי או 0, כאשר היא יורדת – שיפוע המשיק שלילי או 0 ובנקודות קיצון – שיפוע המשיק אפס.
  - ניתן לבחור נציג מהתלמידים שבחרו בהצעה של רעות בבעיה 2, ולבקש ממנו לבדוק בעזרת היישומון אם מלבד שתי נקודות הקיצון, יש נקודה נוספת על גרף הפונקציה, שבה שיפוע המשיק מתאפס? נקודה כזו נמצאת בראשית הצירים.



    – האם זו נקודת קיצון?
    – מה יהיה ערך הנגזרת בנקודה זו (ניתן לבדוק זאת בעזרת הצגת גרף הנגזרת ביישומון.)?
  - חשוב להדגיש שהקשר בין נקודות הקיצון לבין התאפסות הנגזרת אינו דו-כיווני: בנקודת קיצון של פונקציית פולינום ערך הנגזרת מתאפס, אך הנקודה שבה הנגזרת מתאפסת אינה בהכרח נקודת קיצון. קיימות נקודות פיתול שהמשיק בהן הוא ישר אופקי, ולכן ערך הנגזרת בהן הוא אפס. בדוגמה שלפנינו יש נקודת פיתול כזו בראשית הצירים, והמשיק מתלכד עם ציר ה- x . לכן הנגזרת מתאפסת בנקודה זו, למרות שהיא אינה נקודת קיצון.
  - איך ניתן להבחין בין שני המקרים שבהם הנגזרת מתאפסת? כדאי לאפשר לתלמידים שונים לבדוק בעזרת היישומון מה קורה לשיפוע המשיק משני צדיה של נקודת קיצון, ומה קורה לשיפוע משני צדיה של נקודת פיתול כזו, שבה השיפוע מתאפס. מומלץ להדגים זאת גם בעזרת שיפועי המשיקים וגם בעזרת הצגת גרף הנגזרת.

- כדאי להתייחס גם למקרה הלינארי. כאשר הפונקציה היא קווית, המשיקים בכל הנקודות שעל גרף הפונקציה מתלכדים עם גרף הפונקציה הקווית, ולכן שיפועי המשיקים שווים תמיד לשיפוע הפונקציה הקווית. שיפוע זה קבוע, ולכן גרף הנגזרת הוא גרף קבוע.
- אפשר לבקש מהתלמידים לנסח את הקשרים בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת, שהיו יכולים להקל על ביצוע ההתאמות שנדרשו במשימה ***רצף פונקציה-נגזרת***. כדאי לרשום את סיכום הקשרים על הלוח כלהלן:

– אם הפונקציה היא קווית, אז הפונקציה הנגזרת היא פונקציה קבועה; ואם הפונקציה אינה קווית, אז הפונקציה הנגזרת אינה קבועה.

– אם הפונקציה f עולה בתחום מסוים, אז הנגזרת f' היא חיובית או 0 בתחום זה.

– אם הפונקציה f יורדת בתחום מסוים, אז הנגזרת f' היא שלילית או 0 בתחום זה.

– אם לפונקציית פולינום יש נקודת קיצון בנקודה פנימית, אז הנגזרת מתאפסת בנקודה זו. כמו כן אחרי נקודה זו הנגזרת מחליפה סימן.

– אחרי נקודת פיתול הנגזרת אינה מחליפה סימן.

- **עבודה על דף פעילות 2 *מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת***

בדף פעילות זה שתי בעיות.

בבעיה 1 התלמידים נדרשים לתאר כיצד **תכונות** הפונקציה הנגזרת שנדונו במליאת הכיתה באות לידי ביטוי **בייצוג הגרפי** של הפונקציה הנגזרת.

בבעיה 2 התלמידים צריכים ליישם את העקרונות שתוארו. בכל סעיף יש לשרטט שני גרפים:

- גרף של פונקציה המקיים תנאי או תנאים נתונים.
- גרף הנגזרת של הפונקציה הקודמת.

התלמידים יכולים לבחור את גרף הפונקציה ולהיעזר בכרטיסי המשימה ***רצף פונקציה-נגזרת*** או לשרטט גרף אחר לפי בחירתם. בשרטוט גרף זה הם צריכים לשים לב להתאמה בין הגרף שהם בוחרים לשרטט לבין התנאים הנתונים. לאחר שרטוט גרף הפונקציה, על התלמידים לשרטט את גרף הנגזרת ולהקפיד על קיום הקשרים שבהם עוסק תיק זה.

מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת

1. בכל אחד מההיגדים הבאים השלימו בעזרת מילים מ"מחסן המילים".

א. אם הפונקציה עולה בתחום מסוים, אז גרף הפונקציה הנגזרת ______________ ציר ה- x בתחום זה.

ב. אם לפונקציית פולינום יש נקודת קיצון בנקודה פנימית, אז גרף הפונקציה הנגזרת ______________ ציר ה- x בנקודה זו.

ג. אם פונקציה היא קווית, אז גרף הפונקציה הנגזרת ______________ ציר ה- x.

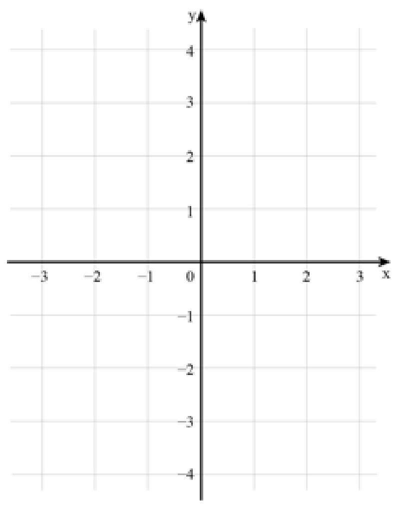
ד. אם לפונקציית פולינום יש נקודת פיתול שהשיפוע בה אפס, אז גרף הפונקציה הנגזרת ______________ ציר ה- x בנקודה זו.

מחסן מילים:
חותך את, מקביל ל- , מעל ל- , מתחת ל- , משיק ל- .

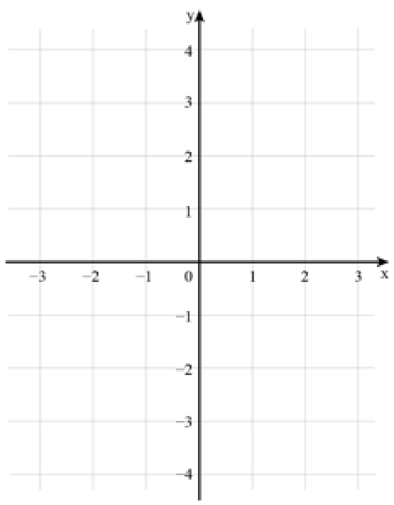
2. חפשו בין כרטיסי המשחק או חשבו בעצמכם על דוגמאות לפונקציות המקיימות את התנאים הנתונים בהמשך.
בכל סעיף שרטטו במערכת הצירים העליונה את גרף הפונקציה שבחרתם, ובמערכת הצירים שמתחתיה שרטטו סקיצה של גרף הנגזרת המתאימה.

א. פונקציה קווית.

גרף הפונקציה



גרף הנגזרת



ב. לפונקציה יש נקודת פיתול שבה שיפוע הפונקציה הוא אפס.

ג. לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות קיצון.