תיק משימטיקה

הזזות של פונקציה

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

מטרות התיק 3

זמני עבודה משוערים 3

החומרים והעזרים הדרושים 3

רקע 4

הצעה למהלך העבודה 4

עבודה על משימת ההערכה 5

מתאימים הזזות 5

הערכת תוצרי התלמידים 6

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה 7

פעילות 1 7

דף פעילות **הזזות 1** – חלק א' 8

דף פעילות **הזזות 1** – חלק ב' 10

פעילות 2 11

דף פעילות **הזזות 2** – חלק א' 12

דף פעילות **הזזות 2** – חלק ב' 14

© כל הזכויות שמורות

הזזות של פונקציה

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להתאים בין ייצוגים גרפיים, סימבוליים ומילוליים של הזזות אנכיות ואופקיות של פונקציות, ולתת מענה לקשיים שמתגלים.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- להתאים בין הזזה **אנכית** של גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ביטוי סימבולי מהצורה $f(x)+a$, כך ש:
  - בעבור $a>0$ הגרף מוזז כלפי מעלה,
  - בעבור $a<0$ הגרף מוזז כלפי מטה.
- להתאים בין הזזה **אופקית** של גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ביטוי סימבולי מהצורה $f(x+a)$, כך ש:
  - בעבור $a>0$ הגרף מוזז שמאלה,
  - בעבור $a<0$ הגרף מוזז ימינה.

זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: 10-15 דקות.
- פעילויות בעקבות ההערכה: 60-90 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך העבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף הוראות למשימה ***מתאימים הזזות***.
- ערכת כרטיסים למשימה ***מתאימים הזזות***.

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

לפעילות 1

- דף פעילות ***הזזות 1***.
- יישומון גיאוגברה הזזות אנכיות.

לפעילות 2

- דף פעילות ***הזזות 2***.
- יישומון גיאוגברה הזזות אופקיות.

© כל הזכויות שמורות

רקע

במסגרת המבוא ללימודי אנליזה של פונקציות עוסקים בפעולות שונות על פונקציות (הזזות, מתיחות וכיווצים, שיקופים ועוד) ובייצוגים המילולי, הגרפי והאלגברי של פעולות אלה. בעזרת פעולות על פונקציות ניתן להשתמש בידע קודם על פונקציה אחת כדי להסיק על תכונותיה של פונקציה אחרת. בנוסף שימוש בפעולות אלה מאפשר לבצע בקרה על תוצאות חקירה של פונקציה המתקבלת מפונקציה מוכרת אחרת על ידי הרכבה של פעולות כאלה. לדוגמה, ניתן לשרטט בקלות את גרף הפונקציה $y=(x-3)^2$ אם מתייחסים אליו כאל הזזה אופקית ב- 3 יחידות ימינה של גרף הפונקציה $y=x^2$.

הפעולות המתבצעות על פונקציות כוללות הזזות אנכיות ואופקיות. ידועים מספר קשיים בקרב תלמידים בנושא זה. קושי נפוץ קשור בבלבול בין הביטוי הסימבולי המתאים להזזה אנכית של פונקציה נתונה f , לבין ביטוי המתאים להזזה אופקית של הפונקציה f . קושי נוסף קשור לנטייה של תלמידים להתאים ביטוי מהצורה $f(x+a)$, כאשר $a>0$, להזזה ימינה, במקום להזזה שמאלה, ולהפך.

התיק ***הזזות של פונקציה*** נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים אלה, ולתת להם מענה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת ההערכה ***מתאימים הזזות***.
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

© כל הזכויות שמורות

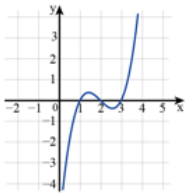
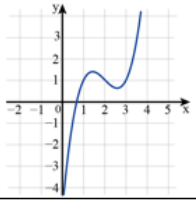
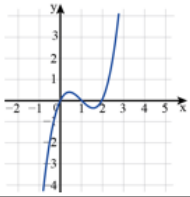
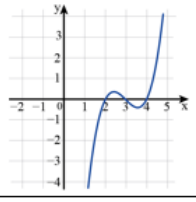
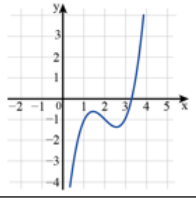
עבודה על משימת ההערכה

במשימה ***מתאימים הזזות*** מוצגות חמש פונקציות: פונקציית מקור וארבע פונקציות שהתקבלו מהזזות שלה (אנכיות או אופקיות). כל אחת מחמש הפונקציות מתוארת באופן גרפי, מילולי וסימבולי, וכל תיאור מופיע על כרטיס נפרד. התלמידים מתבקשים ליצור שלשות כרטיסים, כך שכל שלשה כוללת דרכים שונות לתאר אותה פונקציה.

המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

מתאימים הזזות

לפניכם שלוש קבוצות של כרטיסים. בכל קבוצה חמישה כרטיסים.
בקבוצה אחת יש תיאורים גרפיים, בקבוצה שנייה תיאורים מילוליים, ובקבוצה השלישית ביטויים סימבוליים.
בשורה הראשונה שבטבלה שלפניכם מופיעה פונקציית מקור בשלושת התיאורים (גרפי, מילולי וסימבולי). בעמודה הראשונה מופיעים גרפים המתקבלים כתוצאה מהזזות שונות של פונקציית המקור.
עליכם ליצור שלשות של כרטיסים כך שלכל גרף יותאם תיאור מילולי וביטוי סימבולי שלו.
מלאו את הטבלה לפי השלשות שהרכבתם.

	תיאור גרפי	תיאור מילולי	ביטוי סימבולי
1		פונקציית המקור	$f(x)$
2			
3			
4			
5			

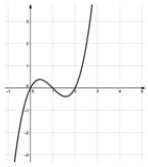
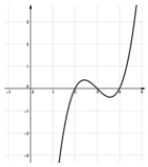
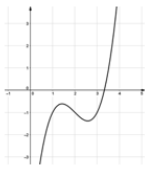
© כל הזכויות שמורות

הערכת תוצרי התלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	תשובה נכונה	טעויות		הערות
		בהזזה אופקית	בהזזה אנכית	
תלמיד 1		V	V	
תלמיד 2	V			
תלמיד 3		V		
סך-הכול				

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

תיאור גרפי	תיאור מילולי	ביטוי סימבולי
1	פונקציית המקור	$f(x)$
2	הזזה ביחידה אחת כלפי מעלה	$f(x)+1$
3 	הזזה ביחידה אחת לכיוון שמאל	$f(x+1)$
4 	הזזה ביחידה אחת לכיוון ימין	$f(x-1)$
5 	הזזה ביחידה אחת כלפי מטה	$f(x)-1$

© כל הזכויות שמורות

פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שהתקשו בהזזות אנכיות (מסומנים בעמודה מודגשת בטבלת ההערכה).	V	
לתלמידים שהתקשו בהזזות אופקיות (מסומנים בעמודה מודגשת בטבלת ההערכה).		V

פעילות 1

שלבי הפעילות

- עבודה על דף הפעילות ***הזזות 1*** – חלק א'.
- דיון.
- עבודה על דף הפעילות ***הזזות 1*** – חלק ב'.
- דיון מסכם מלווה ביישומון הזזות אנכיות.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף הפעילות *הזזות 1* – חלק א'**

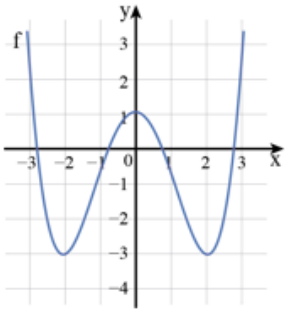
בהינתן הגרף של פונקציה $f(x)$, התלמידים צריכים למצוא איך ייראה הגרף של $f(x)+a$.

© כל הזכויות שמורות

הזזות 1

חלק א'

1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-3 \le x \le 3$.



א. איך ייראה גרף הפונקציה $g(x) = f(x) + 2$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

הגרף יוזז ב- 2 יחידות בכיוון: ימין / שמאל / מעלה / מטה.

ב. איך ייראה גרף הפונקציה $h(x) = f(x) - 3$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

הגרף יוזז ב- 3 יחידות בכיוון: ימין / שמאל / מעלה / מטה.

ג. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.

_____

ד. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.

_____

- **דיון**
  - דנים בפתרונות התלמידים לדף הפעילות ***הזזות 1*** **– חלק א'** בסיוע השאלות הבאות:
    - האם סוג נקודות הקיצון נשמר או השתנה בביצוע ההזזה?
    - האם שיעור ה- x של נקודות הקיצון נשמר או השתנה?
    - מה לגבי שיעור ה- y?
    - מה השתנה בנקודות הקיצון של הפונקציה בביצוע פעולת ההזזה?
    - האם נכון לומר כי בביצוע ההזזה שינוי זה מתרחש **לכל** נקודה על גרף הפונקציה?
    - האם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה נשמרו או השתנו בביצוע הזזה כזו?
    - האם נקודות האפס של הפונקציה נשמרו או השתנו בביצוע פעולת ההזזה?
    - האם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע הזזה כזו?

© כל הזכויות שמורות

- ניתן לסכם את תשובות התלמידים באמצעות הטבלה הבאה:[1]

	נשמר	השתנה	אם השתנה , כיצד השתנה	
			$f(x)+2$	$f(x)-3$
סוג הקיצון				
שיעור ה- x של נקודת הקיצון				
שיעור ה- y של נקודת הקיצון				
תחומי עלייה וירידה				
נקודות אפס				
תחומי חיוביות ושליליות				
שיעורי נקודה כלשהי				

- כדאי לסכם בשילוב של התבוננות נקודתית המתמקדת בנקודות הקיצון בביצוע פעולת ההזזה, עם התבוננות גלובאלית בהזזת הגרף כיחידה שלמה:

כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$, ומגדירים פונקציה חדשה $g(x)=f(x)+2$ אז שיעור ה- y של נקודות הקיצון גדל ב- 2 יחידות. למעשה שיעור ה- y של **כל** הנקודות על גרף הפונקציה f גדל ב- 2 יחידות. לכן גרף הפונקציה g המתקבל הוא הזזה של גרף הפונקציה f ב- 2 יחידות כלפי מעלה.

[1] ניתן להוסיף פרמטרים נוספים כגון: זוגיות/אי-זוגיות של פונקציה, אסימפטוטות אנכיות/אופקיות ועוד. זאת בהתאם לחומר הנלמד בכיתה.

© כל הזכויות שמורות

- **עבודה על דף הפעילות *הזזות 1 – חלק ב'***

בדומה לחלק א' בדף הפעילות, התלמידים נדרשים למצוא איך ייראה הגרף של $f(x)+a$ בהינתן הגרף של פונקציה $f(x)$, אך הפעם במקום לעסוק במקרים פרטיים עוסקים במקרה הכללי.

חלק ב'

2. הפונקציה $g(x)$ הוגדרה כך: $g(x)=f(x)+a$ (a פרמטר).

עבור אילו ערכים של a גרף הפונקציה g:

א. יהיה הזזה של גרף הפונקציה f כלפי מעלה?

_____

ב. יהיה הזזה של גרף הפונקציה f כלפי מטה?

_____

ג. יתלכד עם גרף הפונקציה f?

_____

3. פתחו את קובץ גיאוגברה הבא: הזזות אנכיות

בצד שמאל של המסך מופיע סרגל גרירה. ניתן לגרור את הנקודה שבסרגל וכך לשנות את הערך של a.

שנו את הערך של a ובדקו את תשובותיכם לשאלה 2.

הפונקציה $g(x)=f(x)+a$ היא **הזזה אנכית** של גרף הפונקציה $f(x)$.

- **דיון מסכם מלווה ביישומון הזזות אנכיות**

לסיכום מומלץ לדון בנקודות הבאות:

- ביטוי מהצורה $f(x)+a$ מתאר הזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)$.
  - אם $a>0$, אז ההזזה היא ב- a יחידות כלפי מעלה.
  - אם $a<0$, אז ההזזה היא ב- $|a|$ יחידות כלפי מטה.
- כדאי להדגים ביישומון את ההזזות המתקבלות עבור ערכים שונים של הפרמטר a, ולשים לב לכך ששיעור ה- y **בכל נקודה** עולה / יורד ב- $|a|$ יחידות, ובפרט, שיעורי ה- y של נקודות הקיצון ושל נקודת החיתוך עם ציר ה- y.

© כל הזכויות שמורות

- תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אינם משתנים בביצוע הזזה אנכית, כי סוג הקיצון ושיעורי ה- x של נקודות הקיצון אינם משתנים.
- תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה משתנים בביצוע הזזה אנכית, כי נקודות האפס משתנות.

- ההזזות של הפונקציות הקוויות והפונקציות הריבועיות המוכרות לתלמידים משנים קודמות הן למעשה מקרים פרטיים של ההזזות שנדונו כאן באופן כללי. לדוגמה, הפונקציה $y=x-1$ כהזזה אנכית ביחידה אחת כלפי מטה של הפונקציה הקווית $y=x$, או הפונקציה $y=x^2+3$ כהזזה אנכית ב- 3 יחידות כלפי מעלה של הפרבולה $y=x^2$.

פעילות 2

שלבי הפעילות

- עבודה על דף הפעילות ***הזזות 2*** – חלק א'.
- דיון.
- עבודה על דף הפעילות ***הזזות 2*** – חלק ב'.
- דיון מסכם מלווה ביישומון הזזות אופקיות.

מהלך הפעילות

- **עבודה על דף הפעילות *הזזות 2* – חלק א'**

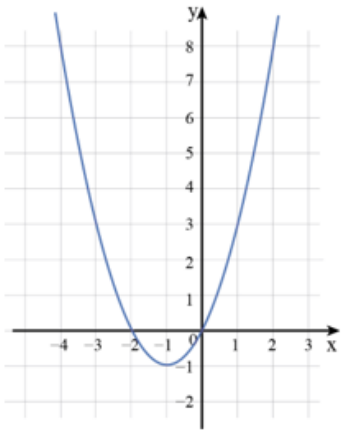
התלמידים נדרשים לתאר באופן אלגברי ובאמצעות טבלת ערכים את הפונקציות המתקבלות לאחר ההזזה, לשרטט גרפים של פונקציות מוזזות ולתאר באופן מילולי את הפונקציות המתקבלות לאחר ההזזה. תשומת לב ניתנת גם לנקודות הקיצון של הפונקציה הנתונה והפונקציה המוזזת.

© כל הזכויות שמורות

הזזות 2

חלק א'

1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x$.



מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(x-1)$.

א. כתבו את הייצוג האלגברי של הפונקציה $g(x)$.

_____

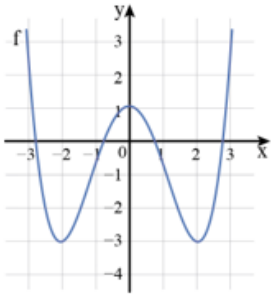
ב. השלימו את טבלת הערכים הבאה:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$			8			35
$g(x)$	-1				15	

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. גרף הפונקציה $g(x)$ הוא הזזה של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחידה אחת לכיוון _____.

2. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-3\le x\le 3$.



א. איך ייראה גרף הפונקציה $g(x)=f(x+2)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

הגרף יוזז ב- 2 יחידות בכיוון: ימין / שמאל / מעלה / מטה.

ב. איך ייראה גרף הפונקציה $h(x)=f(x-3)$?

הקיפו את התשובה הנכונה:

הגרף יוזז ב- 3 יחידות בכיוון: ימין / שמאל / מעלה / מטה.

ג. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.

_____

ד. כתבו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.

_____

© כל הזכויות שמורות

- **דיון**
  - בשלב ראשון התלמידים צריכים להבין את משמעות הביטוי האלגברי $g(x)=f(x-1)$ כהצבה של $x-1$ בפונקציה f.
  - לאחר השלמת טבלת הערכים מומלץ להדגיש בצבע את הערכים השווים בין הפונקציות המקורית והמוזזת.

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f(x)$	0	3	8	15	24	35
$g(x)$	-1	0	3	8	15	24

באמצעות הטבלה ניתן לראות באופן ברור את ההזזה ימינה.

  - דנים בפתרונות התלמידים לדף הפעילות ***הזזות 2*** **– חלק א'** בסיוע השאלות הבאות:
    - ראינו כי הפונקציה $g(x)=f(x-1)$ היא הזזה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחידה אחת ימינה. איזו פונקציה תתאר הזזה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)$ ב- **3** יחידות ימינה?
    - איזו פונקציה תתאר הזזה אופקית ביחידה אחת **שמאלה**?
  - כדאי לציין את המעבר מהתבוננות נקודתית על ההזזה האופקית להתבוננות גלובאלית שבה רואים את הזזת הגרף כיחידה שלמה:

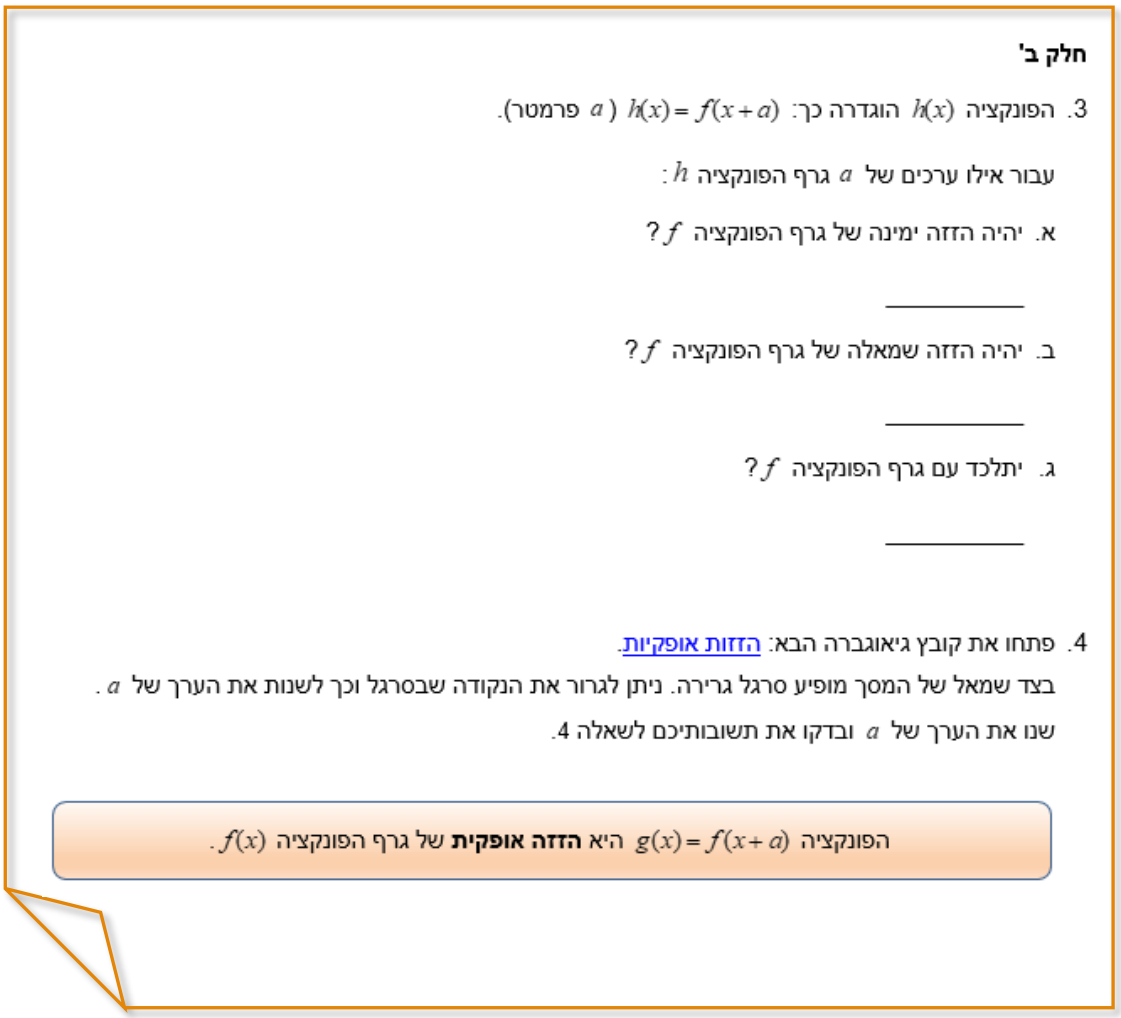
כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$, ומגדירים פונקציה חדשה $g(x)=f(x-1)$ אז שיעור ה- y של כל נקודה על גרף הפונקציה g שווה לשיעור ה- y שהפונקציה f מקבלת יחידה אחת שמאלה מנקודה זו. לכן גרף הפונקציה g המתקבל הוא הזזה של גרף הפונקציה f ביחידה אחת **ימינה**.

  - בהתייחס לגרף שבבעיה 2:
    - האם סוג נקודות הקיצון נשמר או השתנה בביצוע ההזזה?
    - האם שיעור ה- x של נקודות הקיצון נשמר או השתנה?
    - מה לגבי שיעור ה- y?
    - מה השתנה בנקודות הקיצון של הפונקציה בביצוע ההזזה?
    - האם נכון לומר כי בביצוע ההזזה שינוי זה מתרחש **לכל** נקודה על גרף הפונקציה?
    - האם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע הזזה כזו?
    - האם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה יישמרו או ישתנו בביצוע הזזה כזו?

© כל הזכויות שמורות

- **עבודה על דף הפעילות *הזזות 2* – חלק ב'**

הפעילות מתמקדת בהכללת הקשר בין הכיוון של הזזה אופקית מהצורה $f(x)+a$, ובין הערך של הפרמטר a .
התלמידים יכולים להיעזר ביישומון הזזות אופקיות הממחיש את ההזזות באופן דינמי.



חלק ב'

3. הפונקציה $h(x)$ הוגדרה כך: $h(x)=f(x+a)$ (a פרמטר).

עבור אילו ערכים של a גרף הפונקציה h:

א. יהיה הזזה ימינה של גרף הפונקציה f?

_____

ב. יהיה הזזה שמאלה של גרף הפונקציה f?

_____

ג. יתלכד עם גרף הפונקציה f?

_____

4. פתחו את קובץ גיאוגברה הבא: הזזות אופקיות.

בצד שמאל של המסך מופיע סרגל גרירה. ניתן לגרור את הנקודה שבסרגל וכך לשנות את הערך של a .

שנו את הערך של a ובדקו את תשובותיכם לשאלה 4.

הפונקציה $g(x)=f(x+a)$ היא **הזזה אופקית** של גרף הפונקציה $f(x)$.

- **דיון מסכם מלווה ביישומון הזזות אופקיות**

לסיכום, מומלץ לדון בנקודות הבאות:

- ביטוי מהצורה $f(x+a)$ מתאר הזזה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.
  - אם $a>0$, אז ההזזה היא ב- a יחידות שמאלה.
  - אם $a<0$, אז ההזזה היא ב- $|a|$ יחידות ימינה.
  - שיעור ה- x של נקודות הקיצון משתנה ב- $|a|$ יחידות.
  - שיעורי ה- x של נקודת האפס משתנים ב- $|a|$ יחידות.

© כל הזכויות שמורות

- תחומי העלייה והירידה של הפונקציה משתנים בביצוע הזזה אופקית, כי שיעור ה- x של נקודות הקיצון משתנה.
- תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה משתנים גם הם בביצוע הזזה אופקית, כי נקודות האפס משתנות.

- ביישומון מוצעות שתי אפשרויות. באפשרות א' מוצגת פונקציה שונה מזו שהוצגה במשימה ***מתאימים הזזות***. ניתן לבחור במקומה באפשרות ב', כדי להדגים הזזות אופקיות של הפונקציה שהוצגה במשימה.
- ההזזות של פונקציות ריבועיות המוכרות לתלמידים מכיתה ט׳, הן למעשה מקרים פרטיים של ההזזות שנדונו כאן באופן כללי. לדוגמה, הפונקציה $y=(x-3)^2$ כהזזה אופקית ב- 3 יחידות ימינה של הפרבולה $y=x^2$.

ניתן לרכז בטבלה את ההבדלים בין הזזות אנכיות להזזות אופקיות בהצגה הסימבולית ובתכונות שתוארו בשתי הפעילויות.

© כל הזכויות שמורות