

الوحدة الخامسة والعشرون: معادلات ومتباينات تربيعية

الدرس الأول: هيئة معادلات



أمامكم هيئات معادلات. اقتربوا طرقاً للحل.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$$

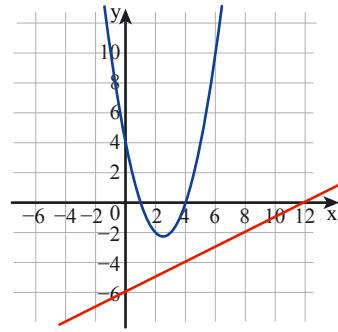
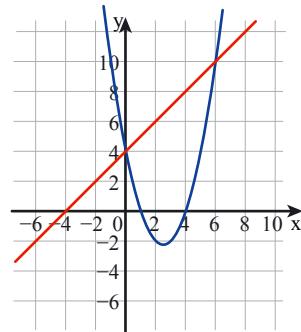
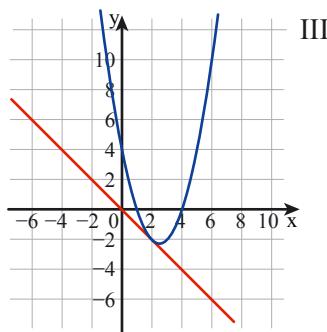
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

نحل هيئات معادلات تشمل معادلات تربيعية.

1. نتطرق إلى هيئات المعادلات التي وردت في مهمة الافتتاحية.

أ. رسمت **مروة**، في هيئه محاور واحدة، الخطين البيانيين المناسبين للمعادلتين.



I

II

III

لائوا كل رسمة لهيئة المعادلات المناسبة.
جدوا حل كل هيئه معادلات من الرسم البياني.

ب. بدأت **ميريم** في حل هيئه المعادلات كالتالي:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

سجلت المعادلة $x + 4 = x^2 - 5x + 4$

بسطوا معادلة **ميريم**، وحلوها. ما هو حل هيئه المعادلات؟

ت. حلوا بطريقة **ميريم** هيئات المعادلات الأخرى.

افحصوا حلولكم بمساعدة الرسوم البيانية التي رسمتها **مروة**.



للذكير

- الحل الجبري لهيئة معادلات هو زوج مرتب (أو أزواج مرتبة) من الأعداد التي تحقق المعادلتين.
- إذا لم تتوفر أزواج مرتبة تتحقق المعادلتين فلا يوجد حل لهيئة المعادلات.

2. حلّوا.

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = 2x + 4 \end{cases} . ج.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = x + 2 \end{cases} . ت.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = 6x + 8 \end{cases} . أ.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = 8 \end{cases} . ح.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = -x \end{cases} . ث.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8 \\ y = x - 3 \end{cases} . ب.$$

3. ارسموا، في كلّ بند، في هيئة المحاور نفسها قطعين مكافئين مناسبين وجدوا حلّ هيئة المعادلات.
إذا لم تجدوا حلًا فاشرحوا.
احصوا إجاباتكم بطريقة جبرية.

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2x^2 \end{cases} . ت.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -(x - 1)^2 - 1 \end{cases} . ب.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -(x - 1)^2 + 4 \end{cases} . أ.$$



4. أ. سُجّلوا معادلة لقطع مكافئ ومعادلة مستقيم بحيث:

* تكون لهما نقطتين تقاطع

* تكون لهما نقطة تقاطع واحدة فقط

ب. سُجّلوا معادلتين لقطعين مكافئين بحيث:

* تكون لهما نقطتين تقاطع

* تكون لهما نقطة تقاطع واحدة فقط



1. ارسموا، في كلّ بند، في هيئة المحاور الخطوط البيانية المناسبة، وجدوا إحداثيات نقاط التقاطع.

$$y = -x^2 + 4x, y = x^2 + 2$$

$$y = 2x, y = x^2$$



2. ارسموا، في كلّ بند، في هيئة المحاور الخطوط البيانية المناسبة، وجدوا إحداثيات نقاط التقاطع.

$$y = -x^2 + 6x - 5, y = x^2 - 1$$

$$y = x - 2, y = x^2 - 6x + 8$$



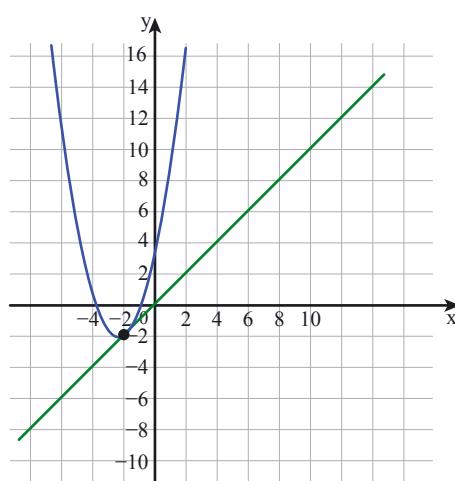
3. ارسموا، في كلّ بند، رسومًا تقريرية مناسبة، وحدّدوا عدد حلول كلّ هيئة معادلات.

$$y = -x^2 + x + 12, y = x^2 + 2x - 3$$

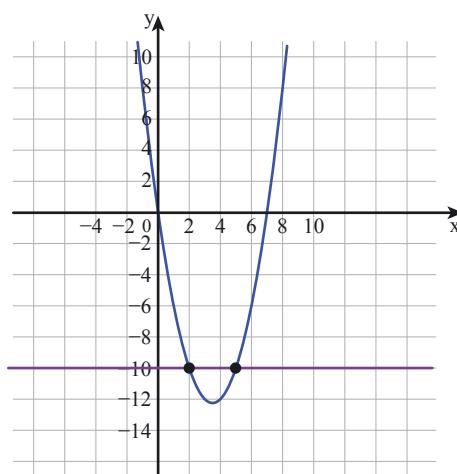
$$x - y - 3 = 0, y = x^2 + 5x - 8$$



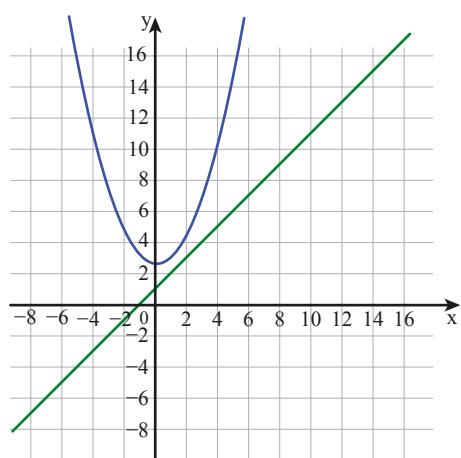
4. لائموا كل رسم بياني لهيئة المعادلات المناسبة. افحصوا إجاباتكم بطريقة جبرية.



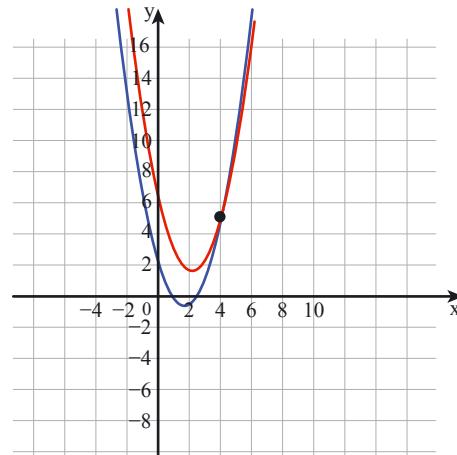
III



I



IV



II

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x \\ y = -10 \end{cases} . \text{ث.}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases} . \text{ت.}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2} \\ y = x + 1 \end{cases} . \text{ب.}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} . \text{أ.}$$



5. حلّوا.

$$\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = -x^2 + 10 \end{cases} . \text{ج.}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -2x^2 + 7 \end{cases} . \text{ت.}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x \end{cases} . \text{أ.}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} . \text{ح.}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ y = x^2 + 4x \end{cases} . \text{ث.}$$

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} . \text{ب.}$$



6. حلوا.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = (x - 2)^2 + 2 \end{cases} . ج.$$

$$\begin{cases} y = 7 \\ y = x^2 - 2 \end{cases} . ت.$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} . أ.$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} . ح.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = (x - 1)(x - 5) \end{cases} . ث.$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 + 3 \end{cases} . ب.$$



7. حلوا.

$$\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = (x - 5)^2 - 3 \end{cases} . ج.$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} . ت.$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = (x - 4)^2 \end{cases} . أ.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} . ح.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 7 \\ y = -x^2 + 6x - 5 \end{cases} . ث.$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases} . ب.$$



8. تقع نقاط تقاطع المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 4$ والقطع المكافئ من العائلة $y = ax^2 + bx + c$ على المحورين.

أ. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم والقطع المكافئ.

ب. ما هي قيمة البارامتر c في الدالة التربيعية؟

ت. أمامكم عدّة دوال تربيعية، أي دالة تحقق شروط المسألة؟ اشرحوا.

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2)(x - 6) . III$$

$$y = (x - 1)^2 - 5 . II$$

$$y = 2x^2 - 2x - 4 . I$$

ث. سجلوا ثلاثة أمثلة لدوال تربيعية مناسبة.



9. يتقاطع القطع المكافئ c ($a \neq 0$) مع محور x في نقطتين. بيّنوا أنَّ المستقيم $b = 2ax + b$ يتقاطع مع القطع المكافئ في نقطتين.

الدرس الثاني: مسائل ومعادلات



محيط مستطيل 48 سم ومساحته 80 سنتمترًا مربعًا.
جدوا أطوال أضلاع المستطيل.

نحل هيئة معادلات تربيعية بمساعدة الجبر.

1. نتطرق إلى المعطيات التي وردت في مهمة الافتتاحية.
نرمز بـ x وـ y إلى أطوال أضلاع المستطيل بالسم.

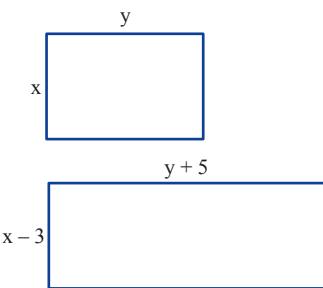
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
ب. سجلوا هيئة معادلات مناسبة.

$$x > 0, y > 0 \quad \begin{cases} x + y = 24 \\ xy = 80 \end{cases}$$

سجلت حسب المعادلة الأولى:
وعُوّضت في المعادلة الثانية كالتالي:
استمرّوا في الحلّ.

ث. كم حلاً يوجد لهيئة المعادلات؟ كم حلاً يوجد لمسألة المستطيل؟ اشرحوا.

2. معطى مستطيل (أعدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).



مدّوا أحد أضلاع المستطيل، وقصّروا الضلع الثاني كالتالي:

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. محيط المستطيل الأصلي 56 سم، ومساحة المستطيل الناتج 200 سنتمتر مربع.
جدوا قياسات المستطيل الأصلي.
كم إمكانية توجّد؟ اشرحوا.

ت. جدوا قياسات المستطيل الجديد.

3. معطى مساحة مستطيل 150 سنتمترًا مربعًا.

إذا طولنا طول أحد أضلاع المستطيل بـ 4 سم، وقصّرنا طول الضلع الآخر بـ 10 سم فنحصل على مستطيل جديد
مساحته تساوي مساحة المستطيل الأصلي.

نرمز بـ x إلى طول أحد أضلاع المستطيل المعطى بالسم، وبـ y إلى طول الضلع الثاني للمستطيل بالسم.
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. سجلوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوا.

ت. ما هي أطوال أضلاع المستطيل الأصلي؟ ما هي أطوال أضلاع المستطيل الجديد؟ كم إمكانية توجّد؟



للذكير

عندما نحل مسألة يجب أن نفحص هل الحل مناسب لشروط المسألة؟

مثال: سُجّلنا، في المهمة 3 ، هيئة معادلات

$$\begin{cases} xy = 150 \\ (x + 4)(y - 10) = 150 \end{cases}$$

نبسط المعادلة الثانية كالتالي:

نوعُض $xy = 150$ (من المعادلة الأولى) ونحصل على:

نطرح xy من الطرفين ونحصل على: $4y - 10x = 40$

حصلنا على معادلة واحدة فيها x و y أيضًا.

نسجّل $y = \frac{150}{x}$ حسب المعادلة الأولى، ونوعُض في المعادلة التي حصلنا عليها (في الإطار):

$$4 \cdot \frac{150}{x} - 10x = 40$$

$$\frac{600}{x} - 10x = 40$$

$$600 - 10x^2 - 40x = 0$$

نضرب المعادلة في x ونحصل على:

$$x^2 + 4x - 60 = 0$$

نقسم كل المعادلة على 10، ونحصل على معادلة مكافئة:

حلا هيئة المعادلات هما: (-15, -10) و (6, 25).

يمثّل x و y أطوال أضلاع المستطيل؛ لذا قيمتهما موجبة فقط.

يوجد للمسألة حل واحد. طولاً أضلاع المستطيل الأصلي هما: 6 سم، 25 سم.

4. حلوا.

مثال:

$$\begin{cases} x(x + 7) = y + 18 \\ x^2 - y = x + 2 \end{cases}$$

نبسط المعادلة الأولى ونحصل على: $x^2 + 7x = y + 18$

من هنا: $x^2 + 7x - 18 = y$

نوعُض بدلاً من y في المعادلة الثانية ونحصل على:

$$x^2 - (x^2 + 7x - 18) = x + 2$$

$$x^2 - x^2 - 7x + 18 = x + 2$$

$$-8x = -16$$

$$x = 2$$

من هنا:

نوعُض في المعادلة في الإطار ونحصل على:

$$4 + 14 - 18 = 0$$

يوجد حل واحد لهيئة المعادلات: (2, 0)

ت.

$$\begin{cases} x(x - 3) = y + 7 \\ x^2 + y = x - 1 \end{cases}$$

.أ.

$$\begin{cases} 5x - y = 11 \\ y = (x - 1)(x - 3) \end{cases}$$

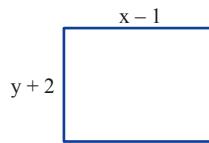
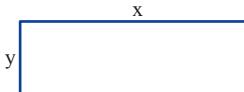
ث.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

.ب.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x(2x - 5) = y + 2 \end{cases}$$

مجموعة مهام



1. معطى مستطيل مساحته 10 سنتمترات مربعة.

(الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

قُصرنا أحد أضلاع المستطيل بـ 1 سم.

طُولنا الضلع الثاني بـ 2 سم.

نتج مستطيلاً جديداً مساحته 16 سنتمترًا مربعاً.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. سُجلوا هيئة معادلات مناسبة وحلوها.

ت. ما هي قياسات المستطيل المعطى؟



2. معطى مستطيل مساحته 48 سنتمترًا مربعاً.
إذا قُصرنا أحد الأضلاع بـ 3 سم، وطُولنا الضلع الثاني بـ 4 سم فينتج مستطيلاً مساحته أكبر بـ 2 سنتمتر مربع من مساحة المستطيل المعطى.
ارمزوا بـ x إلى طول أحد أضلاع المستطيل المعطى (بالسم)، وبـ y إلى طول الضلع الثاني (بالسم).
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
ب. سُجلوا هيئة معادلات مناسبة وحلوها.
ت. ما هي قياسات المستطيل الأصلي؟



3. أرادت مجموعة من التلاميذ أن تبرع حاسوبًا جديداً لبيت المسنين. سعر الحاسوب 4,500 شاقل.
اتفق التلاميذ أن يوزعوا المبلغ فيما بينهم بحيث يدفع كل واحد منهم المبلغ نفسه.
انضم قبل الشراء 6 تلاميذ، وقد أصبح المبلغ المطلوب من كل مشترك 25 شاقلاً أقل من المبلغ المخطط له.
كم تلميذاً اشتراك في البداية؟ اشرحوا.



4. مجموع طولي قائمين في مثلث قائم الزاوية هو 14 سم.
طولوتر المثلث 10 سم.
رمز بـ x إلى طول أحد القائمين (بالسم)، وبـ y إلى طول القائم الثاني (بالسم).
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
ب. استعينوا بنظرية فيثاغوروس، سُجلوا هيئة معادلات مناسبة وحلوها.
ت. ما هما طولاً قائميًّاً للمثلث المعطى؟





5. مجموع طولي قائمين في مثلث قائم الزاوية هو 21 سم.
طول وتر المثلث هو 15 سم.

- نرمز بـ x إلى طول أحد القائمين (بالسم)، وبـ y إلى طول القائم الثاني (بالسم).
- أ. أيّ قيم مناسبة لـ x وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟
ب. سجلوا هيئة معادلات مناسبة وحلوا.
ت. ما هما طولا قائمي المثلث المعطى؟



6. محيط مثلث قائم الزاوية هو 90 سم.
طول وتر المثلث هو 41 سم.
جدوا طولي القائمين ومساحة المثلث.



7. حلوا هيئات المعادلات.

$\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = xy \\ (x + 3)(y - 1) = xy \end{cases}$. ث.	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$. ت.	$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 24 \end{cases}$. ب.	$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 24 \end{cases}$. أ.
--	------	---	------	--	------	---	------



8. حلوا هيئات المعادلات.

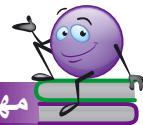
$\begin{cases} (x - 5)(y - 1) = xy - 10 \\ (x + 3)(y + 7) = xy + 62 \end{cases}$. ث.	$\begin{cases} x + y = 42 \\ x^2 + y^2 = 900 \end{cases}$. ت.	$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ xy = 12 \end{cases}$. ب.	$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x(1 + y) = 44 \end{cases}$. أ.
--	------	---	------	--	------	---	------



9. حلوا هيئات المعادلات.

$\begin{cases} (x + 3)(y + 2) = xy + 13 \\ (x + 2)(y + 1) = xy + 6 \end{cases}$. ج.	$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - xy = 5 \end{cases}$. ت.	$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x^2 - 3xy = 4 \end{cases}$. أ.
---	------	---	------	---	------

$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ (x + 1)(y + 1) = xy + 4 \end{cases}$. ح.	$\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = 2 \\ (x - 1)(y - 4) = 2 \end{cases}$. ث.	$\begin{cases} xy = 15 \\ (x + 6)(y - 3) = 18 \end{cases}$. ب.
---	------	--	------	--	------



مهام إضافية

1. أمامكم هيئة معادلات:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 18 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

حل عماد، ميسون، دعاء ويوسف هيئات المعادلات.
من منهم حلّه صحيح؟ ما هي الأخطاء في حلول الآخرين؟

$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 18 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $x = 2y$ $2y^2 - 2y^2 = 18$ $0 = 18$ <p>لا يوجد حلٌ لهيئة المعادلات</p>	$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 18 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $y = \frac{x}{2}$ $x^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} = 18$ $x^2 - x^2 = 18$ $0 = 18$ <p>لا يوجد حلٌ لهيئة المعادلات</p>
$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 18 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $x = 2y$ $4y^2 - 2y^2 = 18$ $2y^2 = 18$ $y^2 = 9$ $y_1 = 3 \quad y_2 = -3$ $x_1 = 2 \cdot 3 \quad x_2 = 2 \cdot (-3)$ $x_1 = 6 \quad x_2 = -6$ <p>الحلان هما: $(-6, -3)$ أو $(6, 3)$</p>	$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 18 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $y = \frac{x}{2}$ $x^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{4} = 18$ $x^2 - \frac{x^2}{2} = 18$ $\frac{x^2}{2} = 18$ $x^2 = 36$ $x_1 = 6 \quad x_2 = -6$ $6 - 2y = 0 \quad -6 - 2y = 0$ $y_1 = 3 \quad y_2 = -3$ <p>الحلان هما: $(-6, -3)$ أو $(6, 3)$</p>

2. أ. حلوا هيئة المعادلات:

$$\begin{cases} y^2 - 3x = 40 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

ب. جدوا حلول هيئات المعادلات التالية حسب حلٌّ هيئات المعادلات في البند أ.

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 40 & \text{III} \\ x = y + 4 & \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 - 6x = 80 & \text{I} \\ y = x + 4 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 6x = 40 & \text{VI} \\ y = 2x + 4 & \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y^2 = -40 & \text{II} \\ y - x = 4 & \end{cases}$$

3. أمامكم هيئة معادلات:

حل جمال، عماد ورامي هيئه المعادلات بطريقته الخاصة.

بدأ رامي يحل كالتالي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x = \frac{y-3}{2} \end{cases}$$

نحوّض بدلاً من x في المعادلة الأولى

$$\left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + y^2 = 26$$

بدأ عماد يحل كالتالي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x = \frac{y-3}{2} \end{cases}$$

بناء على المعادلة الثانية

$$y = 2x + 3$$

نحوّض بدلاً من y في المعادلة الأولى.

بدأ جمال يحل كالتالي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x = \frac{y-3}{2} \end{cases}$$

بناء على المعادلة الأولى

$$y^2 = 26 - x^2$$

بناء على المعادلة الثانية

$$2x = y - 3$$

$$2x + 3 = y$$

لذا؛

أ. أكملوا حل هيئه المعادلات في كل طريقة من الطرق التي اقترحها جمال، عماد ورامي.

ب. حلوا بواسطة الطرق الثلاث هيئه المعادلات:

$$\begin{cases} x^2 - y = 18 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

ت. اختاروا إحدى طرق الحل، وحلوا هيئه المعادلات:

$$\begin{cases} x - 2y^2 = 1 \\ x - 8y = 1 \end{cases}$$

4. حلوا هيئات المعادلات التالية.

ث. $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 31 \\ x + y = 5 \end{cases}$

أ. $\begin{cases} x^2 + 2y = 10 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2y = 20 \\ x + y = 11 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

5. حلوا هيئات المعادلات التالية.

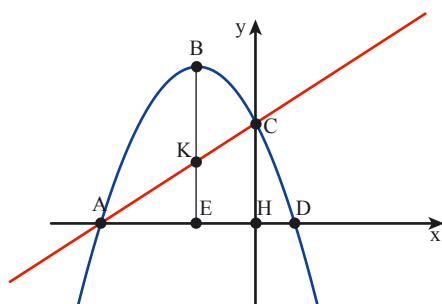
ت. $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 25 \\ 7y - x = 24 \end{cases}$

أ. $\begin{cases} xy = 24 \\ 4x + y = 20 \end{cases}$

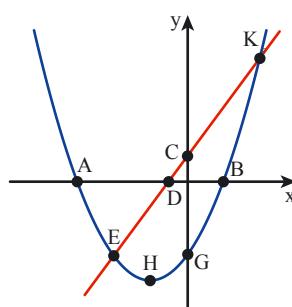
ث. $\begin{cases} x(x - y) = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} (x - 4)(y + 2) = 12 \\ y - 2x = -8 \end{cases}$

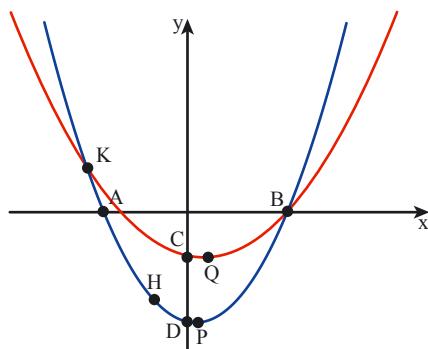
الدرس الثالث: نقاط تقاطع الخطوط البيانية



1. نتطرق إلى الدوال التي وردت في مهمة الافتتاحية.
- لأي قيم x يتحقق $f(x) = g(x)$ ؟
 - ما المشترك للنقطتين C و D؟
 - احسبوا مساحة المثلث ΔAKD .
2. معطى الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.
- احسبوا إحداثيات النقاط C, B, A.
 - احسبوا مساحة المثلث ΔACH . اشرحوا.
 - جدوا التمثيل الجيري للمستقيم الذي يمر عبر النقطتين A و C.
 - يتعادل المستقيم BE مع المحور x . جدوا إحداثيّ النقطة K.
 - احسبوا مساحة الشكل الرباعي EKCH. اشرحوا.
 - احسبوا مساحة المثلث ΔACD . اشرحوا.



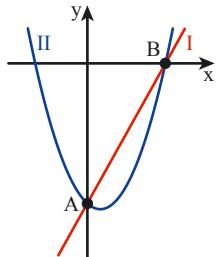
3. معطى خطان بيانيان للدالتين:
 $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
 $g(x) = 4x + 2$
- جدوا إحداثيات النقاط H, G, K, E, D, C, B, A.
 - احسبوا مساحة المثلث ΔABH . اشرحوا.
 - لأي قيم x يتحقق $f(x) > g(x)$ ؟



4. معطى خطان بيانيان للدالتين Rأسهما P و Q.
- $$f(x) = 2x^2 - x - 15$$
- $$g(x) = x^2 - x - 6$$
- جدوا الخط البياني المناسب لكل دالة.
 - جدوا إحداثيات النقاط Q, P, K, D, C, B, A.
 - لأي قيم x يتحقق $f(x) < g(x)$ ؟



مجموعة مهام



1. أمامكم خطان بيانيان للداللتين:

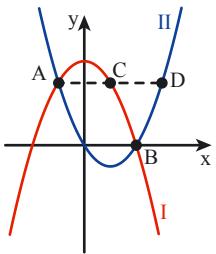
$$g(x) = x^2 - x - 6, f(x) = 2x - 6$$

أ. لائوا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. حلوا هيئة المعادلات

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$$

ت. جدوا إحداثيات النقطتين A و B.



2. أمامكم خطان بيانيان للداللتين:

$$g(x) = 4 - x^2, f(x) = x^2 - 2x$$

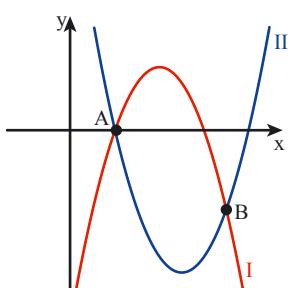
أ. لائوا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيات النقطتين A و B.

ت. لأي قيم x يتحقق $f(x) < g(x)$.

ث. يوازي محور x. جدوا إحداثيات النقطتين C و D.

ج. جدوا طول القطعة AD.



3. أمامكم خطان بيانيان للداللتين:

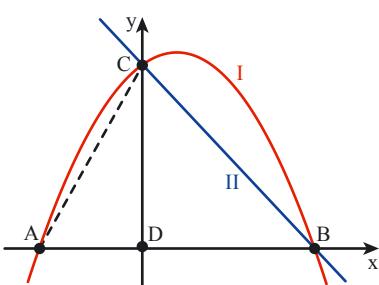
$$g(x) = -x^2 + 8x - 12, f(x) = x^2 - 10x + 16$$

أ. لائوا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيات النقطتين A و B.

ت. جدوا طول القطعة AB (إرشاد: استعينوا بمثلث قائم الزاوية).

ث. في أي مجال يتحقق $f(x) > g(x)$.



4. أمامكم خطان بيانيان للداللتين:

$$g(x) = -3x + 15, f(x) = -x^2 + 2x + 15$$

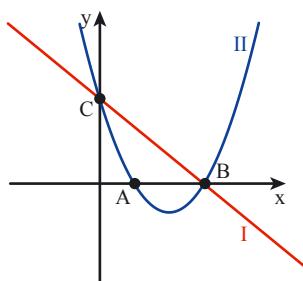
أ. لائوا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيات النقاط C, B, A.

ت. أوصلت النقطة A بالنقطة C، ونتج المثلث ΔABC . احسبوا مساحته.

ث. احسبوا طولي القطعتين AC و CB (استعينوا بنظرية فيثاغوروس).

ج. احسبوا محيط المثلث ΔABC بالتقريب.



5. أمامكم خطان بيانيان للدالّتين:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x + 3$$

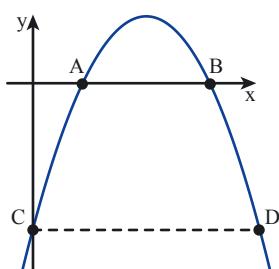
أ. لائموا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيات النقاط A, B, C.

ت. احسبوا مساحة المثلث ΔABC .

ث. احسبوا طولي القطعتين AC و BC (استعينوا بنظرية فيثاغوروس).

ج. احسبوا محيط المثلث ΔABC بالتقريب.



6. أمامكم الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

أ. جدوا إحداثيات النقاط A, B, C.

ب. جدوا التمثيل الجيري للمستقيم الذي يمر عبر النقاطين B و C.

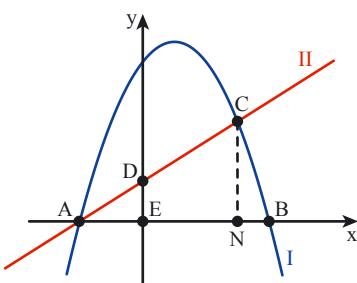
ت. يوازي محور x، ويتقاطع مع القطع المكافئ في النقاطين C و D.

احسبوا إحداثي النقطة D.

ث. ما هو نوع الشكل الرباعي ABDC؟ اشرحوا.

ج. احسبوا مساحة الشكل الرباعي ABDC.

ح. احسبوا محيط الشكل الرباعي ABDC بالتقريب.



7. أمامكم خطان بيانيان للدالّتين:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8, \quad g(x) = x + 2$$

أ. لائموا كل خط بياني للدالة المناسبة.

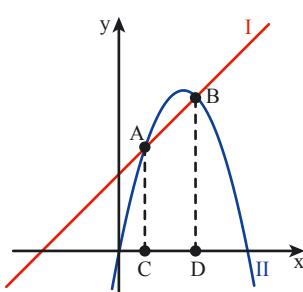
ب. جدوا إحداثيات النقاط A, B, C.

ت. $DENC$ هو شبه منحرف.

من هما قاعدتا شبه المنحرف؟

جدوا طول كل قاعدة، وطول الارتفاع للقاعدة.

ث. جدوا مساحة شبه المنحرف.



8. أمامكم خطان بيانيان للدالّتين:

$$g(x) = x + 3, \quad f(x) = -x^2 + 5x$$

أ. لائموا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيات النقاطين A و B.

ت. $ABDC$ هو شبه منحرف قائم الزاوية.

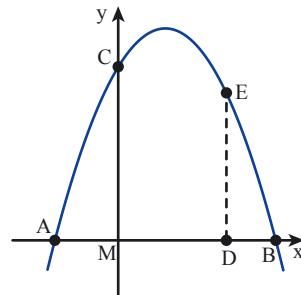
من هما قاعدتا شبه المنحرف؟

جدوا طول كل قاعدة، وطول الارتفاع للقاعدة.

ث. جدوا مساحة شبه المنحرف.



٩. أمامكم الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2 + 3x + 10$.



أ. جدوا إحداثيات النقاط A, B, C.

ب. يتعامد ED مع محور x وطوله 6 وحدات.

ما هو نوع الشكل الرباعي MCED؟

جدوا مساحته.

ت. جدوا محيط الشكل الرباعي MCED.

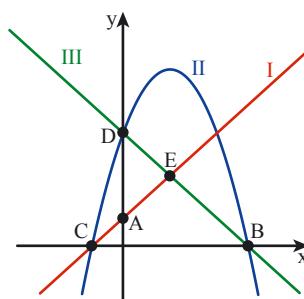


١٠. أمامكم ثلاثة خطوط بيانيه للدوال:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

$$g(x) = x + 1$$

$$m(x) = 4 - x$$



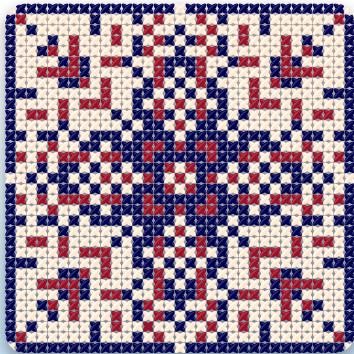
أ. لائموا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. احسبوا مساحة المثلث ΔAED .

ت. احسبوا محيط المثلث ΔAED بالتقريب.



الدرس الرابع: متبادرات مربعة



غزلت هدى شرشفا للطاولة.

يجب أن تكون مساحة الشرسف أكبر من 8 أمتار مربعة كي يكون مناسباً للطاولة. اشتريت هدى شريط طوله 12 متراً لتزيين أطراف الشرسف. أرادت أن تستعمل كل الشريط الذي اشتريته وأن تضعه حول الطاولة. افحصوا إمكانيات مختلفة لقياسات الشرسف.

نحل مسائل بمساعدة متبادرات.

1. نتطرق إلى المعطيات التي وردت في مهمة الافتتاحية.

x يمثل عرض الشرسف (بالأمتار).

أ. أي قيمة مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا تعابير جبرية لطول الشرسف ومساحته.

ت. قال سامر: نعرف أن مساحة الشرسف يجب أن تكون أكبر من 8 أمتار مربعة.

أستطيع أن أجد قياسات الشرسف إذا كانت مساحتها 8 أمتار مربعة بالضبط.

حل المعادلة $8 = x(6 - x)$.

ما هي قياسات الشرسف الذي وجده سامر؟

استعينوا باقتراح سامر واقترحوا قياسات ممكنة لشرسف هدى.

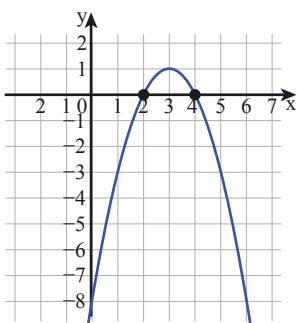
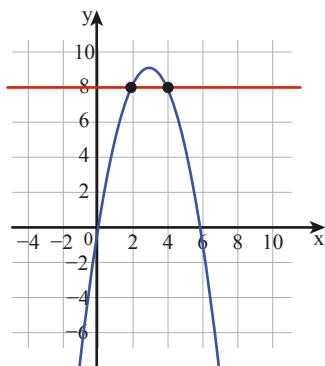
ث. رسم وسام الخط البياني للدالة $y = x(6 - x)$

والمستقيم الذي معادلته $y = 8$.

ما هي إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم والقطع المكافئ؟

ما معناها في القصة؟

ما هي القياسات الممكنة لشرسف هدى؟



ج. سجلت مريم: $x(6 - x) > 8$

حصلت على: $-x^2 + 6x - 8 > 0$

ورسمت الخط البياني للدالة $y = -x^2 + 6x - 8$

أيّ قسم من الخط البياني يصف المتباعدة التي سجلتها مريم؟

ما هي إحداثيات النقاط الصفرية للقطع المكافئ الذي رسمته؟

ما هي القياسات الممكنة لشرسف هدى؟

2. معطى الدالة $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

أ. جدوا النقاط الصفرية للدالة.

ب. ارسموا رسمة تقريبية للقطع المكافئ المناسب للدالة، وعيّنوا عليها النقاط الصفرية التي وجدتموها.

ت. ما هو حل المتباعدة $2x^2 - 4x - 6 < 0$ ؟

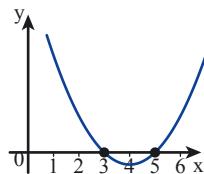


نحل المباينات التربيعية حسب المراحل التالية:

مثال:

$$\begin{aligned} \text{ما هو حل المباينة } 0 < -x^2 - 8x + 15 ? \\ \text{ما هو حل المباينة } 0 > -x^2 - 8x + 15 ? \end{aligned}$$

$$y = x^2 - 8x + 15 \quad \text{النقطتان الصفريتان للدالة هما } (0, 0) \text{ و } (5, 0).$$



حل المباينة التربيعية $0 < -x^2 - 8x + 15$ هو المجال الذي تكون فيه قيم الدالة سالبة: كل الأعداد بين 3 إلى 5، هذا يعني أن $3 < x < 5$.

حل المباينة التربيعية $0 > -x^2 - 8x + 15$ هو المجال الذي تكون فيه قيم الدالة موجبة: كل الأعداد الأصغر من 3 أو الأعداد الأكبر من 5، هذا يعني أن $x < 3$ أو $x > 5$.

- نجد النقاط الصفرية المناسبة للدالة التربيعية المناسبة.

- نرسم رسمة تقريرية للقطع المكافئ المناسب، ونعيّن عليه النقاط الصفرية.

- نجد حل المباينة التربيعية من الرسمة.

3. حلوا المباينات.

أ. $x^2 - 2x - 3 < 0$

ب. $x^2 - 7x + 12 < 0$

ت. $x^2 - 5x > 0$

ث. $-x^2 + 6x - 8 > 0$

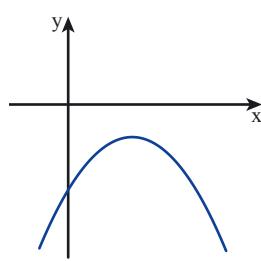


4. قال عاد: لا يوجد حل للمباينة $0 > x^2 + 9$, لأنّه لا يوجد حل للمعادلة $0 = x^2 + 9$.
 قال سائد: الدالة $y = x^2 + 9$ موجبة دائمًا؛ لذا حل المباينة $0 > x^2 + 9$ هو **جميع الأعداد** الحقيقية. من منهما قوله صحيح؟ اشرحوا.



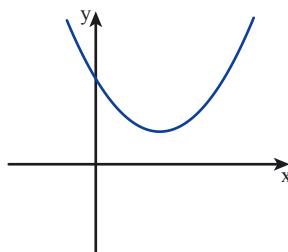
إذا كانت الدالة التربيعية دون نقاط صفرية، فإنها كلها موجبة أو كلها سالبة.
لذا، حلول المتباينات المناسبة هي **كل الأعداد أو ولا أي عدد**.

أمثلة



$$y = -x^2 + 6x - 10$$

قيم الدالة
سالبة لـ كل قيمة x



$$y = x^2 - 6x + 10$$

قيم الدالة
موجبة لـ كل قيمة x

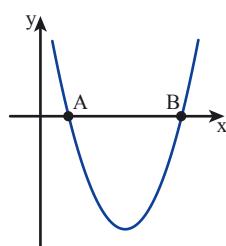
لذا، المتباينة $0 > -x^2 + 6x - 10$ لا يوجد لها حل.

أما حل المتباينة
 $-x^2 + 6x - 10 < 0$
هو **كل الأعداد الحقيقية**.

لذا، حل المتباينة $0 > x^2 - 6x + 10$ هو **كل الأعداد الحقيقية**.

أما المتباينة
 $x^2 - 6x + 10 < 0$ لا يوجد لها حل.

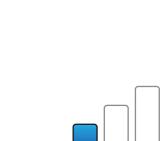
أ. ما هو حل



1. أمامكم الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

أ. ما هو حل المتباينة $0 < x^2 - 6x + 5$ ؟

ب. ما هو حل المتباينة $0 > x^2 - 6x + 5$ ؟



2. حلوا.

أ. $x^2 + 4 > 0$

ب. $-x^2 + 4x > 0$

ت. $-x^2 - 9 < 0$

ث. $x^2 - 2x - 8 > 0$



3. حلوا.

ت. $-x^2 + 6x - 9 < 0$

أ. $x^2 - 8x + 12 < 0$

ث. $x^2 + 4 < 0$

ب. $x^2 - 6x + 9 > 0$



4. حلوا.

ت. $2(x - 2)(x + 2) < 0$

أ. $2(x - 2)^2 + 8 < 0$

ث. $x^2 - 8x + 16 < 0$

ب. $-2x^2 - 8 < 0$



5. معطى مستطيل محيطه 20 سم.

x يمثل طول الضلع بالسم.

أ. سُجّلوا تعبيرًا جبريًّا لطول الضلع الثاني للمستطيل.

أيّ قيم مناسبة x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. معطى أيضًا أن مساحة المستطيل أكبر من 16 سنتيمترًا مربعًا.

اكتبوا متباينة مناسبة، وجدوا جميع الإمكانيات لطول الضلع x .



6. محيط ملعب مستطيل الشكل هو 100 م، ومساحته أكبر من 600 متر مربع.

ما هي القيم المناسبة لقياسات الملعب؟ اشرحوا.



7. يوجد في الحي ملعب مستطيل الشكل قياساته 30 م × 40 م.

أعلنت البلدية أنها ترغب في تكبير أطوال أضلاع الملعب بالطريقة التالية:

ستكون بالإضافة لطول الضلع القصير ضعفيًّا بالإضافة لطول الضلع الطويل.

يجب أن تكون مساحة الملعب المكبير أصغر من 1,800 متر مربع.

ما هي القيم المناسبة بالإضافة لطول الضلع القصير للملعب الأصلي؟



8. يوجد في حرش 5,000 شجرة.

يكبر عدد الأشجار كل سنة بنسبة p مئوية.

في أي مجال يجب أن يقع p كي يكون عدد الأشجار بعد سنتين أكبر من 7,200 شجرة؟

الدرس الخامس: متابيات تربيعية (تكميلة)



متلك عائلة سليم قطعة أرض قياساتها 55×20 م.

{ أعقاب تعبيد شارع **جنوب** قطعة الأرض، استولت البلدية على قسم من مساحة قطعة الأرض.

اقرحت البلدية على عائلة سليم مساحة لها نفس عرض المساحة التي استولت عليها، لكنها تقع **شرقي** قطعة الأرض.

x يمثل طول ضلع (بالأمتار) المساحة التي استولت عليها البلدية، وطول ضلع (بالأمتار) مساحة التعويض (انظروا الرسمة).

أي تغيير في قطعة الأرض يكون عادل؟

نحل مسألة بمساعدة معادلة ومتباينة.

نطرق في المهام 1 - 4 إلى المسألة التي وردت في مهمة الافتتاحية.

1. أ. اكتبوا تمثيلات جبرية للدوال التالية:

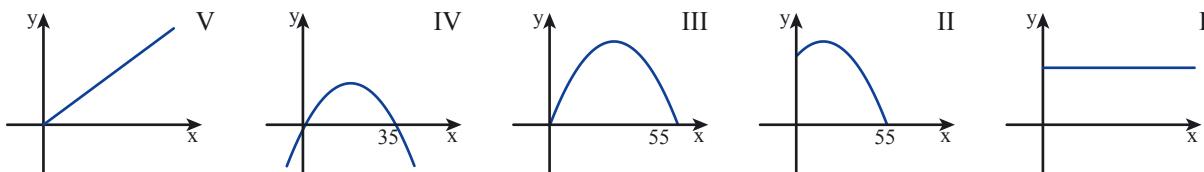
$p(x)$ - مساحة التعويض.

$m(x)$ - المساحة المستولى عليها.

$k(x)$ - مساحة الأرض الأصلية.

$s(x)$ - الفرق بين مساحة قطعة الأرض الجديدة والمساحة الأصلية.

ب. لائموا كل خط بياني للدالة المناسبة.



2. أمامكم معادلات ومتباينات مركبة من التعبيرات التي سجلتموها في المهمة 1. سجلوا، في كل بند، معادلة أو متباينة، واشرحوا بالكلمات، ماذا تعبر في سياق المسألة؟

مثال: $h(x) = k(x)$

مساحة القطعة الجديدة تساوي مساحة القطعة الأصلية.

$$1100 = (20 + x)(55 - x)$$

ت. $h(x) - k(x) > 0$

ب. $p(x) > m(x)$

أ. $s(x) = 0$

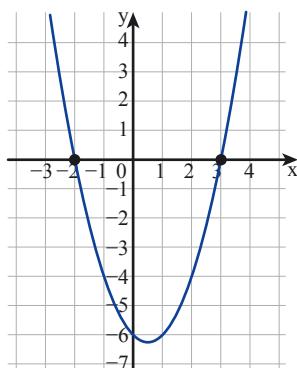
3. أ. ما هو طول ضلع المساحة التي استولت عليها البلدية، إذا كانت مساحة التعويض 250 مترًا مربعًا؟

ب. ما هو طول ضلع المساحة التي استولت عليها البلدية، إذا كانت مساحة التعويض 550 مترًا مربعًا؟ قربوا حتى منزلتين على يمين النقطة العشرية.

ت. هل يمكن أن تكون مساحة التعويض 800 متر مربع؟

إذا كانت الإجابة نعم، ما هو طول ضلع مساحة التعويض في هذه الحالة؟ وإذا كانت الإجابة لا، اشرحوا لماذا.

4. أي تغيير في قطعة الأرض يكون عادلاً؟ (لا يخسر أي طرف).
 أي تغيير يكون لصالح عائلة سليم؟
 أي تغيير يكون الأفضل لعائلة سليم؟



5. أمامكم الخط البياني للدالة التربيعية $y = x^2 - x - 6$.

أ. ما هي النقاط الصفرية للدالة؟

$$x^2 - x - 6 = 0$$

ب. لأئمها كل حل للمتباينة المناسبة.

$$-2 < x < 3 \quad x^2 - x - 6 \neq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3 \quad x^2 - x - 6 > 0$$

$$x \neq -2 \text{ وأيضاً } x \neq 3 \quad x^2 - x - 6 < 0$$

$$x < -2 \text{ أو } x > 3 \quad x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$x \leq -2 \text{ أو } x \geq 3 \quad x^2 - x - 6 \leq 0$$



نعرض التباين بين الطرفين بمساعدة الإشارات $<$, $>$, \leq , \geq , \neq .

تعرض الإشارتان $<$, $>$ تباين "قوي". التعبير في طرف واحد أكبر من التعبير في طرف آخر بشكل واضح.

تعرض الإشارتان \leq , \geq تباين "ضعيف". التعبير في طرف واحد أكبر أو يساوي التعبير في الطرف الآخر.

تدل الإشارة \neq إلى أن الطرفين غير متساوين، لكنها لا تدل على علاقة الترتيب بينهما.



مجموعة مهام



1. كم نقطة مشتركة توجد لكل زوج من الدوال؟ اشرحوا.

$$f(x) = 4x - x^2, g(x) = 4$$

$$f(x) = x^2 - 1, g(x) = -2x^2$$

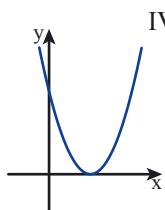
$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1, g(x) = -x^2 + x$$

$$f(x) = x + 3, g(x) = x^2 + 5x + 6$$

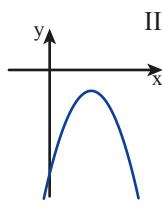


2. أمامكم خطوط بيانية للدوال:

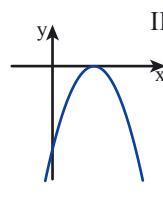
$$y = -x^2 - 4x - 6$$



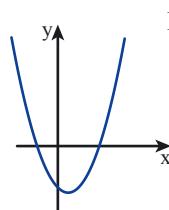
$$y = -x^2 + 4x - 4$$



$$y = x^2 - x - 2$$



$$y = x^2 - 4x + 4$$



أ. لائوا كل خط بياني للدالة المناسبة.

ب. حلوا المطالبات بمساعدة الخطوط البيانية.

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 , \quad x^2 - 4x + 4 < 0$$

$$x^2 - x - 2 \neq 0 , \quad x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 4 > 0 , \quad -x^2 + 4x - 4 < 0$$

$$-x^2 - 4x - 6 > 0 , \quad -x^2 - 4x - 6 < 0$$



3. حلوا.

$$x^2 + 3x + 4 \geq 0$$

$$x^2 + 2(x - 5) = 5$$

$$(x + 7)(x - 2) < 11 - (x - 4)^2$$

$$(x - 5)^2 + (x + 3)^2 \neq 16x + 2$$



4. ارسموا، في كل بند، رسوماً تقريبية مناسبة، وحددوا عدد الحلول لكل هيئة معادلات.

$$\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = -x^2 + 6 \end{cases}$$

ج.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -2x^2 + 7 \end{cases}$$

ت.

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

أ.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

ح.

$$\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ y = x^2 + 4x \end{cases}$$

ث.

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

ب.



5. حلوا.

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 3x - 1 \\ y = x^2 - 5x + 4 \end{cases}$$

ت.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

ب.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$$

أ.



6. العدد الأول أكبر بـ 3 من العدد الثاني، وحاصل ضربهما أكبر من 40.
ما هي القيم المناسبة للعدد الأصغر من بين العددين؟



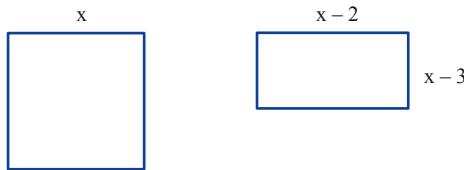
7. مجموع مربع عددين متتاليين أصغر من 145.
ما هي القيم المناسبة للعدد الأصغر من بين العددين؟ اشرحوا.



8. مجموع عددين هو 10، ومجموع مربعهما أصغر من 52.
ما هي القيم المناسبة للعدد الأصغر من بين العددين؟ اشرحوا.



9. أمامكم مربع ومستطيل، مجموع مساحتيهما 156 سنتيمترًا مربعًا.
(أُعدت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).



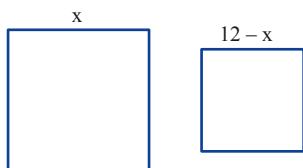
- أ. أي أعداد مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟
اشرحوا.

ب. ما هو طول ضلع المربع؟



10. أمامكم مربعان، مجموع مساحتيهما 80 سنتيمترًا مربعًا.
(أُعدت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

- أ. أي أعداد مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
ب. جدوا طول ضلع كل مربع.



11. أطوال أضلاع مثلث هي 5 سم، 12 سم، 14 سم.

كُبروا طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالطول نفسه. نتج مثلث قائم الزاوية.

- أ. جدوا بكم كُبروا طول كل ضلع؟
ب. جدوا محيط ومساحة المثلث القائم الزاوية الناتج.



12. مساحة صورة مستطيلة الشكل هي 720 سنتيمترًا مربعًا.

عرض الإطار حول الصورة هو 3 سم.
المساحة الكلية للصورة مع الإطار هي 1,080 سنتيمترًا مربعًا.
جدوا قياسات الصورة.





نحافظ على لياقة رياضية

معادلات ومسائل كلامية مع كسور

1. معطى أربعة تعبيرات: $\frac{5x+4}{3}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{8x+40}{x+5}$

ابنوا معادلات من كلّ تعبيرين، بحيث يكون الحلّ:

- أ. 4 ب. -1 ج. -3 ث. 24 ح. 1.5

2. أيّ أعداد أو تعبيرات يجب تسجيلها في المكان الفارغ في المعادلة $\frac{7x+2}{7} = \frac{7x+ }{7}$ ، بحيث يكون الحلّ:
أ. كلّ عدد. ب. ولا أيّ عدد. ث. 1 ج. 0

3. سجلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

ت. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} = 0$ ب. $\frac{9}{x} - \frac{7-x}{x-1} = 1$ أ. $\frac{x-2}{x-4} = \frac{2}{x-4}$

4. سجلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

ت. $1 - \frac{6}{x} - \frac{x-3}{6x} = \frac{1-x}{x-1}$ ب. $\frac{3x+10}{2x-5} + 1 = \frac{5x-13}{2x-8}$ أ. $\frac{2x+18}{x} - \frac{2x+3}{x-3} = 0$

5. اختار **فؤاد** عدداً (ارمزوا له بـ x).

قسم العدد الذي اختاره على 2، أضاف 8 إلى النتيجة وحصل على 11.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. جدوا العدد الذي اختاره **فؤاد**. اشرحوا كيف وجدتم؟

6. اختارت **مريم** عدداً (ارمزوا له بـ x).

ضربت العدد في 3، طرحت 1 من حاصل الضرب، قسمت النتيجة على 5 وحصلت على 7.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. جدوا العدد الذي اختارتة **مريم**. اشرحوا

7. اختار **رياض** عدداً (ارمزوا له بـ x).

أضاف له 3، قسم المجموع على حاصل ضرب العدد في $\frac{1}{7}$ إلى العدد الناتج، وحصل **رياض** بعد كلّ الحسابات على $\frac{1}{2}$.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. جدوا العدد الذي اختاره **رياض**. اشرحوا.