



תיק משימטיקה

הנחות המבוססות

על שרטוט – מעגל

להגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

3.....	מטרות התיק
3.....	זמני עבודה משוערים
3.....	החומרים והעזרים הדרושים
4.....	רקע
4.....	הצעה למהלך העבודה
5.....	עבודה על משימות ההערכה
5.....	משימה 1 האם משולשים חופפים?
6.....	משימה 2 זוויות שוות
7.....	הערכת תוצרי התלמידים
8.....	פעילות בעקבות ההערכה
9.....	חשיבה על פתרונות של תלמידים
10.....	דף פעילות 1 מעגל והנחות שגויות
12.....	דף פעילות 2 משולשים ישרי-זווית

הנחות המבוססות על שרטוט – מעגל



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להסתמך במהלך הוכחה של בעיה בגיאומטריה רק על נתונים ועל משפטים ידועים, ולא להסיק תכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד. התיק עוסק במעגל החסום במשולש. ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים להסיק מסקנות על סמך נתונים ומשפטים, ללא שימוש בתכונות המבוססות על מראה השרטוט בלבד.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימות ההערכה: כ- 20 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 30 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דפי המשימות
 - משימה 1 **האם המשולשים חופפים?**
 - משימה 2 **זוויות שוות.**

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה:

- פתרונות של "תלמידים" (להקרנה על הלוח) לדיון בעקבות המשימה **האם המשולשים חופפים?**
- דף פעילות 1 מלווה ביישומון **מעגל והנחות שגויות** (לכל תלמיד/ה).
- דף פעילות 2 **משולשים ישרי-זווית** (לכל תלמיד/ה).



רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. לעיתים במהלך ההוכחה תלמידים נוטים להניח הנחות המבוססות על מראה השרטוט. למשל, מניחים שנקודה בשרטוט המלווה בעיה הכוללת מעגל חסום במצולע, היא מרכז המעגל או נקודת השקה רק משום שכך היא נראית בשרטוט. לפעמים הנחות אלה נכונות, וניתן להצדיק אותן על ידי שיקולים גיאומטריים; לפעמים הנחות אלה נכונות רק במקרים פרטיים, אך לא במקרה הכללי; ובמקרים אחרים הנחות אלה אינן נכונות כלל ויוצרות סתירה בין ובין נתוני הבעיה.

ייחוס תכונות המבוססות על מראה השרטוט ללא שיקולים גיאומטריים מתאימים, קשור, לעיתים קרובות לכך שתלמידים מתייחסים לשרטוט כאל אובייקט המתאר מקרה כללי, בעוד ששרטוט יחיד מייצג מקרה פרטי בלבד. שימוש בתוכנת גיאומטריה דינמית מאפשר יצירה של שרטוטים שונים המתאימים לאותם הנתונים ובכך ממחיש את הזהירות שיש לנקוט בהסקת תכונות משרטוט ואת הצורך להשתמש בשיקולים גיאומטריים במקום במראה השרטוט בלבד.

נושא המעגל הוא נושא מרכזי בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק **הנחות המבוססות על שרטוט – מעגל** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים להניח הנחות המתבססות על מראה השרטוט, ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות ההערכה:
 - משימה 1 **האם המשולשים חופפים?**
 - משימה 2 **זוויות שוות.**
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.

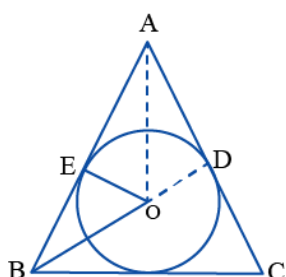


עבודה על משימות ההערכה

בתיק זה שתי משימות הערכה:

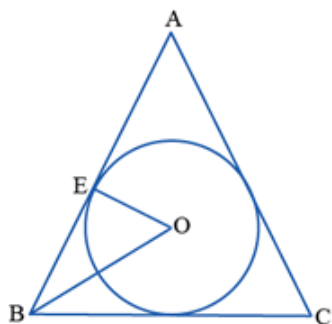
- משימה 1 **האם המשולשים חופפים?**
- משימה 2 **זוויות שוות.**

שתי המשימות מיועדות לעבודה עצמית של התלמידים, ומומלץ לבצע אותן ברצף זו אחר זו.



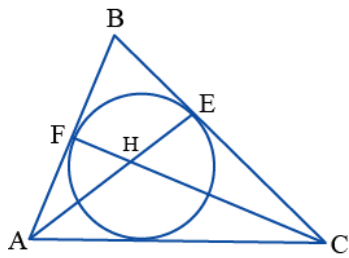
במשימה 1 **האם המשולשים חופפים?** יש להשלים את השרטוט על ידי הארכת הקטע BO ולקבוע אם המשולשים AOE ו-AOD חופפים (ראו שרטוט). על פי נימוקי התלמידים ניתן לזהות אם הם מניחים שהמשך הקטע ששרטטו עובר דרך נקודת ההשקה. ההנחה שהנקודה D היא נקודת ההשקה היא שגיאה נפוצה והיא מובילה למסקנה המוטעית שהמשולשים חופפים.

האם המשולשים חופפים?



במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) חסום מעגל שמרכזו O. הנקודה E היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע AB. המשך הקטע BO חותך את הצלע AC בנקודה D.

סמנו את הנקודה D בשרטוט וקבעו: האם $\triangle AOE \cong \triangle AOD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, נמקו מדוע.

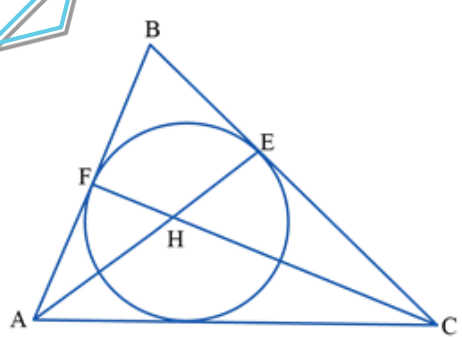


במשימה 2 **זוויות שוות** יש לקבוע כמה זוגות של זוויות שוות יש בשרטוט.
 על פי תשובות התלמידים ניתן לזהות אם הם מניחים הנחות בלתי מוצדקות
 הקשורות לשרטוט.

שגיאה נפוצה היא הקביעה כי $\angle AEC = \angle AFC = 90^\circ$ או כי הקטעים FC ו-AE הם חוצי זוויות (ראו שרטוט).

שתי הטענות הנ"ל נכונות אם, ורק אם, הנקודה H היא מרכז המעגל.

זוויות שוות



נתון מעגל החסום במשולש ABC.

הצלע AB משיקה למעגל בנקודה F.

הצלע BC משיקה למעגל בנקודה E.

כמה זוגות של זוויות שוות יש בשרטוט?

כתבו את הזוויות לכל זוג שמצאתם, ונמקו מדוע הן שוות.

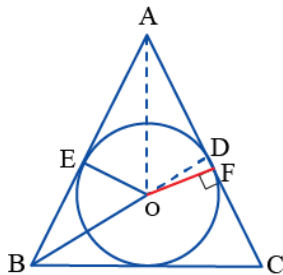


הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

משימה 2 זוויות שוות			משימה 1 האם המשולשים חופפים?			שם התלמיד/ה
אחר	הנחה שגויה לקשורה לשרטוט	תשובה נכונה	אחר	הנחה שגויה לקשורה לשרטוט	תשובה נכונה	
		V		V		תלמיד 1
	V				V	תלמיד 2
						סך-הכל

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:



פתרון משימה 1 האם המשולשים חופפים?

לא ניתן לקבוע כי המשולשים AOE ו-AOD חופפים.

הנקודה D אינה בהכרח נקודת ההשקה.

המשולשים יהיו חופפים רק במקרה שהמשולש ABC הוא שווה-צלעות,

ואז כל חוצה זווית במשולש הוא גם גובה (במקרה זה הנקודה D היא בהכרח נקודת ההשקה).

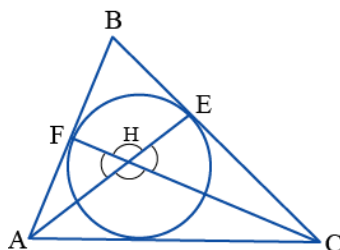
פתרון משימה 2 זוויות שוות

בשרטוט ישנם שני זוגות של זוויות שוות,

ואלו רק הזוויות הקודקודיות הנוצרות סביב הנקודה H:

$$\angle FHA = \angle EHC, \quad \angle FHE = \angle AHC$$

לא ניתן להוכיח על פי הנתונים כי קיימים זוגות נוספים של זוויות שוות.





פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שהניחו הנחות שגויות על סמך השרטוט (מסומנים בעמודות המודגשות בטבלת ההערכה).

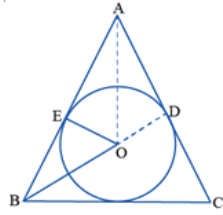
שלבי הפעילות

- דיון בעקבות המשימה **האם המשולשים חופפים?** – חשיבה על פתרונות של תלמידים.
- עבודה על דף פעילות 1 **מעגל והנחות שגויות** (עבודה עם יישומון גיאוגברה).
- דיון.
- עבודה על דף פעילות 2 **משולשים ישרי-זווית**.
- דיון מסכם.

מהלך הפעילות

- **דיון בעקבות המשימה האם המשולשים חופפים? - חשיבה על פתרונות של תלמידים**
מקרינים על הלוח את הפתרונות של ניצן ופרח למשימה 1 ועורכים הצבעה בנוגע לנכונות הפתרונות. כדאי להשאיר את השאלה פתוחה עד לעבודה עם היישומון בשלב הבא.

ניצן ופרח ענו על המשימה האם המשולשים חופפים?



פרח אומר:

המשולשים חופפים לפי צ.צ.ז:
 $EO = OD$ רדיוסים במעגל,
 $\angle AEO = \angle ADO = 90^\circ$
 כי רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה,
 ו- $AE = AD$ כי הם שני משיקים
 למעגל היוצאים מנקודה אחת.



ניצן אומר:

המשולשים חופפים לפי צ.צ.צ:
 AO צלע משותפת
 $EO = OD$ רדיוסים במעגל
 ו- $AE = AD$ כי הם שני משיקים
 למעגל היוצאים מנקודה אחת.



האם הפתרונות של ניצן או של פרח נכונים?

• עבודה על דף פעילות 1 מעגל והנחות שגויות

דף העבודה מלווה ביישומון [מעגל והנחות שגויות](#) שבעזרתו ניתן לראות אפשרויות שרטוט שונות השומרות על תנאי הבעיה, ובפרט לראות היכן נמצאת נקודת ההשקה לצלע AC ביחס לנקודה D שבשרטוט ובאיזה תנאי הן מתלכדות. המטרה היא לראות שאמנם קיים מצב שבו המשולשים חופפים ונקודת ההשקה מתלכדת עם הנקודה D, אך מצב זה הוא מקרה פרטי ואינו הכרחי בתנאי הבעיה.

מעגל והנחות שגויות

פתחו את היישומן **מעגל והנחות שגויות** וענו על השאלות הבאות:

1. א. האם, לדעתכם, ניתן להסיק מנתוני השאלה שהנקודה D היא נקודת השקה של המעגל לצלע AC?

גררו את הקודקוד A.

ב. האם הקטע OD הוא רדיוס במעגל החסום? נמקו.

ג. האם הנקודה D היא נקודת השקה של המעגל לצלע AC? נמקו.

2. הוסיפו לשרטוט "רדיוס לנקודת ההשקה".

א. אם הנקודה D אינה נקודת השקה, האם ייתכן כי $BD \perp AC$? נמקו.

ב. האם המשולשים AOE ו-AOD בהכרח חופפים? נמקו.

3. היעזרו ביישומן וענו.

א. איזה תנאי צריך להתקיים במשולש ABC כדי שהמשולשים AOE ו-AOD יהיו חופפים? נמקו.

ב. במקרה שהמשולשים חופפים, מה תוכלו לומר על הנקודה D? ועל הזווית BDA? נמקו.

• **דין**

מומלץ לדון בנקודות הבאות:

- ישנם שרטוטים רבים המקיימים את נתוני הבעיה. השרטוט הנתון בצד השאלה הוא רק אפשרות אחת מביניהם. יש להקפיד לשים לב שלא מניחים הנחה כלשהי על סמך השרטוט בלי שיש לכך הצדקה הנובעת מהנתונים.
- בבעיה שלנו, ההנחה שהנקודה D היא נקודת ההשקה של הצלע AC למעגל נכונה במקרה פרטי אחד בלבד – כאשר המשולש ABC הוא שווה-צלעות, ואז המשולשים הנידונים יהיו אכן חופפים. מאחר שהנחה זו אינה נובעת מן הנתונים, הרי היא הנחה שגויה, ולא ניתן להסיק כי המשולשים חופפים.
- מומלץ לחזור למשימה 2 **זוויות שוות** ולאפשר לתלמידים לזהות אילו הנחות שגויות המשימה מזמנת.

הנחות שגויות נפוצות עבור בעיה זו הן ההנחות הבאות:

- ההנחה ש- $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AFC = 90^\circ$

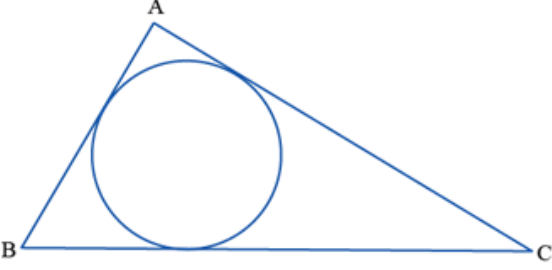
- ההנחה שהקטעים FC ו-AE הם חוצי זוויות

- ההנחה שהנקודה H היא מרכז המעגל

שתי ההנחות הראשונות נכונות אם ורק אם ההנחה השלישית נכונה. שתי הזוויות ישרות במקרה זה כי משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, והקטעים הם חוצי זוויות כי קטע המחבר בין נקודת מפגש המשיקים לבין מרכז המעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים. שלוש ההנחות שגויות, כי לא ניתן להסיק אותן מהנתונים.

• עבודה על דף פעילות 2 משולשים ישרי-זווית

דף פעילות זה מאפשר לתלמידים ליישם ולהרחיב את העקרונות שנלמדו.



משולשים ישרי-זווית

1. נתון משולש ישר-זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$).
 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום ב-ABC.
 חוצה הזווית B חותך את הצלע AC בנקודה D.
 נסמן: $\angle ABC = \beta$.

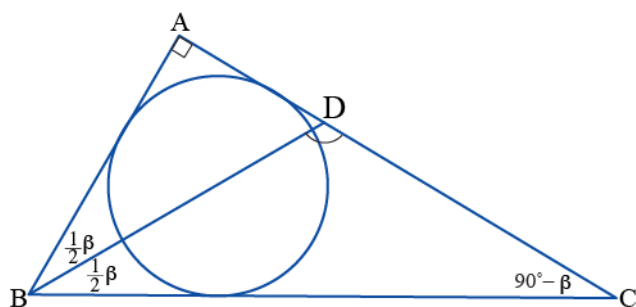
כתבו את גודל הזווית $\angle BDC$ (השתמשו ב- β במידת הצורך).

2. במשולש ישר-זווית חסום מעגל. מחברים את הקודקוד של אחת הזוויות החדות אל נקודת ההשקה לצלע שמול קודקוד זה. האם ייתכן שהקטע הנ"ל עובר דרך מרכז המעגל?
 נמקו את קביעתכם.

• דיון מסכם

- במשימות הערכה 1 ו-2 נתקלנו בהנחות על סמך השרטוט שנכונות רק במקרה פרטי אחד אך לא במקרה הכללי ולכן לא ניתן להסתמך עליהם במהלך ההוכחה.
- ישנם מקרים אחרים שבהם ההנחה השגויה יוצרת סתירה לנתוני השאלה ועל כן אינה יכולה להתקיים כלל (כמו במקרה שמניחים שגובה לניצב במשולש ישר-זווית עובר בתוך המשולש).
- שאלות שכדאי לשאול את עצמי במהלך הוכחה בגיאומטריה:
 - האם הנחתי הנחה כלשהי על סמך השרטוט בלבד בלי להסתמך על הנתונים?
 - האם הנחתי הנחה כלשהי מבלי להצדיק אותה?

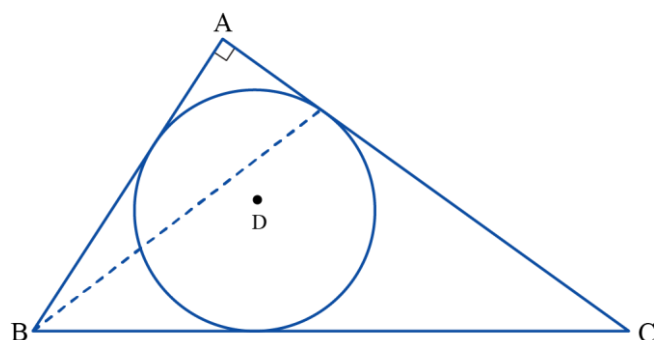
הצעה לפתרון דף פעילות 2 משולשים ישרי-זווית



1. $\angle ABD = \frac{1}{2}\beta$ חוצה זווית B

נתון $\angle A = 90^\circ$

זווית חיצונית למשולש שווה לזווית הפנימית
 $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$
 לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.



2. במשולש ישר-זווית החוסם מעגל, קטע המחבר קודקוד של זווית חדה לנקודת ההשקה שמול זווית זו, לעולם לא יעבור דרך מרכז המעגל, כי אז יתקבל משולש בעל שתי זוויות ישרות. (משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה),