

יחידה 27: הכללות והנמקות

שיעור 1. סדרות של מספרים



בסדרה שלפניכם מבנים מנקודות.

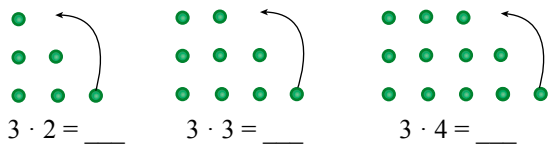


כמה נקודות במקום השני?
כמה נקודות במקום השלישי?
שערו: כמה נקודות במקום הרביעי?
שרטטו את הצורה שבמקום הרביעי.

נחקור תכונות של סדרת מספרים עוקבים.

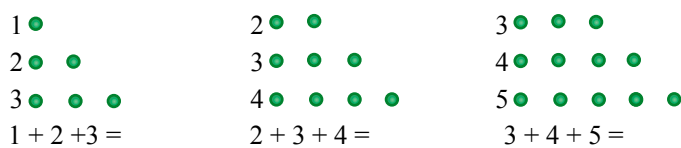
במשימות 1 ו-2 נתייחס למבנים מנקודות ממשימת הפתיחה.

1. שושי הזיזה נקודה בכל מבנה, וחישבה את מספר הנקודות בכל מבנה כך:



- א. השלימו את מספר הנקודות בכל מבנה בדרך של **שושי**.
ב. חשבו בדרך של **שושי** את מספר הנקודות במבנה שבמקום הרביעי.
חשבו את מספר הנקודות במבנה שבמקום החמישי.
ג. היעזרו בדרך של **שושי** וכתבו ביטוי למספר הנקודות במבנה שבמקום ה-n בסדרה.

2. תמי חיברה את מספר הנקודות בכל שורה, וחישבה את מספר הנקודות בכל מבנה, כך:



- א. השלימו את מספר הנקודות בכל מבנה בדרך של **תמי**.
ב. חשבו בדרך של **תמי** את מספר הנקודות במבנה שבמקום הרביעי.
חשבו את מספר הנקודות במבנה שבמקום החמישי.
ג. היעזרו בדרך של **תמי** וכתבו ביטוי למספר הנקודות במבנה שבמקום ה-n בסדרה.

3. א. קְשִׁמו סדרות של שלושה מספרים עוקבים שלמים וחשבו את הסכום של כל שלשה.

$$9 + 10 + 11 = 30 \quad \text{זלזל:}$$

ב. **דבורה** אמרה: הסכום של שלושה מספרים עוקבים הוא פי 3 מהמספר האמצעי.

האם **דבורה** צודקת? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

ג. **ציפי** אמרה: נסמן את שלושת המספרים העוקבים כך: $x - 1$, x , $x + 1$

הראו בדרך של **ציפי** כי סכום שלושה מספרים עוקבים הוא פי 3 מהמספר האמצעי.

ד. הסכום של שלושה מספרים עוקבים הוא 45. מהם שלושת המספרים?

ה. **שפרה** אמרה: בכל שלשה של מספרים עוקבים, המספר האמצעי הוא הממוצע החשבוני של שלושת המספרים.

האם **שפרה** צודקת? אם כן, הסבירו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.



אוסף משימות



1. א. השלימו. $___ + ___ + ___ = 36$

$$___ + ___ + ___ = 57$$

ב. נתונים המספרים הבאים: 23, 27, 35, 51, 60, 72

סִמְנו את המספרים שאפשר לכתוב כסכום של שלושה מספרים עוקבים.

כִּתְבו את המספרים שסימנתם כסכום של שלושה מספרים עוקבים.



2. א. קְשִׁמו שתי סדרות של חמישה מספרים שלמים עוקבים וחשבו את הסכום של כל חמישייה.

$$___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ___$$

$$___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ___$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 \quad \text{זלזל:}$$

ב. השלימו סדרה של חמישה מספרים שלמים עוקבים.

$$___ + ___ + ___ + ___ + ___ = 40$$

$$___ + ___ + ___ + ___ + ___ = 55$$

ג. האם סכום של חמישה מספרים עוקבים מתחלק ב-5? הסבירו.

ד. נִסְחו טענה נוספת אודות סכום של חמישה מספרים עוקבים. הסבירו.

ה. לפניכם רשימה של מספרים 21, 15, 100, 54, 35

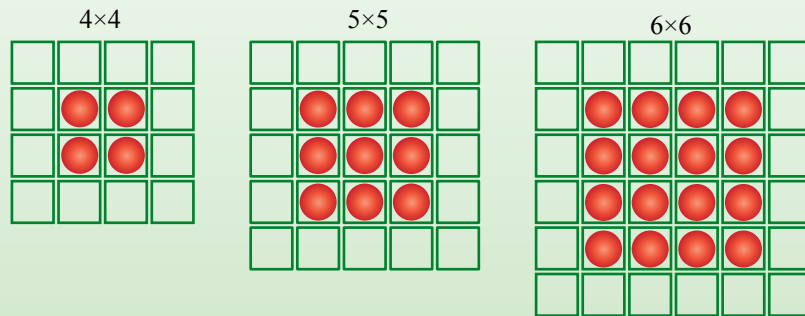
סִמְנו את המספרים שאפשר לכתוב כסכום של חמישה מספרים עוקבים.

כִּתְבו את המספרים שסימנתם כסכום של חמישה מספרים עוקבים.

שיעור 2. לוח משחק

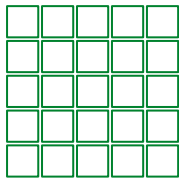


נתונים לוחות משחק ריבועיים.



כמה עיגולים על לוח משחק שגודלו $n \times n$?

נבדוק את הקשר בין גודל הלוח למספר העיגולים על הלוח.

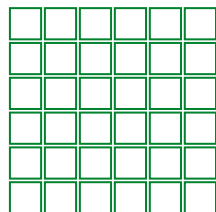


1. נתון לוח שגודלו 5×5

א. כמה משבצות בלוח (ריקות ומלאות)?

ב. כמה עיגולים בלוח?

ג. כמה משבצות ריקות בלוח (משבצות שאין עליהן עיגולים)?

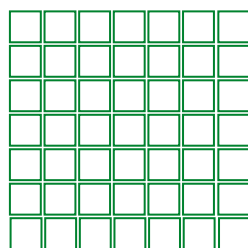


2. נתון לוח שגודלו 6×6

א. כמה משבצות בלוח (ריקות ומלאות)?

ב. כמה עיגולים בלוח?

ג. כמה משבצות ריקות בלוח?



3. נתון לוח שגודלו 7×7 (ריקות ומלאות)

א. כמה משבצות בלוח?

ב. כמה עיגולים בלוח?

ג. כמה משבצות ריקות בלוח?

4. א. מהם ממדי לוח המשחק אם מספר העיגולים בלוח הוא 16?

ב. מהם ממדי לוח המשחק אם מספר העיגולים בלוח הוא 36?

ג. האם ייתכן לוח עם 40 עיגולים? אם לא, הסבירו. אם כן, מהן מידות הלוח?

5. א. סמנו את הביטוי המייצג את סך-כל המשבצות בלוח שגודלו $n \times n$.

$$(n - 4)^2 \quad 2n \quad n^2 \quad 4n$$

ב. סמנו את הביטוי המייצג מספר העיגולים על לוח שגודלו $n \times n$.

$$(n - 1)^2 \quad 4(n - 2) \quad (n - 2)^2 \quad 4n$$

6. סמנו את הביטוי המייצג את מספר המשבצות הריקות בלוח שגודלו $n \times n$.

$4n$ $4n - 4$ $4n + 4$ $n^2 - 4n$

7. א. מספר המשבצות הריקות בלוח הוא 32. מהם ממדי הלוח המשחק?

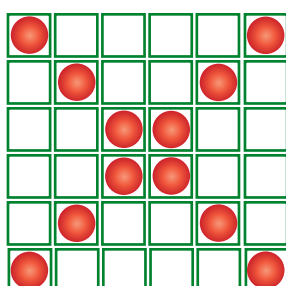
ב. האם ייתכן לוח משחק שמספר המשבצות הריקות בו הוא 30?
אם לא, הסבירו. אם כן, מהן מידות הלוח?



אוסף משימות



1. נתונים לוחות משחק ריבועיים (אורך הצלעות הוא מספר זוגי).



א. נתון לוח שגודלו 6×6 .

כמה משבצות (בסך-הכול) בלוח?

כמה עיגולים בלוח?

כמה משבצות ריקות בלוח?

ב. נתון לוח שגודלו 8×8 .

כמה משבצות (בסך-הכול) בלוח?

כמה עיגולים בלוח?

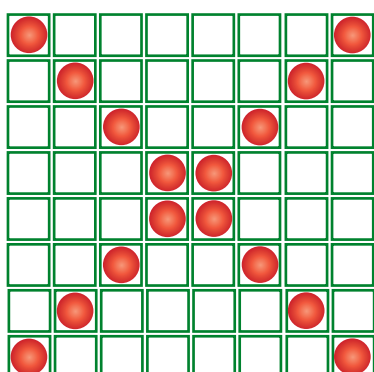
כמה משבצות ריקות בלוח?

ג. נתון לוח שגודלו 10×10 .

כמה משבצות (בסך-הכול) בלוח?

כמה עיגולים בלוח?

כמה משבצות ריקות בלוח?



ד. מספר העיגולים בלוח הוא 20. מהם ממדי הלוח?

ה. מספר העיגולים בלוח הוא 28. מהם ממדי לוח?

ו. האם ייתכן לוח משחק עם 19 עיגולים? אם כן, מהן מידות הלוח? אם לא, הסבירו.



2. נתייחס ללוחות משחק ריבועיים עם מבנה של עיגולים כמו במשימה 1.

א. בחרו את הביטויים המייצגים את מספר העיגולים בלוח שגודלו $n \times n$.

$4 - 4n$ $2n$ $2(n - 2) + 4$ $4 + 4n$

ב. בחרו את הביטוי המייצג את מספר המשבצות הריקות בלוח שגודלו $n \times n$.

$n^2 - 2n$ $n^2 - 4n$

ג. מספר המשבצות הריקות בלוח הוא 120. מהם ממדי הלוח?

ד. האם ייתכן לוח שמספר המשבצות הריקות בו הוא 53? אם כן, מהן מידות הלוח? אם לא, הסבירו.

שיעור 3. מספרים עוקבים

בכל מסגרת נתון זוג מספרים עוקבים שלמים.

$$10, 11 \\ 11^2 - 10^2 =$$

$$7, 8 \\ 8^2 - 7^2 =$$

$$4, 5 \\ 5^2 - 4^2 =$$

- חשבו את תוצאות התרגילים בכל מסגרת.
- שער: מה תהיה התוצאה של התרגיל $101^2 - 100^2$?

ניעזר באלגברה כדי לחקור חוקיות.

1. נתייחס לתרגילים ממשימת הפתיחה.

א. בְּנוּ דוגמאות דומות עם זוגות של מספרים לפי בחירתכם.

$$\square, \square \\ \square^2 - \square^2 =$$

$$\square, \square \\ \square^2 - \square^2 =$$

$$\square, \square \\ \square^2 - \square^2 =$$

ב. מְצְאוּ קשר בין זוגות המספרים והפרש הריבועים שלהם.

$$x, x + 1 \\ (x + 1)^2 - x^2$$

ג. הביטויים שבמסגרת מייצגים את זוג המספרים ואת הפרש הריבועים שלהם. פִּשְׁטוּ את הפרש הריבועים והראו כי תוצאת הפישוט מצדיקה את הקשר שמצאתם בסעיף ב.

ד. השלימו.

$$\square, \square \\ \square^2 - \square^2 = 19$$

$$\square, \square \\ \square^2 - \square^2 = 7$$

$$\square, \square \\ 26^2 - 25^2 = \square$$



2. א. בכל מסגרת נתונים שלושה מספרים עוקבים שלמים.

פתרו והשוו את התוצאות של כל זוג תרגילים.

7, 8, 9

$$8 \cdot 8 =$$

$$9 \cdot 7 =$$

4, 5, 6

$$5 \cdot 5 =$$

$$6 \cdot 4 =$$

3, 4, 5

$$4 \cdot 4 =$$

$$5 \cdot 3 =$$

ב. בְּנוּ דוגמאות דומות עם שלשות של מספרים לפי בחירתכם.

□, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

□, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

□, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

ג. מְצֵאוּ קשר בין המכפלות הבאות:

- המכפלה של המספר הראשון והמספר השלישי

- המכפלה של המספר השני בעצמו

ד. הביטויים שבמסגרת מייצגים את שלושת המספרים ואת שתי המכפלות.

פְּשְׁטוּ את שתי המכפלות והראו כי תוצאות הפישוט מצדיקות את הקשר

שמצאתם בסעיף ג.

$x - 1, x, x + 1$

$$x \cdot x$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1)$$

ה. השלימו.

□, □, □

$$32 \cdot 32 = \square$$

$$33 \cdot 31 = 1,023$$

□, □, □

$$25 \cdot 25 = 625$$

$$26 \cdot 24 = \square$$

□, □, □

$$16 \cdot 16 = 256$$

$$17 \cdot 15 = \square$$

□, □, □

$$\square \cdot \square = 529$$

$$22 \cdot 24 = 528$$

□, □, □

$$15 \cdot 15 = 225$$

$$\square \cdot \square = 224$$

□, □, □

$$12 \cdot 12 = 144$$

$$\square \cdot \square = 143$$



3. בכל מסגרת נתונים ארבעה מספרים עוקבים שלמים.

א. פתרו והשוו את התוצאות של כל זוג תרגילים.

2, 3, 4, 5

$$3 \cdot 4 =$$

$$2 \cdot 5 =$$

5, 6, 7, 8

$$6 \cdot 7 =$$

$$5 \cdot 8 =$$

8, 9, 10, 11

$$9 \cdot 10 =$$

$$8 \cdot 11 =$$

ב. בְּנוּ דוגמאות דומות עם רביעיות של מספרים לפי בחירתם.

□, □, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

□, □, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

□, □, □, □

$$\square \cdot \square =$$

$$\square \cdot \square =$$

ג. מְצאוּ על-סמך הדוגמאות קשר בין שתי המכפלות:

- המכפלה של המספר השני והמספר השלישי

- המכפלה של המספר הראשון והמספר הרביעי

ד. הביטויים שבמסגרת מייצגים את ארבעת המספרים

ואת שתי המכפלות שבקשר.

$x, x + 1, x + 2, x + 3$

$$(x + 1)(x + 2)$$

$$x(x + 3)$$

פְּשְׁטוּ את שתי המכפלות, וְהִרְאוּ כִי תוצאות הפישוט מצדיקות

את הקשר.

ה. השלימו.

□, □, □, □

$$110 \cdot 111 = 12,210$$

$$\square \cdot \square = 12,208$$

□, □, □, □

$$73 \cdot 74 = 5402$$

$$72 \cdot 75 = \square$$

4. נתונים המספרים: 1, 3, 5, 7

בכל סעיף מותר להשתמש בכל אחד מהמספרים יותר מפעם אחת.

א. קְשְׁמוּ תרגיל עם 8 מחוברים כך שהסכום יהיה 30.

ב. קְשְׁמוּ תרגיל עם 10 מחוברים כך שהסכום יהיה 30.

ג. האם אפשר לרשום תרגיל עם 10 מחוברים

כך שהסכום יהיה 35? הסבירו.





אוסף משימות



1. א. בכל מסגרת נתונים שלושה מספרים שלמים עוקבים.
פתרו והשוו את התוצאות של כל זוג תרגילים.

$$\begin{aligned} 17, 18, 19 \\ 17 + 19 = \\ 2 \cdot 18 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9, 10, 11 \\ 9 + 11 = \\ 2 \cdot 10 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7, 8, 9 \\ 7 + 9 = \\ 2 \cdot 8 = \end{aligned}$$

ב. בנו דוגמאות דומות עם שלושה מספרים לפי בחירתכם.

$$\begin{aligned} \square, \square, \square \\ \square + \square = \\ 2 \cdot \square = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square, \square, \square \\ \square + \square = \\ 2 \cdot \square = \end{aligned}$$

ג. מצאו על-סמך הדוגמאות קשר בין:
- סכום המספר הראשון והשלישי
- מכפלת המספר האמצעי פי 2

ד. הביטויים מייצגים את שלושת המספרים ואת הסכום והמכפלה הקושרים בין המספרים.

$$\begin{aligned} x, x + 1, x + 2 \\ x + x + 2 \\ 2(x + 1) \end{aligned}$$

פשוטו את הסכום והמכפלה והראו כי תוצאות הפישוט מצדיקות את הקשר.

ה. השלימו.

$$\begin{aligned} \square, \square, 55 \\ \square \cdot \square = 108 \\ \square \cdot 54 = \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101, \square, \square \\ 101 + \square = 204 \\ 2 \cdot \square = \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square, \square, \square \\ 20 + 22 = \square \\ 2 \cdot 21 = \square \end{aligned}$$

2. נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ ושטחו 50 סמ"ר.

- א. מקצרים ב- 1 ס"מ צלע אחת של הריבוע ואת הצלע הסמוכה מאריכים ב- 1 ס"מ כך שיתקבל מלבן. מצאו את שטח המלבן בלי למצוא את אורך צלע הריבוע.
- ב. מקצרים ב- 2 ס"מ צלע אחת של הריבוע ואת הצלע הסמוכה מאריכים ב- 2 ס"מ כך שיתקבל מלבן. מצאו את שטח המלבן בלי למצוא את אורך צלע הריבוע.
- ג. מקצרים ב- a ס"מ צלע אחת של הריבוע ואת הצלע הסמוכה מאריכים ב- a ס"מ כך שיתקבל מלבן. בכמה גדול שטח הריבוע משטח המלבן. הסבירו.



שומרים על כושר

משוואות עם שברים אלגבריים

1. פתרו את המשוואות.

א. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$ ב. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ ג. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 3$ ד. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$

2. פתרו את המשוואות.

א. $\frac{x}{4} + \frac{x-1}{2} = 1$ ג. $\frac{x}{3} + \frac{2-3x}{6} = 5$ ה. $\frac{x+5}{2} = \frac{4x}{3}$
 ב. $\frac{x}{4} + \frac{1-x}{2} = 1$ ד. $\frac{3x+2}{8} - \frac{5x}{4} = 2$ ו. $\frac{x+3}{5} = \frac{x+1}{4}$

3. בכל סעיף סדרה של 5 משוואות.

לכל משוואה רשמו את תחום ההצבה ופתרו.

א. $\frac{1}{x-1} = 1$ $\frac{2}{x-1} = 1$ $\frac{3}{x-2} = 1$ $\frac{4}{x-3} = 1$ $\frac{5}{x-4} = 1$	ב. $\frac{10}{x} = 2$ $\frac{10}{x-1} = 2$ $\frac{10}{x-2} = 2$ $\frac{10}{x-3} = 2$ $\frac{10}{x-4} = 2$	ג. $\frac{3}{x} = 1$ $\frac{3}{x+1} = 1$ $\frac{3}{x+2} = 1$ $\frac{3}{x+3} = 1$ $\frac{3}{x+4} = 1$
---	--	---

4. נסו להגיע אל המטמון. מותר לעבור רק דרך משבצות אשר בהן רשומה משוואה שפתרונה 3.

שימו לב, בכל המשוואות המכנה שונה מאפס.

התחילו

$\frac{5}{x+2} = 1$	$2x - 1 = 5$	$3 - \frac{5}{2x-1} = 2$	$\frac{9}{2x+3} - 1 = 0$
$3x + 1 = 8$	$2 + \frac{6}{4x} = 5$	$\frac{3}{2x-3} = 0$	$3 - \frac{2x+3}{3} = 0$
$\frac{9-2x}{3} + 2 = 5$		$15 - \frac{x+1}{4} = 16$	$\frac{x-3}{8} = 0$
$\frac{3-2x}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{15}{4x+3} = 1$	$15 - \frac{x+1}{4} = 14$	$2 - \frac{3(x+2)}{5} = -1$