الوحدة التاسعة عشرة: عائلات الدوالّ

الدرس الأوّل: العائلة $y = ax^2 + bx$ $a = 1$ أو $a = -1$

اخترتُ عددًا.

ضربتُهُ في عدد أكبر منه بـ 2.

أيّ نتائج يمكن الحصول عليها؟

نرمز بـ x إلى العدد الّذي اخترناه، وَ بـ y إلى النتيجة.
أيّ قِيَم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

نبحث دوالّ تربيعيّة صورتها $y = x^2 + bx$ أو صورتها $y = -x^2 + bx$.

نتطرّق في المهامّ 1 - 3 إلى المُعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. اخترتُ العدد 1، على أيّ نتيجة أحصل؟

ب. اخترتُ العدد 6، على أيّ نتيجة أحصل؟

ت. اخترتُ العدد (2–)، على أيّ نتيجة أحصل؟

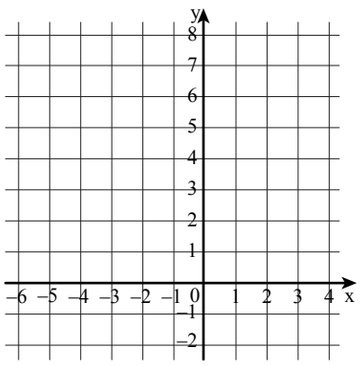
ث. اخترتُ العدد (10–)، على أيّ نتيجة أحصل؟

2. مُعطاة الدالّة $y = x^2 + 2x$

أ. أكملوا الجدول.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$y = x^2 + 2x$							

ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، ثمّ صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافئ.



ت. جدوا بواسطة الرسم البيانيّ أو الجدول:

- ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للقطع المكافئ؟
- ما هو محور التماثل للقَطْع المكافئ؟
- ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

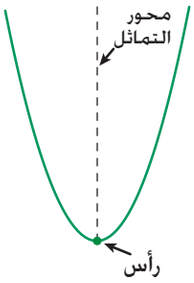
هل هي صُغرى أم نقطة عُظمى؟

ث. اكتبوا مثالين لنقطتين متماثلتين على القَطْع المكافئ.

3. أ. حصلت على نتيجة موجبة. أيّ أعداد اخترتُ؟ اشرحوا.

ب. حصلت على نتيجة سالبة. أيّ أعداد اخترتُ؟ اشرحوا.

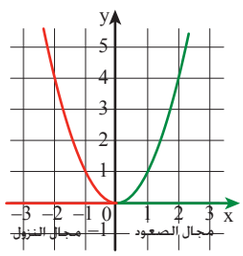
للتذكير



- نسمّي الدالّة $y = x^2$ **"دالّة تربيعيّة".**
  نسمّي الخطّ البيانيّ للدالّة التربيعيّة **"قَطْع مكافئ".**
  يوجد **محور تماثل** للقَطْع المكافئ.
  نسمّي نقطة التقاء الخطّ البيانيّ مع محور التماثل **"رأس"** القطع المكافئ.

- نقطة الرأس للقَطْع المكافئ هي نقطة نهائيّة.
  إذا كانت نقطة الرأس النقطة "الأكثر انخفاضًا" للقَطْع المكافئ فهي **النقطة الصُغرى.**
  إذا كانت نقطة الرأس النقطة "الأكثر ارتفاعًا" للقَطْع المكافئ فهي **النقطة العُظمى.**
- يمكن أن نفحص ما إذا كانت الدالّة **تصاعديّة** أم **تنازليّة** بطريقتين:
  - بواسطة "التقدُّم" من **اليسار إلى اليمين** على الخطّ البيانيّ للدالّة.
    إذا كان "التقدُّم" على الخطّ البيانيّ باتّجاه **الصعود**، فإنّ الدالّة **تصاعديّة.**
    إذا كان "التقدُّم" على الخطّ البيانيّ باتّجاه **النزول**، فإنّ الدالّة **تنازليّة.**
  - بواسطة "التقدُّم" من **اليسار إلى اليمين** على محور x.
    إذا تقدّمنا في كلّ x في المجال:
    على محور x **وكبُرت** إحداثيّات y، فإنّ الدالّة **تصاعديّة.**
    على محور x **وصغُرت** إحداثيّات y ، فإنّ الدالّة **تنازليّة.**

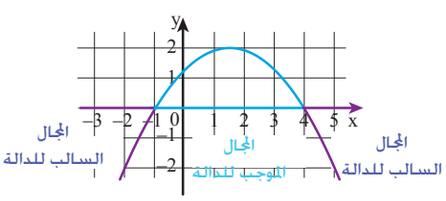
مثال: أمامكم رسمة القَطْع المكافئ الّذي هو الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$،



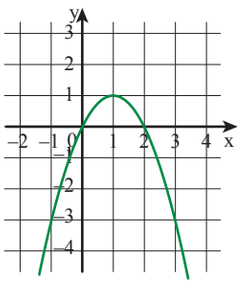
محور التماثل للقَطْع المكافئ هو محور y.
التمثيل الجبريّ لمحور التماثل هو $x = 0$.
إحداثيّا رأس القَطْع المكافئ هما $(0, 0)$.
الدالّة **تصاعديّة** من 0 وهلم جرا.
نسجّل: الدالة **تصاعديّة** في المجال $x > 0$
الدالّة **تنازليّة** حتّى 0.
نسجّل: الدالّة **تنازليّة** في المجال $x < 0$

- الدالّة **موجبة** في مجال معيّن إذا كانت قِيَم الدالّة موجبة في المجال نفسه، هذا يعني أنّ $y > 0$.
  في التمثيل البيانيّ، النقاط المناسبة للقِيَم الموجبة للدالّة هي النقاط، على الخطّ البيانيّ للدالّة، الّتي تقع **فوق** محور x.
- الدالّة **سالبة** في مجال معيّن إذا كانت قِيَم الدالّة سالبة في المجال نفسه، هذا يعني أنّ $y < 0$.
  في التمثيل البيانيّ، النقاط المناسبة للقِيَم السالبة للدالّة هي النقاط، على الخطّ البيانيّ للدالّة، الّتي تقع **تحت** محور x.

مثال: قِيَم الدالّة **موجبة** بين (-1) إلى 4.
قِيَم الدالّة **سالبة** على يسار (-1) وعلى يمين 4.



4. أمامكم رسمة الخطّ البيانيّ للدالّة $y = -x^2 + 2x$
أكملوا صفات الدالّة.



التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -x^2 + 2x$
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

نقاط التقاطع مع محور x (النقاط الصفريّة)

5. ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $y = x^2 - 4x$؟
قال **جمال:** يتحقّق $y = 0$ في النقاط الصفريّة؛ لذا نحلّ المعادلة $x^2 - 4x = 0$
نُخرج عامل مشترك، ونحصل على $x(x - 4) = 0$
أكملوا حلّ **جمال**، وجدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة.

6. احسبوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.

مثال: $y = x^2 - 3x$
نسجّل معادلة: $x^2 - 3x = 0$
نُخرج عامل مشترك: $x(x - 3) = 0$
من هنا ينتج أنّ: $x - 3 = 0$ أو $x = 0$
لذا: $x = 3$ أو $x = 0$
النقطتان الصفريّتان هما: $(3, 0)$ وَ$(0, 0)$

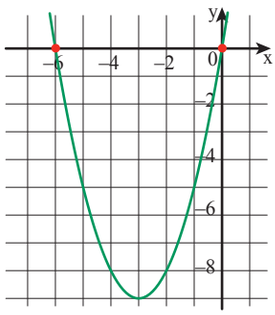
أ. $y = x^2 - 5x$ ب. $y = x^2 + 5x$ ت. $y = -x^2 + 8x$ ث. $y = -x^2 + 10x$

7. قال **راني:** الدالّة $y = x^2 - 8x$ والدالّة $y = 8x - x^2$ لهما النقاط الصفريّة نفسها.
هل قول **راني** صحيح؟ اِشرحوا.

يمكن إيجاد **النقاط الصفريّة** للدالّة التربيعيّة $y = x^2 + 6x$ بطرق مختلفة.

- **بطريقة بيانيّة** - نبحث عن نقاط يتقاطع فيها الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور x.

نرسم الخطّ البيانيّ للدالّة.



يتقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور x في النقطتين $(0, 0)$ وَ $(-6, 0)$.

هاتان النقطتان هما **النقاطتان الصفريّتان** للدالّة.

- **بطريقة جبريّة** - نسجّل معادلة فيها قيمة الدالّة y هي 0.

نحلّ المعادلة: $x^2 + 6x = 0$

نُخرج عامل مُشترك (نحلّل إلى عوامل): $x(x + 6) = 0$

هذا يعني أنّ: $x = 0$ أو $x + 6 = 0$

من هنا ينتج أنّ: $x = 0$ أو $x = -6$

إحداثيّات النقاط الصفريّة هي: $(0, 0)$ وَ $(-6, 0)$

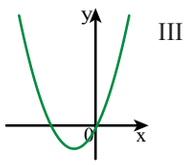
مجموعة مهامّ

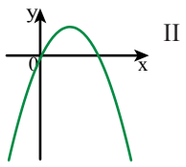
1. أمامكم رسومات الخطوط البيانيّة للدوالّ التربيعيّة:

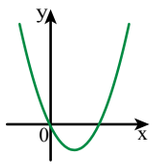
$y = x^2 + 2x$

$y = x^2 - 2x$

$y = -x^2 + 2x$







أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

ب. حدّدوا لكلّ دالّة:

أيّ نقاط من بين النقاط التالية هي نقاط صفريّة؟

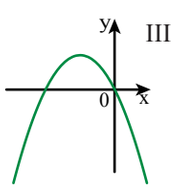
$(2, 0)$ $(0, 0)$ $(-2, 0)$

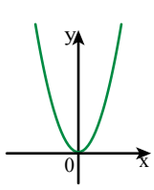
2. أمامكم رسومات الخطوط البيانيّة للدوالّ التربيعيّة:

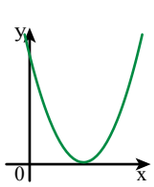
$y = 2x^2$

$y = -x^2 - 2x$

$y = (x - 2)^2$







أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

ب. حدّدوا لكلّ دالّة:

أيّ نقاط من بين النقاط التالية هي نقاط صفريّة؟

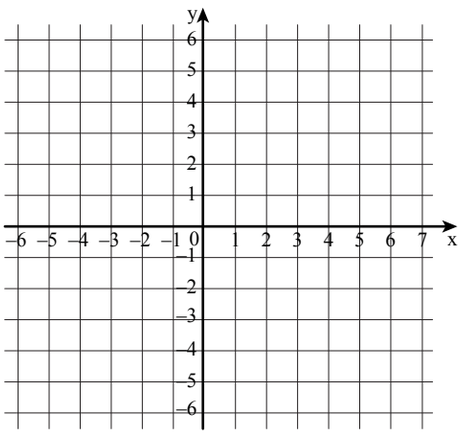
$(2, 0)$ $(0, 0)$ $(-2, 0)$

3. مُعطاة الدالّة $y = x^2 - 4x$

أ. أكملوا الجدول.

x	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 4x$							

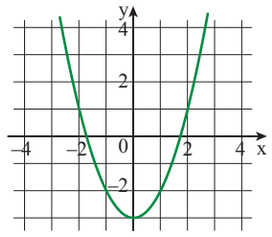
ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، ثمّ صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافئ.

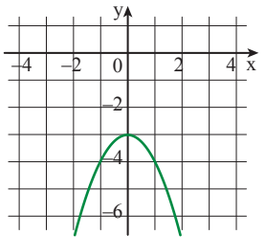


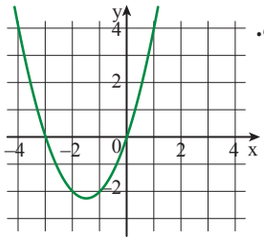
ت. أكملوا **بطاقة هُويّة** الدالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = x^2 - 4x$
محور التماثل	
إحداثيًا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيًا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

4. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للخطّ البيانيّ المناسب.

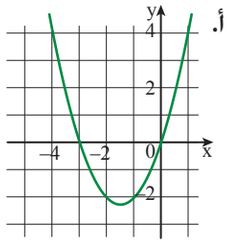
أ. 

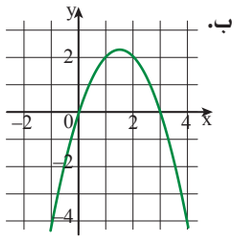
ب. 

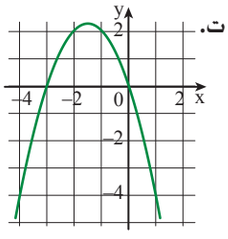
ت. 

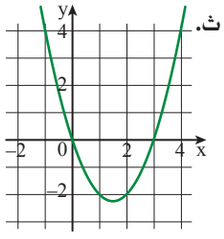
$y = x^2 - 3$ $y = x^2 + 3x$ $y = -x^2 - 3$

5. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للخطّ البيانيّ المناسب.

أ. 

ب. 

ت. 

ث. 

$y = x^2 - 3x$ $y = x^2 + 3x$ $y = -x^2 + 3x$

6. سجّلوا، في كلّ بند، أيّ أعداد من بين الأعداد: 6, 0, (−6) هي حلول الدالّة المُعطاة.

أ. $x^2 + 6x = 0$ ت. $-x^2 + 6x = 0$ ج. $6x - x^2 = 0$

ب. $x^2 - 6x = 0$ ث. $-x^2 - 6x = 0$ ح. $x^2 - 36 = 0$

7. حلّوا المعادلات.

أ. $x(x - 5) = 0$ ت. $x(x - 1) = 0$ ج. $x^2 - 6x = 0$

ب. $x(x + 5) = 0$ ث. $x(x + 1) = 0$ ح. $x^2 + 6x = 0$

8. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 - 8x = 0$ ت. $-12x + x^2 = 0$ ج. $0 = x^2 - 12x$

ب. $x^2 + 8x = 0$ ث. $0 = x^2 - 5x$ ح. $0 = x^2 + 12x$

9. أ. جدوا عددًا صحيحًا إذا أضفناه إلى مربّعه نحصل على 0.

ب. كم عددًا كهذا يمكنكم أن تجدوا؟

10. مُعطى عددان صحيحان.

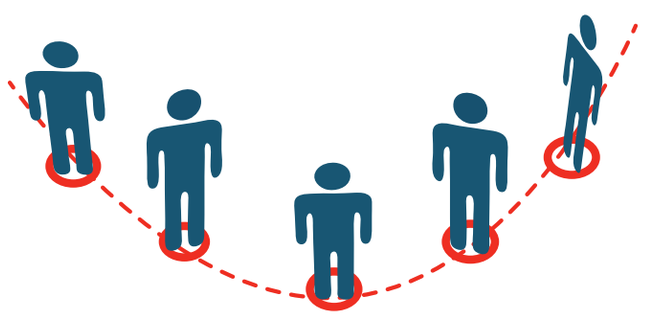
العدد الأوّل أكبر بـ 4 من العدد الثاني.

حاصل ضرب العددين هو 45.

أ. هل العددان زوجيّان أم فرديّان؟ اشرحوا.

ب. جدوا العددين.

ت. كم حلًّا يوجد للمسألة؟



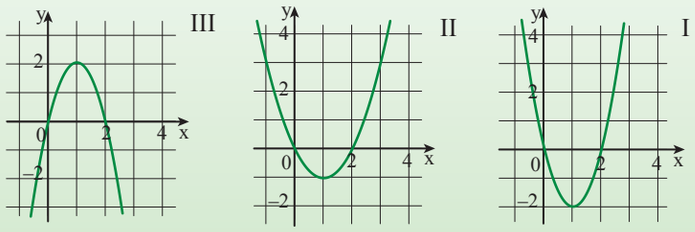
الدرس الثاني: العائلة $a \neq 0, y = ax^2 + bx$

أمامكم الخطوط البيانيّة للدوالّ:

$y = x^2 - 2x$

$y = 2x^2 - 4x$

$y = -2x^2 + 4x$



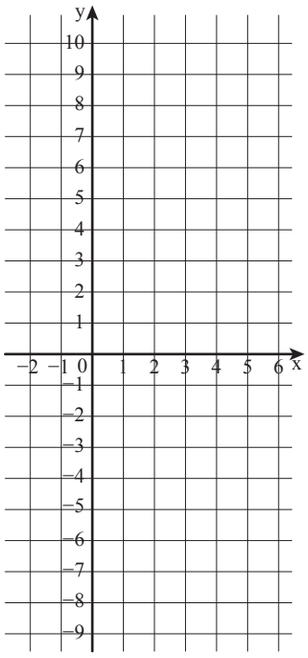
خمّنوا الخطّ البيانيّ المناسب للدالّة.

نبحث دوالّ تربيعيّة من العائلة $a \neq 0 , y = ax^2 + bx$.

1. مُعطاة الدالّة $y = 2x^2 - 4x$

أ. أكملوا الجدول.

x	–1	0	1	2	3
$y = 2x^2 - 4x$					



ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، ثمّ صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافئ.

ت. اكتبوا مثالين لنقطتين متماثلتين على القَطْع المكافئ.

ث. أكملوا صفات الدالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 2x^2 - 4x$
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

2. مُعطاة الدالّة $y = -2x^2 + 4x$

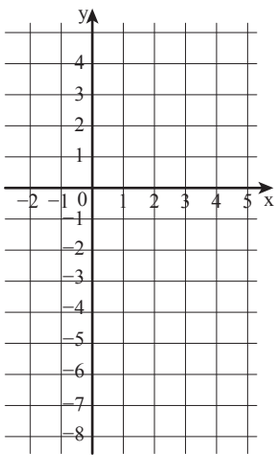
أ. أكملوا الجدول.

x	−1	0	1	2	3
$y = -2x^2 + 4x$					

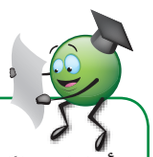
ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، ثمّ صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافئ.

ت. اكتبوا مثالين لنقطتين متماثلتين على القَطْع المكافئ.

ث. أكملوا صفات الدالّة.



التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -2x^2 + 4x$
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	



رأينا في مهامَ الافتتاحيّة وفي المهمّتين 1 وَ 2 أنّ الدالّة $y = x^2 - 2x$ والدالّة $y = x^2 - 4x$ لهما النقاط الصفريّة نفسها. هذا يعني أنّ القطوع المكافئة المناسبة تتقاطع مع محور x في النقاط نفسها.

نقاط التقاطع مع محور x (نقاط صفريّة)

3. احسبوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.

أ. $y = 3x^2 - 6x$

ب. $y = 3x^2 + 6x$

ت. $y = -4x^2 + 12x$

ث. $y = -3x^2 + 12x$

مثال: $y = 2x^2 - 6x$

نسجّل: $2x^2 - 6x = 0$

نُخرج عامل مشترك: $2x(x - 3) = 0$

من هنا ينتج أنّ: $2x = 0$ أو $x - 3 = 0$

لذا: $x = 0$ أو $x = 3$

النقطتان الصفريّتان هما: $(0, 0)$ وَ $(3, 0)$

ملاحظة: نرى في الحلّ أنّ الدالّتين $y = 2x^2 - 6x$ وَ $y = x^2 - 3x$ لهما النقاط الصفريّة نفسها.

4. أ. جدوا النقاط الصفريّة للدالّة $y = x^2 + 3x$

ب. سجّلوا دالّة إضافيّة لها نقاط صفريّة كما يوجد للدالّة $y = x^2 + 3x$.

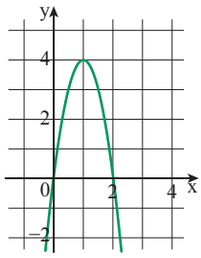
يمكن إيجاد **النقاط الصفريّة** للدالّة التربيعيّة $y = -4x^2 + 8x$ بطرق مختلفة.

- **بطريقة بيانيّة**

نرسم الخطّ البيانيّ للدالّة ونحصل على:

يتقاطع القطع المكافئ مع محور x في النقطتين (2, 0) وَ (0, 0).

هاتان النقطتان هما **النقاطتان الصفريّتان** للدالّة.



- **بطريقة جبريّة**

نعوض 0 بدلًا من y ونحصل على المعادلة $-4x^2 + 8x = 0$

نُخرج عامل مُشترك (نحلّل إلى عوامل): $4x(-x + 2) = 0$

هذا يعني أنّ: $4x = 0$ أو $-x + 2 = 0$

من هنا ينتج أنّ: $x = 0$ أو $x = 2$

إحداثيّات النقاط الصفريّة هي: (0, 0) وَ (2, 0)

5. حلّوا المعادلات.

أ. $3x(x - 5) = 0$ ت. $2x^2 - 12x = 0$ ج. $-2x^2 + 2x = 0$

ب. $3x(x + 5) = 0$ ث. $2x^2 + 12x = 0$ ح. $\frac{1}{2}x^2 - 6x = 0$

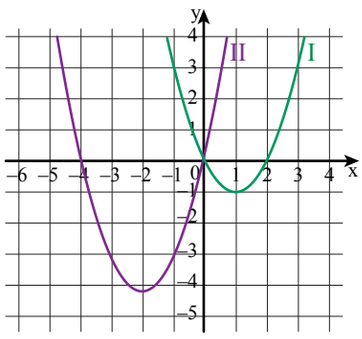
مجموعة مهامّ

1. رُسم، في هيئة المحاور، الخطّان البيانيّان للدالّتين التربيعيّتين:

$y = x^2 - 2x$

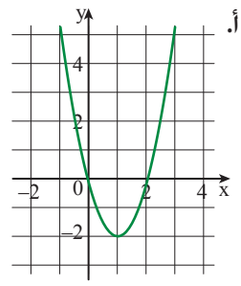
$y = x^2 + 4x$

لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقطع المكافئ المناسب.

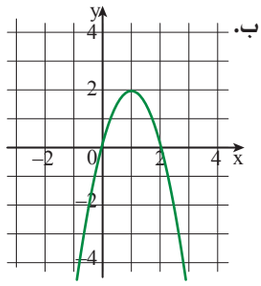


2. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقَطْع المكافئ المناسب. اشرحوا كيف تمّت الملاءمة؟

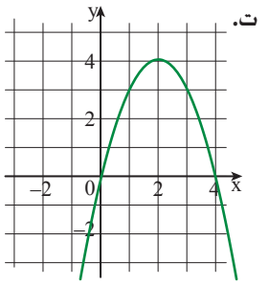
أ.



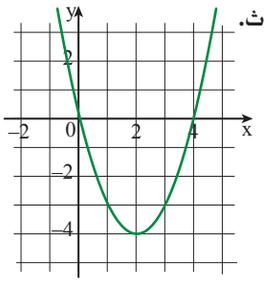
ب.



ت.



ث.



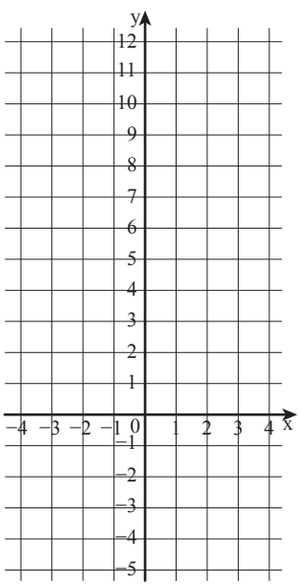
$y = -x^2 + 4x$ $y = x^2 - 4x$ $y = 2x^2 - 4x$ $y = -2x^2 + 4x$

3. مُعطاة الدالّة $y = 3x^2 - 6x$

أ. أكملوا الجدول.

x	−1	0	1	2	3
$y = 3x^2 - 6x$					

ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، ثمّ صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافئ.



ت. أكملوا صفات الدالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 3x^2 - 6x$
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

4. احسبوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.

أ. $y = 2x(x - 7)$ ب. $y = 4x(x - 1)$ ت. $y = 3x^2 - 15x$ ث. $y = -3x^2 + 15x$

5. احسبوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.

أ. $y = 2x^2 - 20x$ ب. $y = 3x^2 + 12x$ ت. $y = -6x^2 + 6x$ ث. $y = -6x^2 + 12x$

6. حلّوا المعادلات.

أ. $2x(x - 4) = 0$ ت. $2x^2 - 10x = 0$ ج. $-2x^2 + 10x = 0$

ب. $2x(x + 4) = 0$ ث. $2x^2 + 10x = 0$ ح. $-2x^2 - 10x = 0$

7. حلّوا المعادلات.

أ. $4x^2 - 10x = 0$ ت. $6x^2 - 3x = 0$ ج. $12x - 6x^2 = 0$

ب. $4x^2 + 10x = 0$ ث. $6x^2 + 3x = 0$ ح. $-12x - 6x^2 = 0$

8. رُسم، في هيئة المحاور، الخطّان البيانيّان للدالّتين:

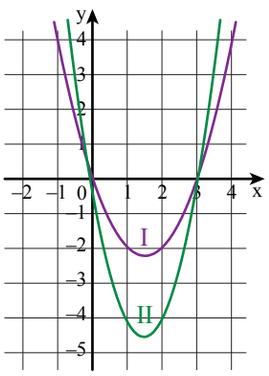
$y = 2x^2 - 6x$

$y = x^2 - 3x$

أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

ب. جدوا دالّتين إضافيّتين لها النقاط الصفريّة نفسها.

ت. كم دالّة كهذه وجدتم؟ اشرحوا.



الدرس الثالث: العائلة $a \neq 0, y = ax^2 + bx$ (تكملة)

معطى الدالّتان التربيعيّتان $y = 2x^2 - 8x$ $y = x^2 - 4x$

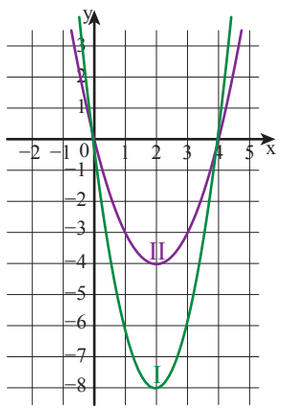
قال **جواد**: الدالّتان لهما النقاط الصفريّة نفسها ومحور التماثل نفسه.

هل قول **جواد** صحيح؟

نجد محور التماثل والرأس للقطوع المكافئة من العائلة $a \neq 0 , y = ax^2 + bx$.

1. نتطرّق إلى الدوالّ الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أمامكم الخطّان البيانيّان للدالّتين $y = 2x^2 - 8x$ $y = x^2 - 4x$



أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

ب. ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $y = 2x^2 - 8x$؟

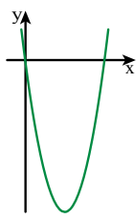
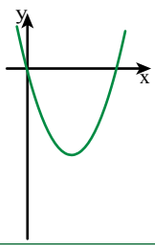
ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $y = x^2 - 4x$؟

ت. ما هو محور تماثل كلّ قَطْع مكافئ؟

ث. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس للدالّة $y = 2x^2 - 8x$؟

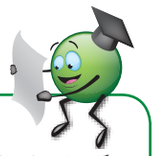
ما هما إحداثيّا نقطة الرأس للدالّة $y = x^2 - 4x$؟

ج. أكملوا **بطاقة هُويّة** كلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدالّة	$y = 2x^2 - 8x$	$y = x^2 - 4x$
رسمة تقريبيّة*		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)		
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$		

* **الرسمة التقريبيّة** هي رسمة **الخطّ البيانيّ للدالّة بالتقريب** في هيئة محاور غير مقسّمة إلى تربيعات أو إلى إشارات تقسيم.

2. قال **زياد:** القَطْع المكافئ هو شكل متماثل؛ لذا يمرّ محور التماثل عبر نقطة المنتصف بين النقطتين الصفريّتين.
هل قول **زياد** صحيح؟ اشرحوا.



يمكن إيجاد **النقاط الصفريّة** للدالّة التربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx$, $a \neq 0$ بطرق مختلفة.

مثال: نجد بواسطة جدول، رسم بيانيّ أو بطريقة جبريّة النقطتين الصفريّتين (0, 0) وَ (4, 0) للدالّة

$y = 2x^2 - 8x$.

بجدول

x	–2	–1	0	1	2	3	4	4
$2x^2 - 8x$	24	10	0	–6	–8	–6	0	0

بطريقة جبريّة

نحلّ المعادلة $2x^2 - 8x = 0$

نحلّل إلى عوامل $2x(x - 4) = 0$

هذا يعني أنّ: $2x = 0$ أو $x - 4 = 0$

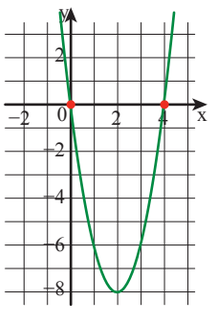
من هنا ينتج أنّ: $x = 0$ أو $x = 4$

يمرّ **محور تماثل** القَطْع المكافئ عبر نقطة المنتصف بين **نقطتين صفريّتين.**

نستنتج من الطرق الثلاث أن **محور تماثل** هو $x = 2$.

بشكل عام: محور التماثل لدالّة تربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$ هو $x = \frac{-b}{2a}$.

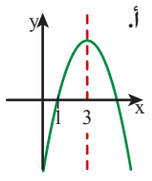
بطريقة بيانيّة

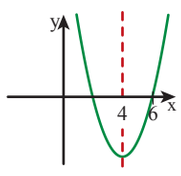


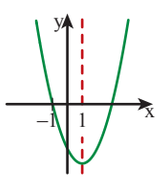
3. جدوا، في كلّ بند، محور التماثل للقَطْع المكافئ (احسبوا، في البداية، إحداثيّات النقاط الصفريّة).

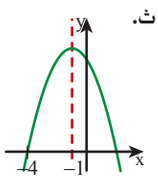
أ. $y = x^2 + 8x$ ب. $y = -x^2 + 8x$ ت. $y = 2x^2 + 8x$ ث. $y = 2x^2 - 8x$

4. معطى، في كلّ بند، نقطة تقاطع واحدة مع محور x ومحور التماثل.
(الخطّ المتقطع هو خطّ التماثل).
جدوا إحداثيْ نقطة التقاطع الثانية مع محور x.

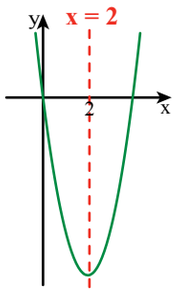
أ.


ب.


ت.


ث.


إحداثيّا نقطة الرأس



5. قالت **مريم:** أردت أن أجد إحداثيّا نقطة رأس الدالّة $y = 4x^2 - 16x$.

قالت **مريم:** معطى أنّ محور تماثل الدالّة هو $x = 2$.

تقع نقطة الرأس على محور التماثل؛ لذا لإيجاد إحداثيّا نقطة الرأس نعوّض $x = 2$ في الدالّة.

ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة $y = 4x^2 - 16x$؟

تقع **نقطة رأس** القَطْع المكافئ على محور التماثل.

هذا يعني أنّنا نجد الإحداثيّ x للرأس بمساعدة محور التماثل.

لإيجاد الإحداثيّ y للرأس نعوّض الإحداثي x للرأس، ونحسب.

مثال: إذا عرفنا أنّ محور تماثل الدالّة $y = 2x^2 - 12x$ هو $x = 3$

نعوّض في الدالّة $x = 3$ ونحصل على $y = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3$

هذا يعني أنّ $y = -18$؛ لذا إحداثيّا نقطة الرأس هما: $(3 , -18)$

بشكل عام: الإحداثيّ x **لنقطة رأس** الدالّة التربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$

هو $x = \frac{-b}{2a}$.

6. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّا نقطة الرأس للقَطْع المكافئ (جدوا، في البداية، محور التماثل).

أ. $y = x^2 + 10x$ ب. $y = -x^2 + 10x$ ت. $y = 2x^2 + 8x$ ث. $y = 2x^2 - 8x$

مجموعة مهامّ

1. مُعطاة الدالّة $y = 2x^2 - 16x$

أ. ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة (نقاط التقاطع مع محور x)؟

ب. ما هو محور التماثل؟

ت. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

2. مُعطاة الدالّة $y = -3x^2 + 12x$

أ. ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة (نقاط التقاطع مع محور x)؟

ب. ما هو محور التماثل؟

ت. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

3. مُعطاة الدالّة $y = x^2 - 4x$

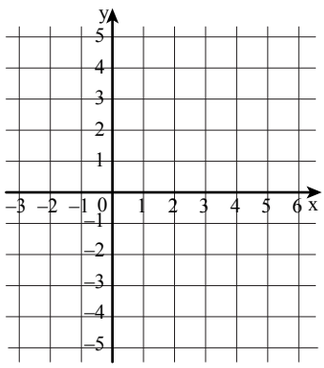
أ. ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور x (النقاط الصفريّة)؟

ب. ما هو محور التماثل؟

ت. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

ث. أكملوا الجدول.

x	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 4x$							



ج. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة.

ح. في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟

خ. في أيّ مجال الدالّة تنازليّة؟

4. مُعطاة الدالّة $y = -x^2 + 6x$

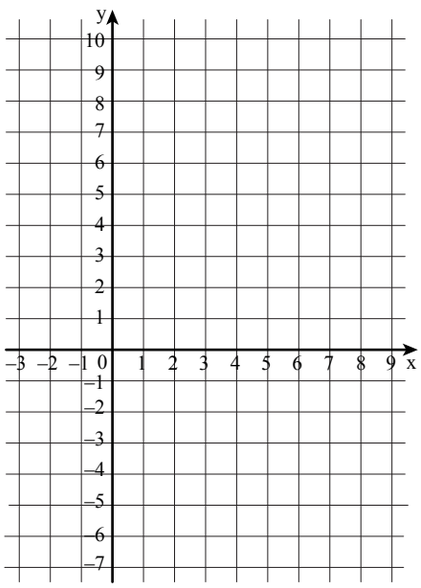
أ. ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور x (النقاط الصفريّة)؟

ب. ما هو محور التماثل؟

ت. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

ث. أكملوا الجدول.

x	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = -x^2 + 6x$									



ج. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة.

ح. في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟

خ. في أيّ مجال الدالّة تنازليّة؟

5. أكملوا **بطاقة هُويّة** الدالّة $y = 3x^2 - 12x$

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 3x^2 - 12x$
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّات نقاط التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تصاعديّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة تنازليّة	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

6. أكملوا.

	التمثيل الجبريّ للدّالّة	نقاط التقاطع مع محور x	محور التماثل	إحداثيّا نقطة الرأس	نوع الرأس (صُغرى/عُظمى)
أ.	$y = 4x^2 + 8x$				
ب.	$y = -4x^2 + 8x$				
ت.	$y = 4x^2 - 8x$				
ث.	$y = -4x^2 - 8x$				

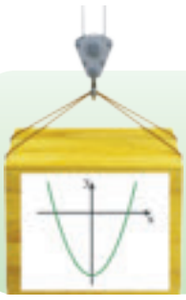
7. أ. ارسموا قَطْعًا مكافئًا محور تماثله $x = 5$ وإحدى نقاطه الصفريّة هي $(0, 0)$.

ب. ارسموا قَطْعًا مكافئًا إضافيًّا كهذا.

ت. كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟

ث. أعطوا مثالًا لقطعين مكافئين من هذا النوع.

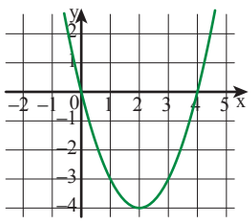
الدرس الرابع: العائلة $a \neq 0, y = ax^2 + bx + c$



بحثنا في الدروس السابقة دوالّ تربيعيّة من العائلة $a \neq 0 , y = ax^2 + bx$
نحرّك الخطوط البيانيّة للدالة مرّة إلى أعلى ومرّة إلى أسفل.

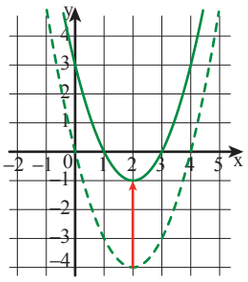
نتعرّف على التمثيلات الجبريّة المناسبة للدوالّ الّتي تمّت إزاحتها ونبحثها.

1. أ. أمامكم الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 - 4x$



- ارسموا محور التماثل، وسجّلوا معادلته.
- ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟
- ما هما إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y؟

ب. حرّكنا القَطْع المكافئ $y = x^2 - 4x$ ثلاث وحدات إلى أعلى.



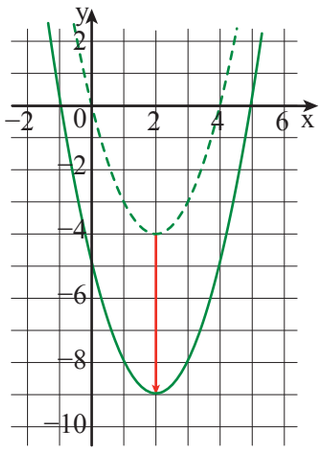
- أمامكم تمثيلات جبريّة، أيّ منها هو التمثيل الجبريّ المناسب للدالّة بعد الإزاحة؟ اشرحوا.

$y = x^2 - 4x + 3$

$y = x^2 - 4x - 3$

- ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة الناتجة؟
- ما هو محور التماثل؟
- ما هما إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y؟

ت. حرّكنا القَطْع المكافئ $y = x^2 - 4x$ خمس وحدات إلى أسفل.



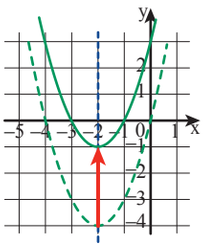
- ما هو التمثيل الجبريّ للدالّة بعد الإزاحة؟
- ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟
- ما هو محور التماثل؟
- ما هما إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y؟

ث. كم وحدة يجب أن نحرّك القطع المكافئ $y = x^2 - 4x$ كي لا يتقاطع مع محور x؟

2. قال **عماد:** الدالتان $y = x^2 + 2x + 3$ وَ $y = x^2 + 2x$ لهما محور التماثل نفسه.
هل قول **عماد** صحيح؟ اشرحوا.

نَتَج الخطّ البيانيّ للدالّة التربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ نتيجة لإزاحة الخطّ البيانيّ للدالّة من العائلة $y = ax^2 + bx$ $a \neq 0$ إلى **أعلى أو إلى أسفل.**

مثال: إذا أزحنا الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 + 4x$ بمقدار **3** وحدات إلى **أعلى** نحصل على الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 + 4x + 3$



- يمرّ **محور التماثل** للدالّة $y = x^2 + 4x$ عبر نقطة المنتصف بين النقطتين الصفريّتين.
  النقطتان الصفريّتان للدالّة $y = x^2 + 4x$ هما: $(0, 0)$, $(-4, 0)$
  لذا؛ محور التماثل هو $x = -2$.
  محور التماثل للدالّة $y = x^2 + 4x + 3$ كمحور التماثل للدالّة $y = x^2 + 4x$
  لذا؛ فهو يساوي $x = -2$ أيضًا.
- يقع **رأس القَطْع المكافئ** للدالّة $y = x^2 + 4x$ على محور التماثل وإحداثيّاه هما $(-4 , -2)$، يقع رأس القَطْع المكافئ للدالّة $y = x^2 + 4x + 3$ على محور التماثل نفسه، أزحناه 3 وحدات إلى أعلى؛ لذا إحداثيّاه هما $(-2, -1)$.
- **نقطة تقاطع القطع المكافئ** $y = x^2 + 4x$ مع محور y هي $(0, 0)$
  نقطة تقاطع القَطْع المكافئ بعد الإزاحة $y = x^2 + 4x + 3$ هي $(0, 3)$ ، لأنّنا أزحنا القَطْع المكافئ **3** وحدات **إلى أعلى.**

يمكن إيجاد إحداثيّا نقطة تقاطع القَطْع المكافئ مع محور y بواسطة تعويض $x = 0$ في التمثيل الجبريّ للدالّة.
هذا يعني أنّه لإيجاد نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 + 4x + 3$ مع محور y نعوّض $x = 0$ ونحصل على $y = 3$.

بشكل عام: محور التماثل للدالّة التربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
هو $x = \frac{-b}{2a}$ ؛ لذا الإحداثيّ x **لرأس القطع المكافئ** هو $\frac{-b}{2a}$.

3. مُعطاة الدالّة $y = x^2 - 2x$

أ. ما هو محور التماثل؟

ب. أزحنا الخطّ البيانيّ للدالّة المُعطاة إلى أعلى أو إلى أسفل.
أكملوا الجدول.

مثال:

إزاحة الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2 - 2x$	الدّالّة	محور التماثل	إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y
5 وحدات إلى أعلى	$y = x^2 - 2x + 5$	$x = 1$	$(0, 5)$
5 وحدات إلى أسفل			
3 وحدات إلى أعلى			
2 وحدات إلى أسفل			

4. حدّدوا في كلّ بند "صحيح" أو "غير صحيح". اِشرحوا.

أ. محور التماثل للخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 - 4x + 1$ هو $x = 2$.

ب. محور التماثل للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 3x^2 + 6x + 4$ هو $x = 1$.

ت. الدالتان $y = x^2 + 2x - 1$ وَ $y = x^2 + 2x + 4$ لهما محور التماثل نفسه.

ث. الدالتان $y = 2x^2 + 4x + 1$ وَ $y = 4x^2 + 2x - 1$ لهما محور التماثل نفسه.

ج. الدالتان $y = 2x^2 - 6x$ وَ $y = 12x - 4x^2$ لهما محور التماثل نفسه.

ح. الدالتان $y = -x^2 + 4x + 2$ وَ $y = x^2 - 4x - 8$ لهما محور التماثل نفسه.

مجموعة مهامّ

1. مُعطاة الدالّة $y = -x^2 + 8x$

أ. ما هو محور التماثل؟

ب. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

ت. من أيّ إزاحة للخطّ البيانيّ للدالّة المُعطاة نحصل على الدالّة $y = -x^2 + 8x + 5$؟

ث. ما هو محور تماثل الدالّة بعد الإزاحة؟ ما هما إحداثيّا نقطة رأسها؟

ج. ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع كلّ دالّة مع محور y؟

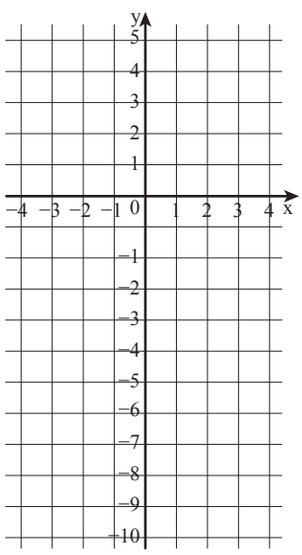
2. مُعطاة الدالّة $y = x^2 - 2x - 8$

أ. ما هو محور التماثل؟ (جدوا، في البداية، النقاط الصفريّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 - 2x$.)

ب. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟ هل هي نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟

ت. أكملوا الجدول.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 2x - 8$							



ث. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا القَطْع المكافئ.

ج. جدوا حسب الرسم البيانيّ:

- ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة؟
- في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟
- في أيّ مجال الدالّة تنازليّة؟
- في أيّ قيم x قيم الدالّة موجبة؟
- في أيّ قيم x قيم الدالّة سالبة؟

3. مُعطاة الدالّة $y = -x^2 + 4x + 5$

أ. ما هو محور التماثل؟

ب. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟ هل هي نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟

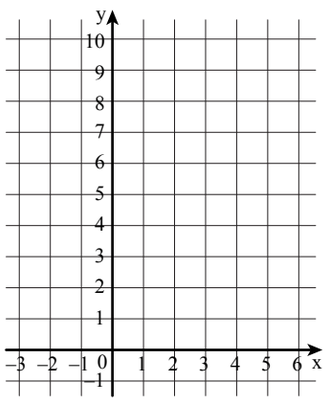
ت. أكملوا الجدول.

x	–1	0	1	2	3	4	5
$y = -x^2 + 4x + 5$							

ث. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا القَطْع المكافئ.

ج. جدوا حسب الرسم البيانيّ:

- ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة؟
- في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟
- في أيّ مجال الدالّة تنازليّة؟
- في أيّ قيم x قيم الدالّة موجبة؟
- في أيّ قيم x قيم الدالّة سالبة؟



4. صِلوا بين كلّ دالّة ومحور تماثلها.

أ. $y = x^2 + 3x$	• $x = 1$
ب. $y = 2x^2 + 4x$	•
ت. $y = 4x^2 - 12x$	• $x = 1.5$
ث. $y = -2x^2 + 4x$	•
ج. $y = 4x^2 + 8$	• $x = 0$
ح. $y = 3x^2 + 6x$	•
خ. $y = x^2 + 3x - 2$	• $x = -1$
د. $y = x^2 - 3x$	•
ذ. $y = x^2 + 2x + 1$	• $x = -1.5$
ر. $y = -6x^2 + 12$	•

5. مُعطاة الدالّة $y = 2x^2 - 16x + 14$

أ. ما هما إحداثيّا نقطة تقاطع الدالّة مع محور y؟

ب. ما هو محور تماثل الدالّة؟

ت. ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة؟

هل هي نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟

6. حدّدوا في كلّ بند "صحيح" أو "غير صحيح".

أ. نقطة تقاطع الدالّة $y = x^2 + 2x - 3$ مع محور y هي $(0, -3)$.

ب. نقطة تقاطع الدالّة $y = 3x^2 - 6x + 4$ مع محور y هي $(4, 0)$.

ت. الدالتان $y = 2x^2 + 6x - 1$ وَ $y = x^2 - x - 1$ تتقاطعان مع محور y في النقطة نفسها.

7. أمامكم الخطوط البيانيّة للدوالّ:

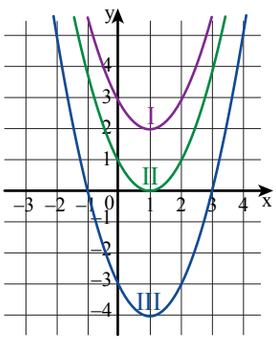
$y = x^2 - 2x + 1$

$y = x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 - 2x - 3$

لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

اشرحوا كيف تمّت الملاءمة؟



8. أمامكم الخطوط البيانيّة للدوالّ:

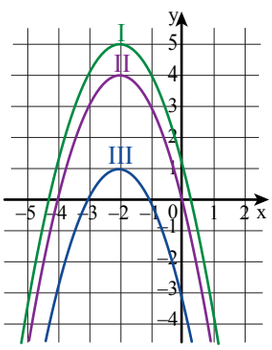
$y = -x^2 - 4x$

$y = -x^2 - 4x - 3$

$y = -x^2 - 4x + 1$

لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

اشرحوا كيف تمّت الملاءمة؟



9. سجّلوا، في كلّ بند، دالّة تربيعيّة مناسبة، وارسموا رسمة تقريبيّة.

أ. يوجد للدالّة نقطة رأس صُغرى، ولا توجد لها نقاط تقاطع مع محور x.

ب. يوجد للدالّة نقطة رأس عُظمى، ونقطة مشتركة واحدة مع محور x.

ت. يوجد للدالّة نقطتا تقاطع مع محور x.

الدرس الخامس: مسائل كلاميّة ونقاط النهاية الصُغرى والعُظمى

مَهمّة في التنوّر الرياضيّ

نبني مستطيلات مختلفة من حبل طوله 20 سم.
مثلًا: المستطيلات التالية:
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح)
مُعطى طول أحد أضلاع المستطيل، احسبوا لكلّ مستطيل:
أ. طول الضلع المجاور.
ب. مساحة المستطيل.

نحلّ مسائل كلاميّة، ونجد القيم العظمى والصغرى للتعابير المربّعة.

نتطرّق في المهامّ 1 - 5 إلى المُعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. اقترحوا قياسات مناسبة لأطوال أضلاع المستطيلات الّتي يمكن أن نبنيها من حبل طوله 20 سم.

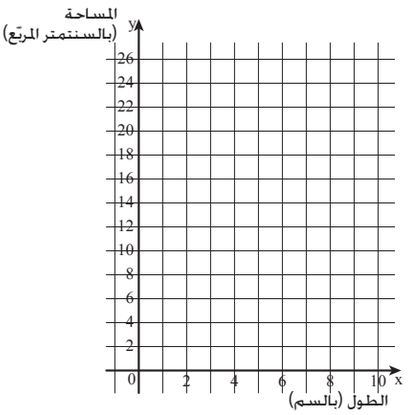
2. حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن أن يكون طول أحد أضلاع المستطيل مساوٍ للطول المسجّل؟ اشرحوا.
أ. 5 سم ب. 10 سم ت. 1 سم ث. 5.5 سم ج. 12 سم

3. نرمز بـ x (سم) إلى طول أحد أضلاع المستطيل.
أ. قالت **منار:** طول الضلع الآخر للمستطيل $(x - 10)$ سم.
هل قول **منار** صحيح؟ اشرحوا.
ب. أيّ قِيَم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
ت. اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة المستطيل.

4. تصف الدالة $y = -x^2 + 10x$ مساحة المستطيل y (بالسنتمترات المربّعة).
أ. أكملوا الجدول.

x طول الضلع (بالسم)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y مساحة المستطيل (بالسنتمتر المربّع)											

ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة.



ت. ما هو محور تماثل الدالّة؟
ث. ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة؟ هل هي نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟
ج. اقرأوا من الرسم البيانيّ:
إذا كان $x = 2$، فما هي مساحة المستطيل؟
إذا كانت مساحة المستطيل 21 سنتمترًا مربّعًا، فما هو طول ضلع المستطيل (x)؟
ح. كم يجب أن يكون طول ضلع المستطيل (x) كي تكون مساحة المستطيل عظمى؟ ماذا نسمّي هذا المستطيل؟

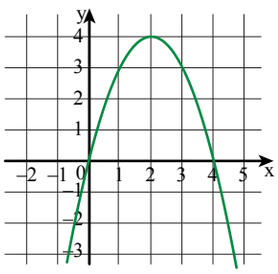
نفكّر بـ ...

5. أ. في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟

ب. في أيّ مجال الدالّة تنازليّة؟

ت. ما معنى المجال التصاعديّ والتنازليّ في مَهمّة الافتتاحيّة؟

6. أمامكم الخطّ البياني للدالّة $y = -x^2 + 4x$.



حلّوا المعادلات التالية بمساعدة الرسم البيانيّ.

أ. $-x^2 + 4x = 0$

ب. $-x^2 + 4x = 3$

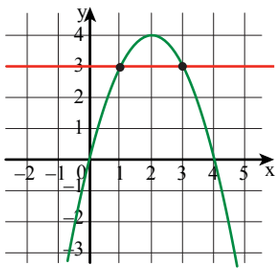
ت. $-x^2 + 4x = 5$

للتذكير

- الخطّ البيانيّ للدالّة التربيعيّة من العائلة $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$ هو **قَطْع مكافئ**.

إذا كان $a > 0$ فإنّ نقطة رأس القَطْع المكافئ **صغرى**، إذا كان $a < 0$ فإنّ نقطة رأس القَطْع المكافئ **عظمى**.

مثال: الخطّ البيانيّ للدالّة $y = -x^2 + 4x$ في المهمّة 6 له نقطة رأس **عظمى**.



- يمكن حلّ المعادلة $-x^2 + 4x = 3$ **بطريقة بيانيّة.**

نرسم، في هيئة المحاور نفسها، القَطْع المكافئ للدالّة $y = -x^2 + 4x$ والمستقيم للدالّة $y = 3$.

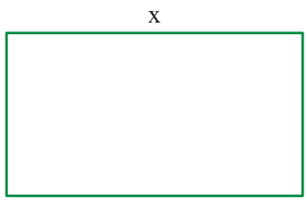
حلول المعادلة هي إحداثيّات x لنقاط تقاطع القَطْع المكافئ والمستقيم $(x = 3$ أو $x = 1)$.

مجموعة مهامّ

1. مُعطى محيط ملعب مستطيل الشكل 40 مترًا.

طول أحد أضلاع المستطيل x أمتار.

(أُعِدّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالأمتار).



أ. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لطول الضلع الثاني (بالأمتار).

ب. أيّ قِيَم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ت. الدالّة الّتي تصف مساحة المستطيل y (بالأمتار المربّعة) هي $y = -x^2 + 20x$. افحصوا.

ث. ما هو محور تماثل الخطّ البيانيّ للدالّة $y = -x^2 + 20x$؟

ج. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟ هل هي صغرى أم عظمى؟

2. مُعطى محيط مستطيل 24 سم.

نرمز بـ x إلى طول أحد أضلاع المستطيل (بالسم)، ونرمز بـ y إلى مساحة المستطيل (بالسنتمتر المربّع).

أ. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لطول الضلع الثاني للمستطيل (بالسم).

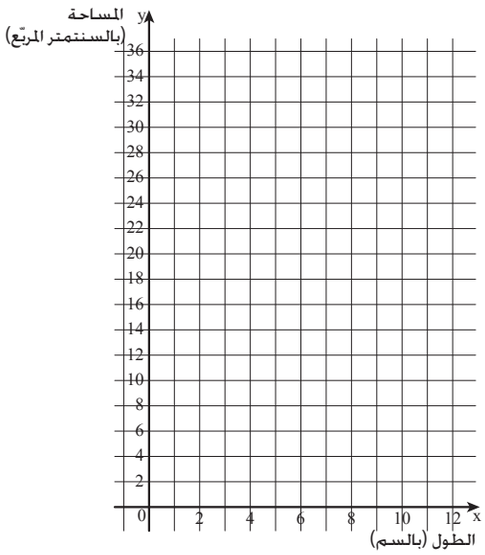
ب. أيّ قِيَم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ت. تصف الدالّة $y = -x^2 + 12x$ مساحة المستطيل y (بالسنتمتر المربّع).

أكملوا الجدول.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y													

ث. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة.



ج. ما هو محور تماثل الدالّة؟

ح. ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة؟ هل هي نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟

خ. اقرأوا من الرسم البيانيّ:

- إذا كان $x = 10$ سم ،
  فما هي مساحة المستطيل؟
- إذا كانت مساحة المستطيل 32 سنتمترًا مربّعًا،
  فما هو طول ضلع المستطيل (x)؟

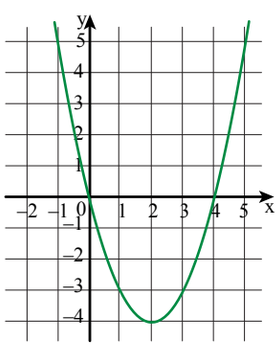
د. كم يجب أن يكون طول ضلع المستطيل (x)
كي تكون مساحة المستطيل عظمى؟ ماذا نسمّي هذا المستطيل؟

3. أمامكم الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 - 4x$.

حلّوا المعادلات التالية بمساعدة الرسم البيانيّ.

أ. $x^2 - 4x = 0$ ت. $x^2 - 4x = -3$

ب. $x^2 - 4x = 5$ ث. $x^2 - 4x = -4$



4. معطى عددان، أحدهما أكبر من الآخر بـ 8.

نضرب العددين ببعضهما.

ما هما العددان إذا كان حاصل الضرب الأصغر؟

مجموعة مهامّ

الدالّة الخطّيّة

1. نملئ بركتين بالماء.

يصف المستقيمان، في هيئة المحاور، التغيّرات في حجم الماء في كلّ بركة.

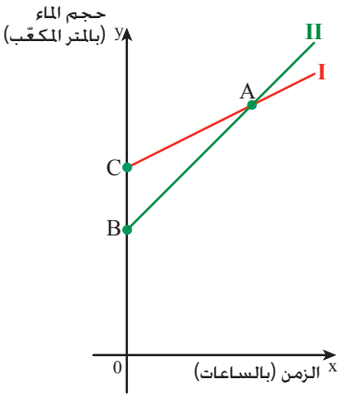
أ. أيّ مستقيم يصف بركة تمتلئ بوتيرة أسرع من الأخرى؟ اشرحوا.

ب. التمثيلان الجبريّان للمستقيمين هما:

$$y = 100x + 200$$

$$y = 50x + 300$$

لائموا كلّ تمثيل جبريّ للمستقيم المناسب.



ت. كم مترًا مكعّبًا من الماء يدخل البركة في الساعة الواحدة؟

ث. ما هما إحداثيّا النقطة B؟

ما معنى هذه النقطة؟

ج. ما هما إحداثيّا النقطة C؟

ما معنى هذه النقطة؟

ح. يتقاطع المستقيمان في النقطة A. جدوا إحداثيّيها.

ما معنى النقطة A الّتي وجدتموها؟

2. يصف كلّ مستقيم، في هيئة المحاور، التغيّرات في حجم الماء في كلّ بركة.

أ. أيّ مستقيم يصف بركة تمتلئ؟

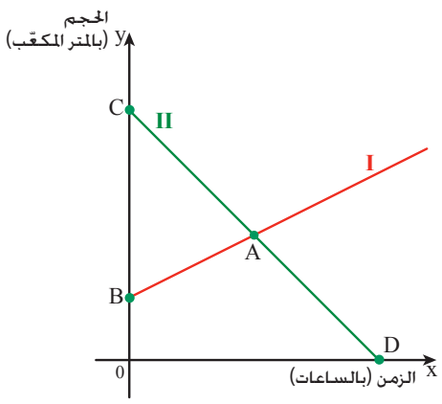
أيّ مستقيم يصف بركة تفرغ؟

ب. التمثيلان الجبريّان للمستقيمين هما:

$$100x + y = 400$$

$$y = 50x + 100$$

لائموا كلّ تمثيل جبريّ للمستقيم المناسب.



ت. ما هما إحداثيّا النقطة B؟

ما معنى هذه النقطة؟

ث. ما هما إحداثيّا النقطة C؟

ما معنى هذه النقطة؟

ج. يتقاطع المستقيمان في النقطة A. جدوا إحداثيّيها.

ما معنى هذه النقطة؟

ح. جدوا إحداثيْ النقطة D.

ما معنى هذه النقطة؟