الوحدة السابعة والعشرون: التعميم والتعليل الجبريّ

الدرس الأوّل: متواليات أعداد

أمامكم متوالية مبانٍ من دوائر.

كم نقطة توجد في المبنى الثاني؟

كم نقطة توجد في المبنى الثالث؟

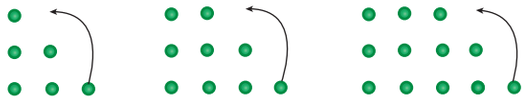
خمّنوا: كم نقطة توجد في المبنى الرابع؟

ارسموا الشكل في المبنى الرابع.

نبحث صفات متواليات أعداد.

نتطرّق في المهمّتين 1 وَ 2 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أزاح **رائد** نقطة واحدة في كلّ مبنى، وَحَسَبَ عدد النقاط في كلّ مبنى كالتالي:



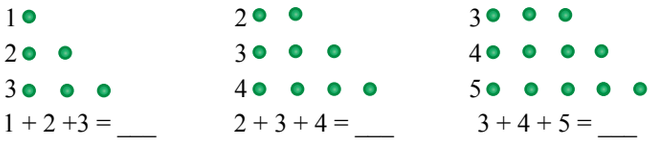
أ. أكملوا عدد النقاط في كلّ مبنى بطريقة **رائد**.

ب. احسبوا بطريقة **رائد** عدد النقاط في المبنى **الرابع**.

احسبوا عدد النقاط في المبنى **الخامس**.

ت. استعينوا بطريقة **رائد**، واكتبوا تعبيرًا لعدد النقاط في المبنى n في المتوالية.

2. جَمَع **عماد** عدد النقاط في كلّ سطر، وحسب عدد النقاط في كلّ مبنى كالتالي:



أ. أكملوا عدد النقاط في كلّ مبنى بطريقة **عماد**.

ب. احسبوا بطريقة **عماد** عدد النقاط في المبنى **الرابع**.

احسبوا عدد النقاط في المبنى **الخامس**.

ت. استعينوا بطريقة **عماد**، واكتبوا تعبيرًا لعدد النقاط في المبنى n في المتوالية.

3. أ. سجّلوا متواليات بحيث يكون في كلّ منها ثلاثة أعداد متتالية صحيحة، واحسبوا مجموع كلّ ثلاثة أعداد.

مثال: 9 + 10 + 11 = 30

ب. قال **ضرار**: مجموع ثلاثة أعداد متتالية هو 3 أضعاف العدد الأوسط.

هل قول **ضرار** صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ت. قالت **ليلى**: نرمز إلى الأعداد الثلاثة المتتالية كالتالي: $x - 1$, x , $x + 1$

بيّنوا بطريقة **ليلى** أنّ مجموع ثلاثة أعداد متتالية هو 3 أضعاف العدد الأوسط.

ث. مجموع ثلاثة أعداد متتالية هو 45. ما هي الأعداد الثلاثة؟

ج. قال **جاسر**:في كلّ ثلاثة أعداد متتالية، العدد الأوسط هو المعدّل الحسابي للأعداد الثلاثة.

هل قول **جاسر** صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

مجموعة مهامّ

1. أ. أكملوا.

___ + ___ + ___ = 36

___ + ___ + ___ = 57

ب. أمامكم قائمة أعداد: 72 , 60 , 51 , 35 , 27 , 23

أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمجموع ثلاثة أعداد متتالية؟

اكتبوا الأعداد التي وجدتموها كمجموع ثلاثة أعداد متتالية.

2. أ. اكتبوا متواليتيْ أعداد بحيث يكون في كلّ منها **خمسة أعداد صحيحة متتالية**، واحسبوا مجموع كلّ متوالية.

مثال: 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25

___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ___

___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ___

ب. أكملوا متوالية أعداد مكوّنة من خمسة أعداد صحيحة متتالية.

___ + ___ + ___ + ___ + ___ = 40

___ + ___ + ___ + ___ + ___ = 55

ت. هل يقسم مجموع **خمسة أعداد متتالية** على 5؟ اشرحوا.

ث. صوغوا ادعاءً إضافيًّا حول مجموع خمسة أعداد متتالية. اشرحوا.

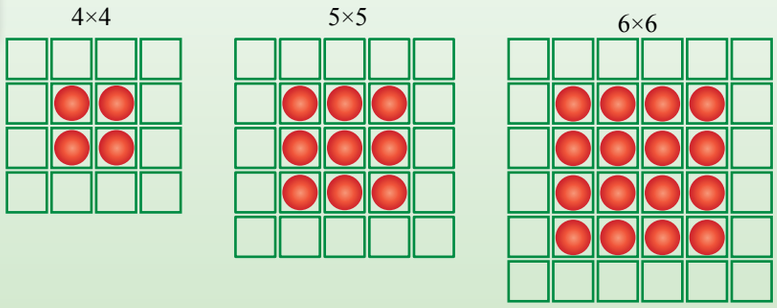
ج. أمامكم قائمة أعداد: 35 54 100 15 21

أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمجموع خمسة أعداد متتالية؟

اكتبوا الأعداد الّتي وجدتموها كمجموع خمسة أعداد متتالية.

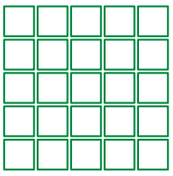
الدرس الثاني: لوحة اللعب

مُعطاة ألواح للعب مربّعة الشكل.



كم دائرة توجد على لوحة للعب قياساتها nxn؟

نفحص العلاقة بين قياسات اللوحة وعدد الدوائر على اللوحة.

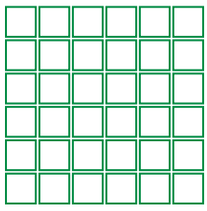


1. مُعطاة لوحة قياساتها 5x5.

أ. كم تربيعة يوجد في اللوحة (فارغة ومليئة)؟

ب. كم دائرة يوجد في اللوحة؟

ت. كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة (تربيعات لا يوجد عليها دوائر)؟

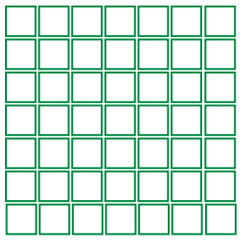


2. مُعطاة لوحة قياساتها 6x6.

أ. كم تربيعة يوجد في اللوحة (فارغة ومليئة)؟

ب. كم دائرة يوجد في اللوحة؟

ت. كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة؟



3. مُعطاة لوحة قياساتها 7x7 (فارغة ومليئة)

أ. كم تربيعة يوجد في اللوحة؟

ب. كم دائرة يوجد في اللوحة؟

ت. كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة؟

4. أ. ما هي قياسات لوحة اللعب إذا كان عدد الدوائر على اللوحة 16؟

ب. ما هي قياسات لوحة اللعب إذا كان عدد الدوائر على اللوحة 36؟

ت. هل يمكن أن تكون لوحة عليها 40 دائرة؟ إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا. إذا كانت الإجابة نعم فما هي قياسات اللوحة؟

5. أ. أشيروا إلى التعبير الّذي يمثّل مجموع التربيعات في لوحة قياساتها nxn.

$4n$ n^2 $2n$ $(n-4)^2$

ب. أشيروا إلى التعبير الّذي يمثّل عدد الدوائر على لوحة قياساتها nxn.

$4n$ $(n-2)^2$ $4(n-2)$ $(n-1)^2$

6. أشيروا إلى التعبير الّذي يمثّل عدد التربيعات الفارغة في لوحة قياساتها nxn.

$4n$ $\quad 4n - 4$ $\quad 4n + 4$ $\quad n^2 - 4n$

7. أ. عدد التربيعات الفارغة في لوحة هو 32. ما هي قياسات لوحة اللعب؟

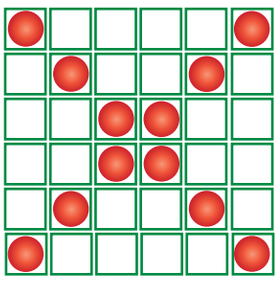
ب. هل يمكن أن تكون لوحة للعب عدد التربيعات الفارغة فيها 30؟

إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا. إذا كانت الإجابة نعم، فما هي قياسات اللوحة؟

مجموعة مهامّ

1. مُعطاة ألواح للعب مربّعة الشكل (طول الأضلاع عدد زوجيّ).

أ. مُعطاة لوحة قياساتها 6x6.

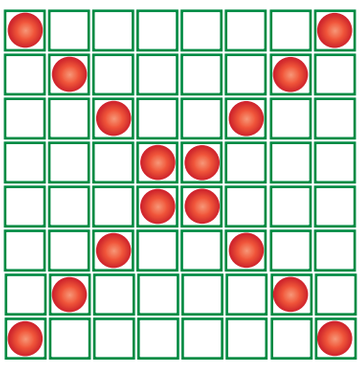


كم تربيعة (مجموع) يوجد في اللوحة؟

كم دائرة يوجد في اللوحة؟

كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة؟

ب. مُعطاة لوحة قياساتها 8x8.



كم تربيعة (مجموع) يوجد في اللوحة؟

كم دائرة يوجد في اللوحة؟

كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة؟

ت. إذا كانت مُعطاة لوحة قياساتها 10x10.

كم تربيعة (مجموع) يوجد في اللوحة؟

كم دائرة يوجد في اللوحة؟

كم تربيعة فارغة يوجد في اللوحة؟

ث. عدد الدوائر في اللوحة هو 20. ما هي قياسات اللوحة؟

ج. عدد الدوائر في اللوحة هو 28. ما هي قياسات اللوحة؟

ح. هل يمكن أن تكون لوحة عليها 19 دائرة؟ إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا. إذا كانت الإجابة نعم فما هي قياسات اللوحة؟

2. نتطرّق إلى لوحات للعب، مربّعة الشكل، عليها دوائر كما وَرَدَ في المهمّة 1.

أ. اختاروا التعابير الّتي تمثّل عدد الدوائر على لوحة قياساتها nxn.

$4 - 4n$ $\quad 2n$ $\quad 2(n - 2) + 4$ $\quad 4 + 4n$

ب. اختاروا التعبير الّذي يمثّل عدد التربيعات الفارغة في لوحة قياساتها nxn.

$n^2 - 2n$ $\quad n^2 - 4n$

ت. عدد التربيعات الفارغة في لوحة هو 120. ما هي قياسات اللوحة؟

ث. هل يمكن أن تكون لوحة عدد تربيعاتها الفارغة هو 53؟ إذا كانت الإجابة نعم فما هي قياسات اللوحة؟ إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

الدرس الثالث: أعداد متتالية

معطى في كلّ إطار زوج مِنَ الأعداد المتتالية الصحيحة.

4 , 5 $5^2 - 4^2 =$	7 , 8 $8^2 - 7^2 =$	10 , 11 $11^2 - 10^2 =$

- احسبوا نتائج التمارين في كلّ إطار.
- خمّنوا: ماذا تكون نتيجة التمرين $101^2 - 100^2$؟

نستعين بالجبر لبحث القانونيّة.

1. نتطرّق إلى التمارين الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. ابنوا أمثلة شبيهة مع أزواج مِنَ الأعداد، حسب اختياركم.

☐ , ☐ $\square^2 - \square^2 =$	☐ , ☐ $\square^2 - \square^2 =$	☐ , ☐ $\square^2 - \square^2 =$

ب. جدوا علاقة بين أزواج الأعداد والفرق بين مربّعاتها.

$x , x + 1$ $(x + 1)^2 - x^2$

ت. تمثّل التعابير في الإطار أزواجًا مِنَ الأعداد والفرق بين مربّعاتها.

بسّطوا الفرق بين المربّعات، وبيّنوا أنّ نتيجة التبسيط تحقّق العلاقة الّتي وجدتموها في بند ب.

ث. أكملوا.

☐ , ☐ $26^2 - 25^2 =$ ☐	☐ , ☐ $\square^2 - \square^2 = 7$	☐ , ☐ $\square^2 - \square^2 = 19$

2. أ. مُعطاة في كلّ إطار ثلاثة أعداد متتالية صحيحة.
حلّوا وقارنوا بين نتائج كلّ زوج من التمارين.

3, 4, 5 4 · 4 = 5 · 3 =	4, 5, 6 5 · 5 = 6 · 4 =	7, 8, 9 8 · 8 = 9 · 7 =

ب. ابنوا أمثلة شبيهة مع ثلاثيّات أعداد، حسب اختياركم.

□, □, □ □ · □ = □ · □ =	□, □, □ □ · □ = □ · □ =	□, □, □ □ · □ = □ · □ =

ت. جدوا العلاقة بين حاصلي الضرب التاليين:
- حاصل ضرب العدد الأوّل والعدد الثالث.
- حاصل ضرب العدد الثاني في نفسه.

ث. تمثّل التعابير في الإطار الأعداد الثلاثة وحاصلي الضرب.
بسّطوا حاصلي الضرب، وبيّنوا أنّ نتائج التبسيط تحقّق العلاقة الّتي وجدتموها في بند ت.

x − 1, x, x + 1
x · x
(x − 1) · (x + 1)

ج. أكملوا.

□, □, □ 16 · 16 = 256 17 · 15 = □	□, □, □ 25 · 25 = 625 26 · 24 = □	□, □, □ 32 · 32 = □ 33 · 31 = 1,023
□, □, □ 12 · 12 = 144 □ · □ = 143	□, □, □ 15 · 15 = 225 □ · □ = 224	□, □, □ □ · □ = 529 22 · 24 = 528

3. مُعطاة في كلّ إطار أربعة أعداد متتالية صحيحة..

أ. حلّوا وقارنوا بين نتائج كلّ زوج مِنَ التمارين.

8, 9, 10, 11 9 · 10 = 8 · 11 =	5, 6, 7, 8 6 · 7 = 5 · 8 =	2, 3, 4, 5 3 · 4 = 2 · 5 =

ب. ابنوا أمثلة شبيهة مع رباعيّات أعداد، حسب اختياركم.

, , , · = · =	, , , · = · =	, , , · = · =

ت. جدوا، بناء على الأمثلة، العلاقة بين حاصلي الضرب التاليين:

- حاصل ضرب العدد الثاني والعدد الثالث.
- حاصل ضرب العدد الأوّل والعدد الرابع.

ث. تمثّل التعابير في الإطار الأعداد الأربعة وحاصلِي الضرب.

x, x + 1, x + 2, x + 3
(x + 1)(x + 2)
x(x + 3)

بسّطوا حاصلي الضرب، وبيّنوا أنّ نتائج التبسيط تحقّق العلاقة.

ج. أكملوا.

, , , 73 · 74 = 5402 72 · 75 =	, , , 110 · 111 = 12,210 · = 12,208

4. مُعطاة الأعداد: 1 , 3 , 5 , 7

يُسمح، في كلّ بند، استعمال كلّ عدد أكثر من مرّة واحدة.

أ. سجّلوا تمرينًا مكوّنًا من 8 مضافات، بحيث يكون المجموع 30.

ب. سجّلوا تمرينًا مكوّنًا من 10 مضافات، بحيث يكون المجموع 30.

ت. هل يمكن أن نسجّل تمرينًا مكوّنًا من 10 مضافات، بحيث يكون المجموع 35؟ اشرحوا.

مجموعة مهامّ

1. أ. مُعطاة في كلّ إطار ثلاثة أعداد متتالية صحيحة.
حلّوا وقارنوا بين نتائج كلّ زوج مِنَ التمارين.

7, 8, 9 7 + 9 = 2 · 8 =	9, 10, 11 9 + 11 = 2 · 10 =	17, 18, 19 17 + 19 = 2 · 18 =

ب. ابنوا أمثلة شبيهة مع ثلاثيّات أعداد، حسب اختياركم.

, , + = 2 · =	, , + = 2 · =

ت. جدوا، بناء على الأمثلة، العلاقة بين:
- مجموع العدد الأوّل والثالث.
- حاصل ضرب العدد الأوسط في ضعفين.

ث. تمثّل التعابير الأعداد الثلاثة، المجموع وحاصل الضرب الّتي تربط بين الأعداد.
بسّطوا المجموع وحاصل الضرب، وبيّنوا أنّ نتائج التبسيط تحقّق العلاقة.

x, x + 1, x + 2
x + x + 2
2(x + 1)

ج. أكملوا.

, , 20 + 22 = 2 · 21 =	101, , 101 + = 204 2 · =	, , 55 · = 108 · 54 =

2. معطى مربّع طول ضلعه x سم ومساحته 50 سنتمترًا مربّعًا.

أ. نصغّر طول أحد أضلاع المربّع بـ 1 سم، ونكبّر طول الضلع المجاور بـ 1 سم، بحيث يَنتُج مستطيل. جدوا مساحة المستطيل دون أن تجدوا طول ضلع المربّع.

ب. نصغّر طول أحد أضلاع المربع بـ 2 سم، ونكبّر طول الضلع المجاور بـ 2 سم، بحيث يَنتُج مستطيل. جدوا مساحة المستطيل دون أن تجدوا طول ضلع المربّع.

ت. نصغّر طول أحد أضلاع المربع بـ a سم، ونكبّر طول الضلع المجاور بـ a سم، بحيث يَنتُج مستطيل. بكم مساحة المربّع أكبر من مساحة المستطيل؟ اشرحوا.

نحافظ على لياقة رياضيّة

معادلات مع كسور جبريّة

1. حلّوا المعادلات.

أ. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=2$ ب. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$ ت. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=3$ ث. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$

2. حلّوا المعادلات.

أ. $\frac{x}{4}+\frac{x-1}{2}=1$ ت. $\frac{x}{3}+\frac{2-3x}{6}=5$ ج. $\frac{x+5}{2}=\frac{4x}{3}$

ب. $\frac{x}{4}+\frac{1-x}{2}=1$ ث. $\frac{3x+2}{8}-\frac{5x}{4}=2$ ح. $\frac{x+3}{5}=\frac{x+1}{4}$

3. معطى، في كلّ بند، معادلة مكوّنة من 5 معادلات.
سجّلوا مجال التعويض في كلّ معادلة، وحلّوا.

أ.
$\frac{3}{x}=1$
$\frac{3}{x+1}=1$
$\frac{3}{x+2}=1$
$\frac{3}{x+3}=1$
$\frac{3}{x+4}=1$

ب.
$\frac{10}{x}=2$
$\frac{10}{x-1}=2$
$\frac{10}{x-2}=2$
$\frac{10}{x-3}=2$
$\frac{10}{x-4}=2$

ت.
$\frac{1}{x-1}=1$
$\frac{2}{x-1}=1$
$\frac{3}{x-2}=1$
$\frac{4}{x-3}=1$
$\frac{5}{x-4}=1$

4. حاولوا أن تصلوا الكنز. يُسمح المرور عبر التربيعات المسجّلة فيها معادلات حلّها 3.
انتبهوا، في جميع المعادلات المقام لا يساوي صفر.

ابدأوا

$\frac{5}{x+2}=1$	$2x-1=5$	$3-\frac{5}{2x-1}=2$	$\frac{9}{2x+3}-1=0$
$3x+1=8$	$2+\frac{6}{4x}=5$	$\frac{3}{2x-3}=0$	$3-\frac{2x+3}{3}=0$
$\frac{9-2x}{3}+2=5$		$15-\frac{x+1}{4}=16$	$\frac{x-3}{8}=0$
$\frac{3-2x}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4x+3}=1$	$15-\frac{x+1}{4}=14$	$2-\frac{3(x+2)}{5}=-1$