

יחידה 24: מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית

שיעור 1. נוסחה לפתרון משוואה ריבועית

המורה ביקשה מאלישבע למצוא את נקודות האפס של הפונקציות הריבועיות:

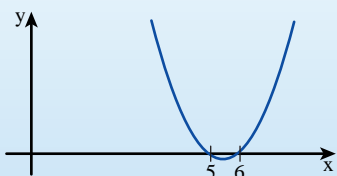
ולשרטט סקיצינות מתאימות. $y = 2x^2 + 9x - 5$ $y = x^2 - 11x + 30$

אלישבע פירקה את $y = x^2 - 11x + 30$ לגורמים כך: $y = (x - 5)(x + 6)$

היא רשמה את המשוואה:

$$x_2 = 6 \quad x_1 = 5, (x - 5)(x - 6) = 0$$

ושרטטה את הסקיצה (ראו שרטוט משמאל):



● האם אלישבע צודקת?

● האם תוכלו להיעזר בדרך של אלישבע כדי למצוא את נקודות האפס של הפונקציה $y = 2x^2 + 9x - 5$ ולשרטט סקיצינה מתאימה?

נלמד לפתור משוואות ריבועיות.



1. בכל סעיף נסו למצוא את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.

אם לא הצלחתם סמנו x.

ג. $y = x^2 - 5x + 6$

א. $y = x^2 + 9x + 18$

ד. $y = 2x^2 - 5x - 3$

ב. $y = 5x^2 + 3x + 8$



תזכורת

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x נקראות **נקודות אפס** של הפונקציה. אפשר למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה בעזרת פתרונות המשוואה $f(x) = 0$.



2. לפניכם **נוסחת השורשים** שבעזרתה נמצא את שיעורי נקודות האפס של פונקציות ריבועיות

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בהמשך היחידה נוכיח את נכונות הנוסחה.

א. היעזרו בנוסחה ופתרו את המשוואה $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

ב. נחזור למשימת הפתיחה. מהן נקודות האפס של הפונקציה $y = 2x^2 + 9x - 5$?



כדי למצוא את נקודות האפס של הפונקציה פותרים **משוואה ריבועית**.

משוואה ריבועית אפשר להציג בייצוג הסטנדרטי $(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$.

פתרונות המשוואה נקראים **שורשי המשוואה**.

אפשר למצוא את שורשי המשוואה הריבועית $(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$ בעזרת **נוסחת השורשים**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בהמשך היחידה מופיע הסבר על הדרך שבה מגיעים לנוסחה זו.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 13x - 4$ $a = -3$ $b = 13$ $c = -4$
 למציאת נקודות האפס של הפונקציה, נפתור את המשוואה הריבועית $-3x^2 + 13x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{-6} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 11}{-6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-13 - 11}{-6} = 4$$

שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $(4, 0)$ ו- $(\frac{1}{3}, 0)$

תזכורת

לכל מספר **חיובי** יש שני שורשים ריבועיים, האחד **חיובי** והאחר **שלילי**.

את **השורש הריבועי החיובי** מסמנים כך: $\sqrt{\quad}$

את **השורש הריבועי השלילי** מסמנים כך: $-\sqrt{\quad}$

דוגמה: השורש הריבועי החיובי של 9 הוא $\sqrt{9} = 3$

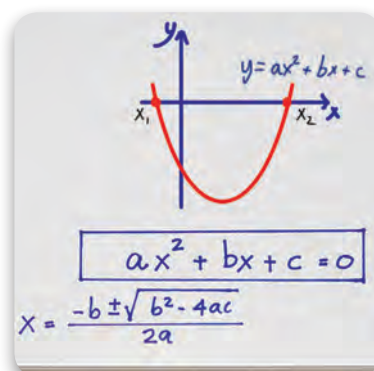
השורש הריבועי השלילי של 9 הוא $-\sqrt{9} = -3$

שימו לב, כשאומרים או כותבים במילים "שורש ריבועי של...", מתכוונים לשני השורשים.

כשכותבים " $\sqrt{\quad}$ " הכוונה לשורש הריבועי החיובי בלבד.

לכן כאשר כותבים \pm לפני הסימן $\sqrt{\quad}$ בנוסחת השורשים של משוואה ריבועית מתכוונים לשורש הריבועי החיובי ולשורש הריבועי השלילי.

דוגמה: $\pm \sqrt{121} = \pm 11$ זו דרך מקוצרת לרשום $\sqrt{121}$ ו- $-\sqrt{121}$

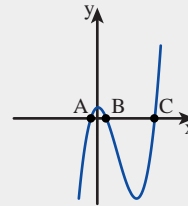
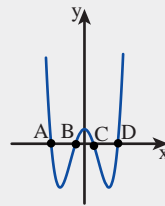
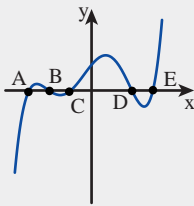


3. בכל סעיף קבעו מה ערכם של הפרמטרים a, b ו-c, ומצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.

א. $y = 5x^2 + 3x - 14$ ג. $y = x^2 - 9x + 14$ ה. $y = -x^2 - 3x + 10$

ב. $y = 2x^2 - x - 15$ ד. $y = 3x^2 - 5x - 12$ ו. $y = -5x^2 - 4x + 1$

בשיעור זה הכרנו את הנוסחה למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות ממעלה שנייה - כלומר, נוסחה למציאת שורשי משוואות ריבועיות. במשך שנים רבות ניסו מתמטיקאים לגלות נוסחאות דומות למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות (או שורשי משוואות) ממעלה גבוהה יותר, כמו למשל:



$y = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$ $y = 0.1x^4 - 4x^2 + 10$ $y = 0.1x^3 - 4x^2 - 4x + 100$

התשובה לא הייתה פשוטה. הנוסחאות הכלליות למציאת השורשים של משוואה ממעלה שנייה, שלישית ורביעית (כלומר, ביטויים המבוססים על פעולות חשבוניות והוצאת שורש בין מקדמי המשוואה) פותחו רק לפני כ-400 שנה.

מציאת נוסחאות דומות לשורשי משוואות מדרגה חמישית ומעלה הייתה אתגר למתמטיקאים במשך שנים רבות נוספות, עד אשר לפני כ-200 שנה הוכיח המתמטיקאי גלואה את המשפט הטוען כי קיומן של נוסחאות לשורשי משוואות שדרגתן גבוהה מ-4, הוא בלתי אפשרי. משפט זה אינו מתייחס לעצם קיומם של השורשים, אלא למציאתם באמצעות נוסחה המבוססת על פעולות חשבון בין מקדמי המשוואה ומתאימה לכל המשוואות מאותה מעלה.

אוסף משימות



1. בכל סעיף קבעו אם לפונקציה יש נקודות אפס. אם כן, מצאו את שיעורי הנקודות.

א. $y = x^2 - 4x - 21$ ה. $y = -8x^2 + 7x - 3$

ב. $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5$ ו. $y = -3x^2 - 6x + 9$

ג. $y = x^2 - 9x + 18$ ז. $y = 9x^2 - 6x + 1$

ד. $y = x^2 - 5x - 14$ ח. $y = 2x^2 - 3x + 20$



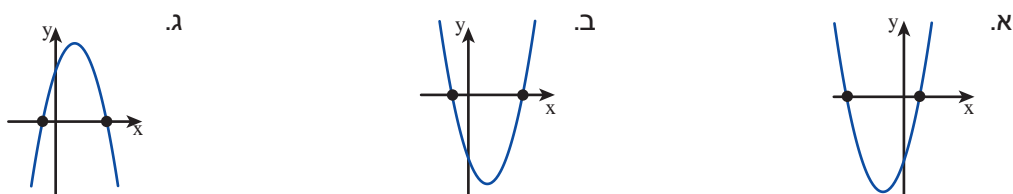
2. פתרו את המשוואות ובדקו את הפתרונות.

- | | | | |
|----|------------------------|-----|--------------------------------|
| א. | $2x^2 - 7x + 5 = 0$ | ז. | $3x^2 - 8x + 9 = 0$ |
| ב. | $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ | ח. | $-2x^2 + x + 15 = 0$ |
| ג. | $x^2 - 9x + 14 = 0$ | ט. | $7x^2 + 15x - 100 = 0$ |
| ד. | $x^2 - 19x - 150 = 0$ | י. | $-5x^2 + 14x - 8 = 0$ |
| ה. | $-3x^2 - 5x - 12 = 0$ | יא. | $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$ |
| ו. | $-6x^2 + 36x - 54 = 0$ | יב. | $5x^2 + 3x - 14 = 0$ |



3. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x - 10$

איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה? הסבירו.



4. פתרו את המשוואות הרשומות בטבלה, העתיקו את הטבלה ורשמו את הפתרונות בעמודות המתאימות בטבלה.

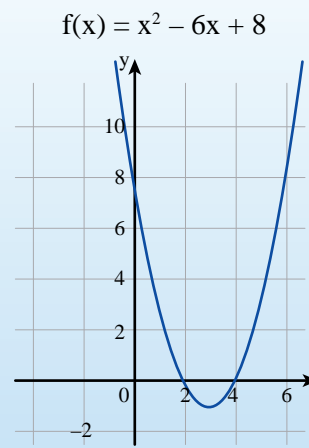
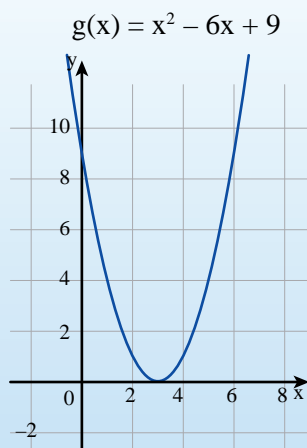
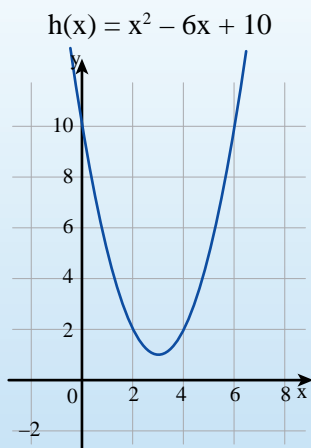
הפונקציה	הפתרון הגדול יותר	הפתרון הקטן יותר
$x^2 - 18x = 0$	ב	א
$x^2 + 8x + 12 = 0$	ד	ג
$x^2 - 14x + 40 = 0$	ו	ה
$x^2 - 4x - 140 = 0$	ז	ח
$x^2 - 16x + 64 = 0$	ט	ט

א	ב	ג
ד	ה	ו
ז	ח	ט

ריבוע הקסם:
רשמו את הפתרונות בהתאם לאותיות בריבוע הקסם. אם פותרם נכון, סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אלכסון - שווה.

שיעור 2. כמה פתרונות למשוואה?

כמה נקודות אפס לכל פונקציה?



האם תוכלו לענות על השאלה בלי להיעזר בגרף?
נחקור את מספר הפתרונות של משוואה ריבועית.



1. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציות שבמשימת הפתיחה.
כמה נקודות אפס מצאתם לכל פונקציה?
בדקו את הפתרונות בעזרת הצבה ולפי הגרף.

2. פתרו את המשוואות. אם למשוואות אין פתרון, הסבירו.

א. $x^2 + 2x - 15 = 0$ ג. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ ה. $2x^2 + 4x + 3 = 0$
ב. $-2x^2 - 3x + 20 = 0$ ד. $-3x^2 + 10x - 9 = 0$ ו. $-x^2 + 8x - 16 = 0$



3. המורה שאלה: כמה פתרונות למשוואה הריבועית $x^2 - 4x + 8 = 0$?
שולי אמרה: כדי לדעת כמה פתרונות למשוואה אני בודקת את ערך הביטוי $b^2 - 4ac$ המופיע בתוך סימן השורש בנוסחת השורשים.

הסבירו את ההצעה של **שולי**. התייחסו למקרים הבאים:

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

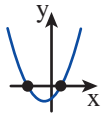
תוכלו להיעזר בדוגמאות.



הנוסחה למציאת השורשים של משוואה ריבועית של $(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ היא}$$

בוגמלות



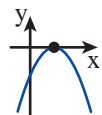
המשוואה $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$b^2 - 4ac = 49 > 0$$

לכן למשוואה שני שורשים.

לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 3x - 5$

שתי נקודות אפס $(-2.5, 0)$ ו- $(1, 0)$



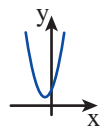
המשוואה $-x^2 + 8x - 16 = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

לכן למשוואה פתרון אחד (שני שורשים זהים),

לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 8x - 16$

נקודת אפס אחת $(4, 0)$



המשוואה $2x^2 + 4x + 3 = 0$

$$b^2 - 4ac = -8 < 0$$

לכן למשוואה אין פתרון,

לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 4x + 3$

אין נקודות אפס.

במקרה זה הגרף נמצא מעל לציר x

• אם $b^2 - 4ac > 0$,

למשוואה שני פתרונות שונים.

לגרף הפונקציה

$$(a \neq 0) \quad y = ax^2 + bx + c$$

חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

• אם $b^2 - 4ac = 0$,

למשוואה פתרון יחיד (שני שורשים זהים).

לגרף הפונקציה

$$(a \neq 0) \quad y = ax^2 + bx + c$$

נוגע בציר x בנקודה אחת כלומר,

משיק לציר x בנקודה יחידה.

• אם $b^2 - 4ac < 0$,

למשוואה אין פתרון.

לגרף הפונקציה

$$(a \neq 0) \quad y = ax^2 + bx + c$$

אין נקודות אפס. כלומר, לכל ערך

של x הגרף נמצא מעל או מתחת לציר x.



4. כמה פתרונות למשוואה $4x^2 - 12x + 9 = 0$

יעל אמרה: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ לכן למשוואה פתרון יחיד $x = 1\frac{1}{2}$.

מיכל אמרה: $b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0$ לכן למשוואה פתרון יחיד $x = 1\frac{1}{2}$.

האם שתיהן צודקות?

אם כן, איזו דרך פתרון נראית לכם עדיפה?

5. נתונה משפחת המשוואות $x^2 + bx + 16 = 0$.

א. תנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה יהיה פתרון יחיד. כמה אפשרויות יש?

ב. תנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה אין פתרון. כמה אפשרויות יש?

ג. תנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה יהיו שני פתרונות שונים. כמה אפשרויות יש?



6. כמה פתרונות למשוואה $x^2 - 8x + 10 = 0$?

רחלי אמרה: למשוואה שני פתרונות, כי ערך הביטוי $b^2 - 4ac$ הוא מספר חיובי, 24.

אסתי אמרה: למשוואה אין פתרון, כי השורש של 24 אינו מספר שלם.

מי צודקת? הסבירו.

שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $y = x^2 - 8x + 10$.



אוסף משימות



1. פתרו.

א. $x^2 + 4x + 5 = 0$ ב. $x^2 + 4x + 4 = 0$ ג. $x^2 + 4x + 3 = 0$



2. מיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור).

א. $5x^2 + 3x - 14 = 0$ ג. $x^2 + 8x + 25 = 0$ ה. $x^2 - 10x + 25 = 0$

ב. $2x^2 - x - 15 = 0$ ד. $x^2 - 8x + 16 = 0$ ו. $4x - x^2 = 0$



3. א. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 25 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?

כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 25$ עם ציר x? שרטטו סקיצה של הפונקציה.

ב. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 24 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?

כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 24$ עם ציר x? שרטטו סקיצה של הפונקציה.

ג. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 26 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?

כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 26$ עם ציר x? שרטטו סקיצה של הפונקציה.



4. בכל סעיף קבעו אם הטענה נכונה. הסבירו.

א. למשוואה $x^2 - 12x + 36 = 0$ יש שני פתרונות.

ב. למשוואה $2x^2 + 50 = 0$ אין פתרון.

ג. למשוואה $x^2 + 8x + 16 = 0$ יש פתרון אחד.

ד. לפונקציה $y = -x^2 - 6x + 16$ יש שתי נקודות אפס.

ה. לפונקציה $y = -x^2 + 7$ אין נקודות חיתוך עם ציר x.



5. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $y = ax^2 + 2x + 1$ ($a \neq 0$) עבור אילו ערכים של a , לפונקציה מהמשפחה יש:

- א. שתי נקודות אפס ב. נקודת אפס אחת ג. ערכים חיוביים בלבד



6. נתונה המשוואה $x^2 - 8x + 16 = 0$

- א. כמה פתרונות למשוואה?
 ב. שנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה עם שני פתרונות. כמה אפשרויות יש?
 ג. שנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה שאין לה פתרון. כמה אפשרויות יש?



7. א. התאימו גרף לכל פונקציה.

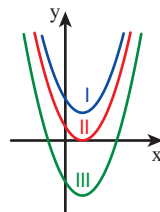
$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

ב. פתרו את המשוואות.

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$



$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$



8. א. התאימו גרף לכל פונקציה.

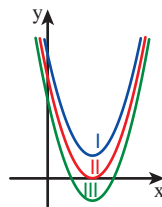
$$f(x) = 4x^2 - 12x + 8$$

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 11$$

$$h(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

ב. פתרו את המשוואות.

$$4x^2 - 12x + 8 = 0$$



$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 11 = 0$$



9. א. התאימו גרף לכל פונקציה.

$$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$$

$$g(x) = 2x^2 + 7x - 4$$

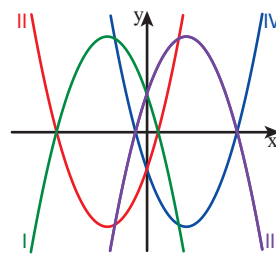
$$h(x) = -2x^2 - 7x + 4$$

$$m(x) = -2x^2 + 7x + 4$$

ב. פתרו את המשוואות.

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$



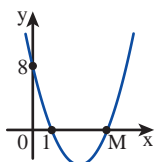
$$-2x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$-2x^2 + 7x + 4 = 0$$



10. בשרטוט גרף הפונקציה $y = ax^2 - 10x + c$ ($a \neq 0$)

- א. מהו c ? ב. מהו a ? ג. מהם שיעורי הנקודה M ?



שיעור 3. מפשטים ופותרים



מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = -2(x - 4)^2 + 18$?

נפשט ונפתור משוואות ריבועיות.

1. מהן נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = -2(x - 4)^2 + 18$?

א. שרטטו (בלי חישובים) סקיצה של גרף הפונקציה.

ענו לפי הגרף: כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ב. **שרה** התחילה לפתור כך: $-2(x - 4)^2 + 18 = 0$

$$-2(x - 4)^2 = -18 \quad / : (-2)$$

המשיכו את פתרון המשוואה בדרך של **שרה**. כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ג. **בתיא** התחילה לפתור כך: $-2(x - 4)^2 + 18 = 0$

$$-2(x^2 - 8x + 16) + 18 = 0$$

המשיכו את פתרון המשוואה בדרך של **בתיא**. כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ד. דונו בדרכי הפתרון השונות. איזו דרך נוחה יותר לדעתכם?

2. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה $y = (x + 4)^2 - 4$.



במשימה 1 ראינו כי כדי למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה ריבועית המוצגת בייצוג קדקודי,

$$(a \neq 0), y = a(x - p)^2 + k$$

פותרים את המשוואה

$$a(x - p)^2 + k = 0$$

$$a(x - p)^2 = -k$$

כך:

$$(x - p)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x - p = \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

לכן שיעורי נקודות האפס הם $(p + \sqrt{-\frac{k}{a}}, 0)$ ו- $(p - \sqrt{-\frac{k}{a}}, 0)$.

בהמשך ניעזר בנוסחה זו למציאת נקודות אפס של פונקציה ריבועית בייצוג סטנדרטי, כדי להוכיח את **נוסחת השורשים**.

3. בכל סעיף פשוטו, רשמו בצורה $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) ופתרו.

זלזלה:

$x(3x - 1) = 4(3 + x)$

$3x^2 - x = 12 + 4x \quad / \quad -12 - 4x$ מפשטים:

$3x^2 - 5x - 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3}$ פותרים:

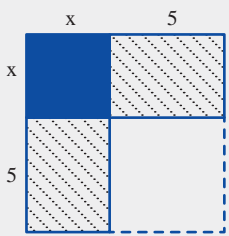
$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6}$

$x_1 = \frac{5+13}{6} = 3, \quad x_2 = \frac{5-13}{6} = -\frac{4}{3}$ מקבלים:

$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{4}{3}$ פתרונות המשוואה הם:

- | | | | |
|--|----|----------------------------|----|
| $2(8 - x) = (x - 4)^2$ | ה. | $x^2 - 2x = x + 4$ | א. |
| $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = x + 2$ | ו. | $x(x - 4) = 21$ | ב. |
| $\frac{(x - 4)^2}{7} = 1 - 2x$ | ז. | $(x - 3)(x + 1) = 22 - 2x$ | ג. |
| $\frac{2x^2 + 3x}{5} = \frac{x(x - 9)}{4}$ | ח. | $2(x + 4) = 3 - 3x^2$ | ד. |

אלחואריזמי היה מתמטיקאי ערבי, שחי במאה התשיעית לספירה. הוא ידוע כאחד התורמים לבניית יסודות האלגברה. בספרו **אלג'בר ואלמוקאבלה** מתאר דרך מעניינת לפתרון משוואה ריבועית. המילה "אלג'בר" שימשה את אלחואריזמי לתיאור הפעולה של העברת איברים מאגף לאגף במשוואה, והמילה "אלמוקאבלה" שימשה אותו לתיאור פעולת כינוס האיברים הדומים. השם אלגברה שבו אנו מכנים עד היום את כל הענף במתמטיקה שעוסק בין היתר בפתרון משוואות, נגזר מן המילה "אלג'בר". נציג כאן כדוגמה את הפתרון של המשוואה $x^2 + 10x = 39$ לפי השיטה של אלחואריזמי:



- שרטטו ריבוע שאורך צלעו x (הריבוע המלא).
- הוסיפו אל הריבוע שני מלבנים משני צידיו (המלבנים המקווקים), שאורך אחת הצלעות של כל אחד מהם היא 5 יחידות.
- השלימו את השרטוט לריבוע, בעזרת תוספת ריבוע (הריבוע הריק).

שטח הצורה מיוצג על-ידי הביטוי $x^2 + 10x$, ולפי תנאי המשוואה הוא שווה ל-39 יחידות.

שטח הריבוע הגדול מיוצג על-ידי הביטוי $(x + 5)^2$, ולפי השרטוט הוא שווה ל-64 יחידות. כלומר בכתיב של ימינו $(x + 5)^2 = 64$ מכאן נוכל להסיק כי $x + 5 = 8$ ופתרון המשוואה הוא $x = 3$ הערות:

- הפתרון של אלחואריזמי הוא גאומטרי, ואינו לוקח בחשבון פתרונות שליליים (במקרה שלנו $x = -13$)
- הפתרון המקורי הוצג באופן מילולי, כי השימוש באותיות ובמשתנים לא היה מוכר בתקופתו של אלחואריזמי (כלומר, לפני כ-1,200 שנה).



כדי למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה ריבועית המוצגת בייצוג הסטנדרטי, $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) $y = ax^2 + bx + c$ נשתמש בשורשי המשוואה בייצוג הקדקודי כדי להוכיח את **נוסחת השורשים**. מוצאים את הקשר בין הייצוג הסטנדרטי לייצוג הקדקודי של הפונקציה על-ידי פישוט.

$$f(x) = a(x - p)^2 + k$$

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + k$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$f(x) = \mathbf{a}x^2 - \mathbf{2ap}x + \mathbf{ap^2 + k}$$

משווים לייצוג הסטנדרטי ומקבלים:

$$-2ap = b$$

א.

מסיקים שני שוויונות:

$$\boxed{p = -\frac{b}{2a}} \quad \text{ומכאן:}$$

$$c = ap^2 + k$$

ב.

$$k = c - ap^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}} \quad \text{ומכאן:}$$

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

ראינו כי פתרונות המשוואה **בייצוג הקדקודי** הם:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) : a}$$

על-סמך השלבים הקודמים מציבים ומקבלים:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הנוסחה לחישוב שיעורי x של נקודות האפס של הפונקציה הריבועית (כלומר השורשים של המשוואה) היא:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



4. מתוך הקשרים בין הייצוג הסטנדרטי לייצוג הקדקודי של הפונקציה הריבועית ראינו כי $p = -\frac{b}{2a}$.
א. חני אמרה: נוכל להסיק כי שיעור x של נקודת הקדקוד של הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0) הוא $x = -\frac{b}{2a}$.
הסבירו.
ב. מצאו את שיעורי נקודות הקדקוד של הפונקציות הבאות:
 $y = 2x^2 - 16x - 6$ $y = -2x^2 + 16x - 14$

5. פתרו כל משוואה בשתי דרכים: בעזרת נוסחת השורשים ובדרך נוספת.
א. $x^2 - 169 = 0$ ב. $3x^2 - 15x = 0$ ג. $x^2 - 10x + 24 = 0$



אוסף משימות



1. פתרו.

א. $x(x + 5) - 6 = 0$	ד. $x(6x - 13) + 2(5x - 1) = 1$
ב. $2x(x + 1) + 3.5 = 5$	ה. $x(3x - 5) = 2(3x - 5)$
ג. $2(2x - 5) = x(x - 7)$	ו. $x + \frac{x^2 - x}{2} = 0$



2. פתרו.

א. $(x + 3)(x + 4) = 72$	ד. $(3x + 4)(x - 1) = 2x^2 + 2$
ב. $(x + 3)^2 = 4$	ה. $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 9$
ג. $(x - 3)^2 = x + 3$	ו. $4 + \frac{2x - 2x^2}{3} = 0$



3. פתרו.

א. $(2x - 1)(x - 1) = 13 - 5x$	ד. $x - (x + 4)^2 = x - 1$
ב. $3x^2 - 2x + 9 = 2x(x - 4)$	ה. $(2x + 1)^2 - (x + 7)^2 = 0$
ג. $\frac{(x - 3)^2}{2} = \frac{x + 5}{5}$	ו. $\frac{x(x - 5)}{2} - 2x + 4 = 0$



4. מיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור).

א. $3x^2 - 5x - 12 = 0$ ד. $8(1 - x^2) = (2x - 3)^2$

ב. $9x^2 - 30x + 25 = 0$ ה. $(x - 4)^2 = -1$

ג. $8(x - 1) - x(5x - 6) = 0$ ו. $x - \frac{(3+x)^2}{2} = 0$



5. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 4x + 3 = 0$ ד. $(x - 5)(x + 2) = 0$

ב. $2x^2 - 5x = 0$ ה. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

ג. $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ו. $(x - 2)^2 = x(x - 3)$



6. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$ ד. $(x + 2)^2 = x^2 + 20$

ב. $x(x - 4) = 21$ ה. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 1)$

ג. $x^2 + 5(8 - x) = 46$ ו. $(x - 4)^2 = x(8 + x)$



7. פתרו את המשוואות.

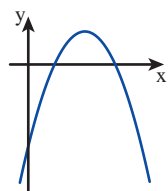
א. $x(x + 4) = 3x + 12$ ד. $x(2x + 3) = 2x + 10$

ב. $(x + 5)(x + 2) = -2$ ה. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 4x - 5$

ג. $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 9$ ו. $(x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 31$

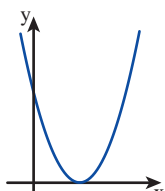


8. בשרטוט סקיצות של פרבולות. מצאו את נקודות האפס (אם יש), והתאימו פרבולה לפונקציה.



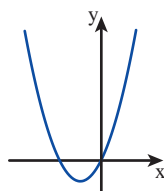
$$f(x) = x^2 + 3$$

ד.



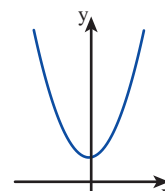
$$g(x) = -x^2 + 3x - 2$$

ג.



$$h(x) = x^2 + 2x$$

ב.



$$k(x) = x^2 - 8x + 16$$



9. לכל פונקציה, התאימו סקיצה של פרבולה. הסבירו.

$$m(x) = -x^2 + 3x + 4$$

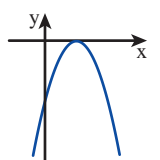
$$p(x) = x^2 - x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

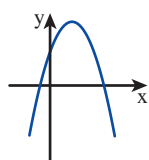
$$g(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$k(x) = -x^2 + x - 1$$

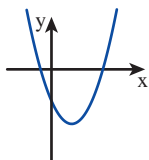
$$h(x) = -x^2 + 2x - 1$$



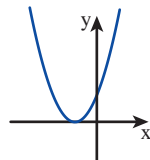
ו.



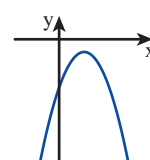
ה.



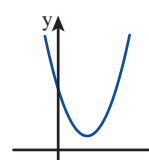
ד.



ג.



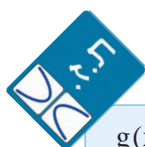
ב.



א.



10. העתיקו והשלימו **תעודות זהות** לפונקציות.



$g(x) = x^2 - 6x + 10$	$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$	ייצוג אלגברי של הפונקציה
כל המספרים	כל המספרים	תחום
		סקיצה
		ציר הסימטריה
		שיעורי נקודת הקדקוד
		סוג הקדקוד
		שיעורי נקודות החיתוך עם ציר x (נקודות אפס, $y = 0$)
		שיעורי נקודות החיתוך עם ציר y ($x = 0$)
		תחום עלייה של הפונקציה
		תחום ירידה של הפונקציה
		התחום שבו הפונקציה חיובית ($y > 0$)
		התחום שבו הפונקציה שלילית ($y < 0$)

שיעור 4. בעיות מילוליות ומשוואות



ברכי בחרה מספר שלם.
היא הוסיפה 5 למספר שבחרה,
כפלה את הסכום שהתקבל במספר שבחרה וקיבלה 6.
ברכי אמרה: המספר שבחרת הוא 1.
ציפי אמרה: טעית, בחרתי מספר אחר.
הייתכן? הסבירו.

נפתור בעיות מילוליות בעזרת משוואות ריבועיות.

1. מחוט שאורכו 24 ס"מ יוצרים מלבנים שונים.
א. הציעו מידות אפשריות למלבנים ומצאו את שטחיהם.
ב. השטח של אחד המלבנים שנוצרו מאותו חוט הוא 27 סמ"ר.
מצאו את אורכי צלעות המלבן. הסבירו.
2. מקיפים בגדר מגרש מלבני ששטחו 45 מ"ר. צלע אחת של המלבן ארוכה ב-12 מ' מהצלע השנייה.
א. סמנו ב- x אורך (בס"מ) של אחת מצלעות המלבן.
רשמו ביטוי אלגברי לאורך הצלע השנייה של המלבן.
ב. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה? הסבירו.
ג. מה אורכי צלעות המלבן?
3. בסיום שנת הלימודים החליטו תלמידות כיתה ט להחליף ביניהן תמונות למזכרת.
בסך-הכול הוחלפו 870 תמונות.
א. אילו מספרים יכולים להתאים למספר התלמידות בכיתה?
ב. כמה תלמידות בכיתה? הסבירו.
4. נתונים שני מספרים עוקבים. סכום ריבועיהם 1301.
א. אילו מספרים יכולים להתאים?
ב. מהם הפתרונות של המשוואה המתאימה?
ג. מהם המספרים? הסבירו.



תזכורת

כך נוהגים בפתרון בעיות:

- קובעים תחילה את התנאים המגבילים של הבעיה, כלומר מסיקים אילו ערכים מתאימים לנתונים.
- מוצאים את התשובה לבעיה בעזרת שיקולים, בעזרת חישובים, בעזרת גרף או בעזרת משוואה.
- בודקים אם הפתרונות שהתקבלו מתאימים לתנאי הבעיה.

5. פתרו את המשוואות.

א. $5x(4x - 10) = 0$

ד. $-x(5x - 6) - 8(1 - x) = 0$

ב. $-2x^2 + (3x + 2)^2 + 2(x - 2) = 0$

ה. $-1 - (x - 4)^2 = 0$

ג. $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

ו. $2x - (3 + x)^2 = 0$



אוסף משימות



1. צלע אחת של מלבן ארוכה ב- 2 ס"מ מהצלע השנייה. שטח המלבן 24 ס"מ.

א. אילו ערכים יכולים להתאים לאורכי צלעות המלבן?

ב. מצאו את אורכי צלעות המלבן.

ג. מצאו את היקף המלבן.



2. היקפו של מלבן 32 ס"מ.

סמנו ב- x את אורך אחת הצלעות של המלבן (x בס"מ).

א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה? הסבירו.

ב. שטח המלבן 48 סמ"ר. מצאו את אורכי צלעות המלבן.



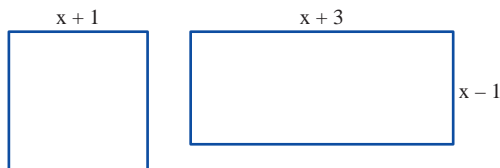
3. בשרטוט ריבוע ומלבן (אורכי הצלעות נתונים בס"מ).

א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי השאלה? הסבירו.

ב. סכום השטחים של הריבוע ושל המלבן 94 סמ"ר.

מצאו את אורכי הצלעות של הריבוע ושל המלבן.

ג. מצאו את סכום ההיקפים של הריבוע ושל המלבן.



4. בטורניר של שחמט שיחק כל שחקן משחק אחד

נגד כל אחד מן השחקנים האחרים.

בטורניר היו 36 משחקים.

כמה שחקנים השתתפו בטורניר?



5. א. מצאו מספר שריבועו שווה למכפלתו ב-6.
 ב. מצאו מספר שריבועו גדול ממנו ב-2.



6. דבורי מבוגרת מרחל ב-10 שנים. מכפלת הגילים שלהן היא 39.
 בת כמה דבורי? בת כמה רחל?



7. מכפלת זוג מספרים עוקבים היא 2. מצאו את המספרים.
 כמה זוגות מספרים מצאתם?



8. מצאו מספר שאם נכפול את המספר הקודם לו במספר העוקב לו, נקבל 24.



9. מצאו זוג מספרים עוקבים שסכומם שווה לריבועיהם.



10. פתרו את המשוואות.

א. $(x - 1)(3x + 1) = x^2 + 11$	ד. $(x - 2)(x + 4) = (2x - 7)(x + 2)$
ב. $(2x - 1)(x + 3) = 15$	ה. $(x + 5)^2 = (x - 1)(5x - 11)$
ג. $(x - 4)^2 + (x + 4)^2 = 82$	ו. $(x - 5)^2 + (x + 3)^2 = 16x - 8$



11. פתרו את המשוואות.

א. $8(1 + x) = x(6 + x)$	ד. $x(x + 2) + (x - 5)^2 = 89$
ב. $(x - 4)(x + 4) = (2x - 1)(2x + 1)$	ה. $(2x - 1)(x + 2) = x(x + 1) + 1$
ג. $(3x - 2)^2 = 8(x^2 - 3) + 1$	ו. $(2x - 3)(2x + 3) = 5x + (x + 1)(x - 1)$



12. פתרו את המשוואות.

א. $7(2 - x) + x(x - 3) = 5$	ד. $(x - 3)(x + 2) + (x - 5)^2 = 10$
ב. $3(x - 1)^2 = 2(x + 3)^2 - 96$	ה. $(2x - 3)(2x + 3) = 3x(x + 1) - 19$
ג. $(3x + 2)^2 + 2(3x - 2) = 0$	ו. $(2x - 3)^2 - 4(x + 1)^2 = 10 - 15x$