



תיק משימטיקה

בעיות קיצון - תחום

ונקודות קצה

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימת ההערכה
5	שטח מקסימלי
6	הערכת תוצרי התלמידים
7	פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה
7	פעילות 1
8	דף פעילות 1 מתחשבים בתחום
10	פעילות 2
11	דף פעילות 2 נקודות קצה

בעיות קיצון – תחום ונקודות קצה



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתייחס לתחום ההגדרה של פונקציית המטרה בעת פתרון בעיות קיצון. התיק עוסק בבעיות קיצון, שבהן תוכן הבעיה מגביל את תחום פונקציית המטרה.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להתחשב בתחום ההגדרה של פונקציית המטרה בעת פתרון בעיית קיצון.
- להתייחס אל נקודות קצה של גרף (של פונקציה רציפה שתחומה סגור) כאל נקודות קיצון, גם כאשר הנגזרת אינה מתאפסת בהן.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 45 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימה **שטח מקסימלי**.

לצורך הפעילויות בעקבות ההערכה:

לפעילות 1

- דף פעילות 1 **מתחשבים בתחום** (לכל תלמיד/ה).
- יישומון גאוגברה [השתנות האורך](#).

לפעילות 2

- דף פעילות 2 **נקודות קצה** (לכל תלמיד/ה).
- יישומון גאוגברה [השתנות השטח](#) (לכל תלמיד/ה).



רקע

האפשרות למצוא את התוצאה הטובה ביותר מתוך מגוון תוצאות אפשריות לבעיה נתונה, מראה את כוחה ועוצמתה של המתמטיקה. החשבון הדיפרנציאלי הוא אחד הכלים המרכזיים בהשגת מטרה זו. הדבר בא לידי ביטוי ברור בנושא של פתרון בעיות ערך קיצון. בעיות כאלה שיש להן קשר ברור למציאות, מעמיקות את הבנת הנושא כולו.

תלמידים רבים מתקשים בהתמודדות עם בעיות ערך קיצון. בנוסף לקשיים הקיימים במציאת נקודות קיצון של פונקציה נתונה, בפתרון בעיות קיצון עלולים להתעורר קשיים נוספים. למשל, האילוצים הנובעים מתוכן הבעיה עשויים לגרום לכך שתחום ההגדרה של פונקציית המטרה אשר בתחילת לימוד הנושא היא פונקציה רציפה, יהיה תחום סגור, ואז ערך הקיצון המוחלט עשוי להימצא בנקודת קצה. ישנם תלמידים שנוטים להתעלם מתחום ההגדרה של פונקציית המטרה ואינם מתייחסים לתוכן הבעיה כאל גורם העשוי להגביל את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה, ובכך להשפיע על מציאת נקודות הקיצון המתאימות לבעיה. כמו כן ישנם תלמידים שאינם מתייחסים אל נקודת קצה של גרף פונקציה המוגדרת בתחום סגור כאל נקודת קיצון, כאשר הנגזרת אינה מתאפסת בה.

התיק **בעיות קיצון – תחום ונקודות קצה** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שהקשיים שלהם בפתרון של בעיות ערך קיצון נובעים ממפגש עם תחום סגור, ולתת מענה לקשיים אלו.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה **שטח מקסימלי**.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.



עבודה על משימת ההערכה

במשימה **שטח מקסימלי** מוצגת בעיית ערך קיצון. האילוצים הנובעים מתוכן הבעיה קובעים את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה שהוא תחום סגור. הערך המקסימלי של פונקציית המטרה f מתקבל בנקודת הקצה של התחום, בנקודה שבה הנגזרת שונה מאפס. כאשר פותרים את המשוואה $f'(x) = 0$ בלי לבדוק אם הפתרונות נמצאים בתחום, מתקבלת נקודת מקסימום (מקומי) מחוץ לתחום.

התלמידים מקבלים שלבים ראשונים של הפתרון הכוללים את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה וחישובים לקראת בניית חוק ההתאמה. קיום השלבים מאפשר התמקדות במציאת המקסימום המוחלט. כך ניתן לבדוק אם התלמידים מתחשבים בתחום בכתיבת התשובה, ואם הם מתייחסים לנקודות הקצה כאל נקודות קיצון. המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

שטח מקסימלי

נתונות הפונקציות:

$$g(x) = 6x(4 - x), \quad f(x) = -4x(x - 3)$$

- בוחרים נקודה C על ציר ה-x, בין שתי נקודות החיתוך של הפונקציה f עם ציר ה-x (כולל הקצוות).
- מעלים מן הנקודה C אנך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה f בנקודה A, ואת גרף הפונקציה g בנקודה B.
- מחברים את A ואת B עם ראשית הצירים O, ומתקבל משולש ABO (ראו שרטוט).

א. שרטוט באותה מערכת צירים משולש נוסף לפי שלבי השרטוט של משולש ABO.

ב. המורה שאלה: מה צריך להיות האורך של OC, כדי ששטח המשולש המתקבל בדרך זו יהיה מקסימלי?

לפניכם התחלת הפתרון של רננה.

קראו אותו והשלימו את הפתרון.

- נקודות החיתוך של f עם ציר ה-x הן $x = 0$ ו- $x = 3$ לכן הנקודה C נמצאת ביניהן (כולל הקצוות).

נסמן $OC = x$, $0 \leq x \leq 3$.

- במשולש ABO, OC הוא גובה חיצוני לצלע AB, לכן שטח המשולש ABO הוא $\frac{AB \cdot x}{2}$.

- נחשב את אורך הקטע AB. בתחום בין 0 ל-3, הנקודה B נמצאת מעל A לכן:

$$AB = g(x) - f(x) = 24x - 6x^2 - (-4x^2 + 12x) = -2x^2 + 12x = 2(-x^2 + 6x)$$

- נבנה פונקציה S עבור שטח המשולש ABO (שצריך להיות מקסימלי).

$$0 \leq x \leq 3$$
$$S(x) =$$

ג. מבין שטחי כל המשולשים המקסימיים את נתוני הבעיה, הוסיפו לשרטוט את המשולש ששטחו מקסימלי.

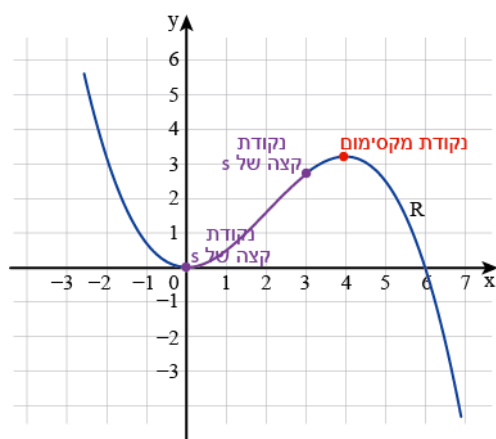


הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם, ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובה נכונה	לא התחשבו בתחום	לא בדקו נקודות קצה	אחר	הערות
תלמיד 1	✓				
תלמיד 2		✓	✓		
תלמיד 3			✓		
סך-הכל					

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:



להלן שרטוט גרף הפונקציה $R(x) = -x^3 + 6x^2$ שאינה תלויה תוכן, ולכן מוגדרת לכל x .

התחום של פונקציית המטרה S הוא $0 \leq x \leq 3$ לפי הנתון בבעיה. בתחום זה גרף פונקציית המטרה מתלכד עם גרף הפונקציה R , כי כלל ההתאמה של שתי הפונקציות זהה.

לפונקציה R יש שתי נקודות קיצון המתקבלות כאשר $x = 0$ (מינימום) וכאשר $x = 4$ (מקסימום).

$$0 \leq x \leq 3 \quad S(x) = -x^3 + 6x^2$$

$$0 \leq x \leq 3 \quad S'(x) = -3x^2 + 12x = 0$$

$$S'(x) = -3x^2 + 12x = 0$$

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{וגם} \quad x = 0, 4$$

$$S(0) = 0 \quad S(3) = 27 \quad x = 4 \text{ נמצא מחוץ לתחום. נשאר לבדוק את } x = 0 \text{ ואת נקודות הקצה}$$

המקסימום המוחלט מתקבל עבור $x = 3$.



פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שלא התחשבו בתחום של פונקציית המטרה (מסומנים בטבלת ההערכה בטורים המודגשים).	V	V
לתלמידים שהתייחסו לתחום אך לא התייחסו אל נקודות הקצה כאל נקודות קיצון (מסומנים בטבלת ההערכה בטור המודגש המתאים).		V

פעילות 1

שלבי הפעילות

- שיגור דף פעילות 1 מלווה ביישומון [השתנות האורך](#).
- עבודה על דף פעילות 1 **מתחשבים בתחום**.
- דיון מלווה ביישומון [השתנות האורך](#)
 - על כתיבת התחום,
 - על התחשבות בתחום,
 - פתרון באמצעות יישומון.

מהלך הפעילות

בפעילות זו נעזרים ביישומון [השתנות האורך](#). היישומון מאפשר הדגמה דינמית המציגה את אורכי הקטעים AB ו- A_1B_1 כתלויים ב- x , בכל בעיה בתחום המתאים לה.

• שיגור דף פעילות 1

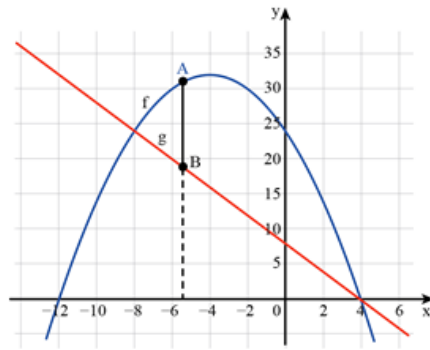
- מקרינים את היישומון [השתנות האורך](#), מציגים ביישומון את "בעיה א" בלבד וקוראים את הבעיה מן הדף.
- מדגימים את השתנות אורך הקטע AB , בין שתי נקודות החיתוך של הפרבולה והישר, על-ידי גרירת הנקודה A .
- מבקשים מן התלמידים לשער מהו x שעבורו אורך הקטע AB מקסימלי, ולרשום לעצמם את ההשערה לצורך השוואה עם הפתרון המתמטי שהם נדרשים למצוא בדף הפעילות.

• עבודה על דף פעילות 1 מתחשבים בתחום

בדף זה התלמידים נדרשים לפתור שתי בעיות קיצון שנראות דומות. לפונקציות המטרה של שתי הבעיות יש אותו חוק התאמה אבל תחום שונה. בבעיה הראשונה נקודת המקסימום המוחלטת היא נקודה פנימית, ובאחרת – היא נקודת קצה שבה נגזרת הפונקציה אינה מתאפסת.

מתחשבים בתחום

בעיה א



במערכת הצירים שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = -2x + 8 \quad \text{ו-} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 24$$

נקודות החיתוך של שני הגרפים הן $(-8, 24)$ ו- $(4, 0)$.

בוחרים נקודה A על הפרבולה בין שתי נקודות החיתוך של הפרבולה עם הישר (כולל נקודות החיתוך).

מנקודה A מורידים אנך לציר ה- x החותך את גרף הישר בנקודה B.

בין נקודות החיתוך של הגרפים הפונקציה f נמצאת מעל הפונקציה g , לכן $AB = y_A - y_B$.

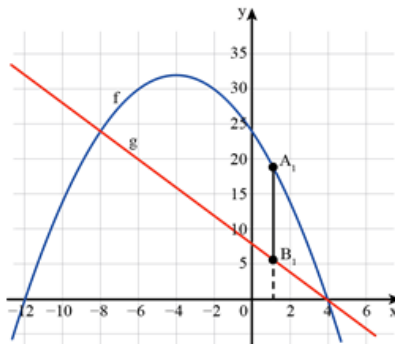
א. סמנו ב- $d(x)$ את פונקציית אורך הקטע AB.

- **שערו** מהו שיעור ה- x של הנקודה A שעבורו אורך הקטע AB מקסימלי.

- **מצאו** מהו שיעור ה- x של הנקודה A שעבורו אורך הקטע AB מקסימלי.

ב. שרטטו במערכת הצירים את הקטע שאורכו מקסימלי.

בעיה ב



במערכת הצירים שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = -2x + 8 \quad \text{ו-} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 24$$

בוחרים נקודה A_1 על הפרבולה ברביע הראשון (כולל הצירים).

מנקודה A_1 מורידים אנך לציר ה- x החותך את גרף הישר בנקודה B_1 .

ברביע הראשון הפונקציה f נמצאת מעל הפונקציה g ,

לכן $A_1B_1 = y_{A_1} - y_{B_1}$.

א. סמנו ב- $d_1(x)$ את פונקציית אורך הקטע A_1B_1 ומצאו את שיעור ה- x של הנקודה A_1 שעבורו אורך הקטע A_1B_1 מקסימלי.

ב. שרטטו במערכת הצירים את הקטע שאורכו מקסימלי.

• דיון

- מבררים את ההבדל בין שתי הבעיות.
- ממחישים בעזרת היישומון [השתנות האורך](#) שנתוני הבעיה מגבילים את תחום ההגדרה של פונקציית המטרה.
- בודקים את ההתאמה בין הבעיה הנתונה לבין "פתרונות" שהתקבלו בלי להתייחס לתחום ההגדרה של פונקציית המטרה.
- מגבשים עם התלמידים דרך כתיבה שמתייחסת לתחום ההגדרה של פונקציית המטרה לאורך כל מהלך הפתרון, ומדגישים שלא מספיק לרשום את התחום אלא יש גם להתייחס אליו בפתרון.

שלבי הפעילות

- עבודה על דף פעילות 2 **נקודות קצה** מלווה ביישומון **השתנות השטח**.
- דיון וסיכום.

מהלך הפעילות

בפעילות זו נעזרים ביישומון **השתנות השטח**. היישומון מאפשר:

- הדגמה דינמית המציגה את שטח המשולש כתלוי ב- x . השתנות המשולש ושטחו מוגבלת לתחום $0 \leq x \leq 3$ בהתאם לתוכן הבעיה. ניתן גם לעקוב אחרי מספר יחידות השטח המשתנה עם השתנות המשולש.
- הדגמה המציגה בנוסף לשתי הפונקציות ולמשולש גם את פונקציית המטרה – פונקציית השטח, שגם היא מוגבלת בתחום הנ"ל. ניתן גם לעקוב אחרי מספר יחידות השטח, תוך כדי התבוננות בגרף פונקציית השטח.

- עבודה על דף פעילות 2 **נקודות קצה** מלווה ביישומון **השתנות השטח**

בעיות 1-4 בדף מכוונות את התלמידים להתייחס למשימת ההערכה. באמצעות היישומון הם בודקים את ערכי השטחים של משולשים שונים ומשווים את גודלם. התלמידים נדרשים גם לענות על בעיות קיצון דומות בתחומים שונים ובאופן כזה להיווכח כי לפעמים המקסימום המוחלט מתקבל בנקודת קצה (ימנית או שמאלית) ולפעמים בנקודה פנימית בתחום.

המטרה של בעיה 4 להעלות שגיאות אופייניות בבעיות קיצון – אי התייחסות לתחום הפונקציה והתייחסות אל גרף של פונקציה (f) המופיע כחלק מן הבעיה כאילו היה גרף של פונקציית המטרה (S).

בבעיה 5 מוצגת דוגמה של בעיית קיצון שבה שתי נקודות קיצון מוחלטות ששתייהן נקודות קצה. ניתן לדחות את העיסוק בבעיה 5 למועד אחר.

נקודות קצה

פתחו את היישומון [השתנות השטח](#) והציגו את "הבעיה".

במערכת הצירים שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -4x(x-3), \quad g(x) = 6x(4-x) - 1, \quad \text{שתיהן מוגדרות לכל } x.$$

בוחרים נקודה C על ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq 3$. מהנקודה C מעלים אנך לציר ה- x החותך את גרף הפונקציה f בנקודה A, ואת גרף הפונקציה g בנקודה B. משרטטים את המשולש ABO שקודקודו O בראשית הצירים. $OC = x$.

1. גררו את הנקודה C וענו על השאלות הבאות (בלי להציג את "שטח המשולש" או את "גרף פונקציית השטח S").

א. באיזה מקרה מתקבל, לדעתכם, שטח גדול יותר: כאשר $x = 0.5$ או כאשר $x = 2$? _____

ב. מצאו ערך של x כך ששטח המשולש המתקבל גדול יותר משני השטחים שבסעיף א. _____

ג. מצאו ערך של x כך ששטח המשולש מתאפס. _____

ד. הציגו ביישומון את "שטח המשולש".

מצאו ערך של x כך ששטח המשולש המתקבל הוא מקסימלי. _____

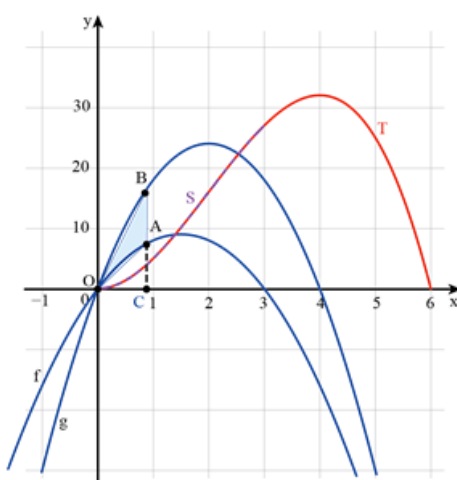
מהו השטח המקסימלי המתקבל? _____

הפונקציה S מתאימה ל- x (הקטע OC) את שטח המשולש המתאים בתחום $0 \leq x \leq 3$.

2. הציגו ביישומון את "גרף פונקציית השטח S" בלבד. גררו את הנקודה על הגרף והתבוננו בערכי הפונקציה S.

בדקו את תשובותיכם לבעיה 1 באמצעות גרף הפונקציה S.

3. הפונקציה $S(x) = -x^3 + 6x^2$ מתאימה ל- x את שטח המשולש המתאים בתחום $0 \leq x \leq 3$.



הפונקציה $T(x) = -x^3 + 6x^2$ מתאימה ל- x את שטח

המשולש בתחום $0 \leq x \leq 6$.

לפונקציות S ו-T יש תחום הגדרה שונה אבל אותו כלל התאמה, לכן הגרפים של שתי הפונקציות מתלכדים בתחום המשותף להן.

התבוננו בגרף הפונקציה T וענו על השאלות.

מה צריך להיות שיעור x של הנקודה C כדי ששטח המשולש ABO יהיה מקסימלי בתחומים הבאים:

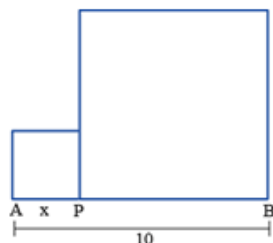
א. $0 \leq x \leq 5$ _____

ב. $0 \leq x \leq 2$ _____

ג. $5 \leq x \leq 6$ _____

4. איתן רשם כתשובה לבעיה המקורית: המשולש בעל השטח המקסימלי מתקבל כאשר $x = 4$.

שירלי רשמה כתשובה לבעיה המקורית: המשולש בעל השטח המקסימלי מתקבל כאשר $x = 1.5$.
גם איתן וגם שירלי טעו. נסו לחשוב על סיבות אפשריות לטעויות שלהם.



5. על קטע AB באורך 10 ס"מ מסמנים נקודה P.

בונים ריבועים על חלקי הקטע שנוצרו (ראו ציור).

x מייצג את אורך הקטע AP. $0 \leq x \leq 10$.

מה צריך להיות ערכו של x כדי שסכום שטחי הריבועים יהיה מקסימלי?

שי פתר את הבעיה.

הוא מצא את פונקציית המטרה: $S(x) = x^2 + (10-x)^2$, $0 \leq x \leq 10$.

הוא פישט את הביטוי האלגברי, גזר את הפונקציה שהתקבלה ומצא נקודה חשודה עבור $x = 5$.

שי חישב ומצא כי הנקודה החשודה היא נקודת מינימום.

שי חיפש נקודת מקסימום ומצא נקודת מינימום, לכן הסיק שיש טעות בבעיה או שיש טעות בחישוביו.

א. המשיכו את שלבי הפתרון.

ב. האם שי צודק? הסבירו.

• דיון וסיכום

מומלץ לקיים את הדיון אחרי שהתלמידים סיימו לפתור לפחות את בעיה 3 בדף פעילות 2 **נקודות קצה**. בדיון כדאי להתייחס לבעיה 3. מבררים עם התלמידים מדוע התקבל המקסימום בכל פעם בנקודה מסוג אחר. ניתן לסכם בעיה זו באמצעות השאלה: היכן מתקבל המקסימום המוחלט (בתחום סגור), למשל, במקרים הבאים:

- הפונקציה עולה בכל התחום
- הפונקציה יורדת בכל התחום
- הפונקציה עולה ואחר כך יורדת בתחום
- הפונקציה יורדת ואחר כך עולה בתחום.

בבעיה 5 הפתרון נמצא בקצוות של התחום, וכמו במקרים רבים אחרים נקודות אלו מייצגות מצבים מנוונים (במקרה שלנו ריבוע שמיוצג על-ידי נקודה). בדיון על הבעיה מגיעים למסקנה שההחלטה אם לכלול נקודות כאלו בתחום היא שרירותית.

נקודות לסיכום הפעילות

- בבעיית קיצון התחום מוגבל פעמים רבות לא בגלל הגבלה מתמטית, אלא בעקבות אילוצי הבעיה.
- רישום פונקציית המטרה כולל רישום תחום ההגדרה שלה על פי האילוצים הנובעים מתנאי הבעיה.
- כדי לקבוע אם פתרונות שהתקבלו במהלך חישובים עשויים להיות פתרון לבעיית קיצון נתונה, יש לבדוק אם הם שייכים לתחום ההגדרה של פונקציית המטרה.
- הפתרון לבעיית קיצון נמצא בנקודת מינימום **מוחלט** או בנקודת מקסימום **מוחלט**.
- נקודות קצה של תחום סגור הן תמיד נקודות קיצון. לפעמים קיצון מקומי ולפעמים קיצון מוחלט.
- כאשר תחום ההגדרה של פונקציית המטרה הוא קטע סגור, די למצוא את ערך הפונקציה בנקודות הקצה ובכל אחת מהנקודות החשודות כנקודות קיצון, ולקבוע על-ידי השוואת הערכים האלה היכן מתקבלים ערכי הקיצון המוחלט.

הצעה לפתרון דפי הפעילות

פתרון לדף פעילות 1 מתחשבים בתחום

בעיה א

תחום ההגדרה של פונקציית המטרה הוא $-8 \leq x \leq 4$

בניית פונקציית אורך הקטע:

$$AB = y_A - y_B = \left(-\frac{1}{2}x^2 - 4x + 24\right) - (-2x + 8)$$

$$-8 \leq x \leq 4 \quad d(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 16$$

חיפוש נקודות קיצון:

$$-8 \leq x \leq 4 \quad d'(x) = -x - 2 = 0$$

$$-8 \leq x \leq 4 \quad \text{וגם} \quad x = -2$$

הגרף של $d(x)$ הוא פרבולה שיש לה נקודת מקסימום מוחלט. לכן התשובה היא $x = -2$.

הערה: ניתן לבדוק מקסימום מוחלט בדרכים נוספות.

בעיה ב

לפונקציית המטרה יש חוק התאמה השווה לזה של בעיה א. אבל התחום שונה: $0 \leq x \leq 4$

מתקבל הפתרון:

$$x = -2 \quad \text{וגם} \quad 0 \leq x \leq 4$$

$x = -2$ אינו בתחום, לכן נשאר לבדוק את נקודות הקצה. $d(0) = 16$ ו- $d(4) = 0$

לכן התשובה היא $x = 0$.

פתרון לדף פעילות 2 נקודות קצה

1. א. כאשר $x = 2$.

ב. למשל $x = 2.5$.

ג. $x = 0$.

ד. $x = 3$. השטח המקסימלי הוא 27.

3. א. $0 \leq x \leq 5$ ב. $0 \leq x \leq 2$ ג. $5 \leq x \leq 6$

$$x = 5$$

$$x = 2$$

$$x = 4$$

4. איתן כנראה לא התחשב בתחום.

שירלי כנראה החליפה בין פונקציית המטרה לפונקציה f שהמקסימום שלה מתקבל כאשר $x = 1.5$.

$$0 \leq x \leq 10, S(x) = x^2 + (10 - x)^2 \quad 5.$$

$$0 \leq x \leq 10, S(x) = x^2 + 100 - 20x + x^2 \quad \text{א.}$$

$$0 \leq x \leq 10, S(x) = 2x^2 - 20x + 100$$

$$S'(x) = 4x - 20 = 0$$

$$x = 5 \text{ נמצא בתחום } 0 \leq x \leq 10$$

x	4	5	6
$S(x)$			

בנקודה שבה $x = 5$ אכן יש נקודת מינימום.

הערה: מכיוון שפונקציית המטרה היא פונקציה ריבועית, אפשר כמובן לפתור ללא חישוב הנגזרת שלה.

ב. המסקנה של שי אינה נכונה. אמנם הנקודה החשודה היא נקודת מינימום, אבל שתי נקודות הקצה של התחום $(0, 100)$ ו- $(10, 100)$ הן נקודות מקסימום מוחלט (למרות שהנגזרת אינה מתאפסת בהן).