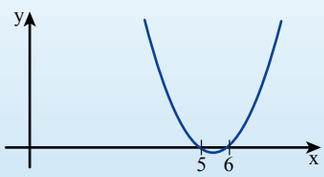
الوحدة الرابعة والعشرون: من دالّة تربيعيّة إلى معادلة تربيعيّة

الدرس الأوّل: القانون لحلّ المعادلة التربيعيّة

طلب المعلم من **يوسف** أن يجد النقاط الصفريّة للدوال التربيعيّة:

$y = x^2 - 11x + 30$ $y = 2x^2 + 9x - 5$ وأن يرسم رسومًا تقريبيّة مناسبة.



حلّل **يوسف** $y = x^2 - 11x + 30$ إلى عوامل كالتالي: $y = (x - 5)(x + 6)$

سجّل المعادلة:

$0 = (x - 6)\ (x - 5)$ وحلّ $x_1 = 5$ $x_2 = 6$

ورسم الرسمة التقريبيّة (انظروا الرسمة اليسرى):

- هل حلّ **يوسف** صحيح؟

- هل يمكنكم الاستعانة بطريقة **يوسف** لإيجاد النقاط الصفريّة للدالّة $y = 2x^2 + 9x - 5$ وأن ترسموا الرسمة التقريبيّة المناسبة؟

سنتعلّم كيفية حلّ معالات تربيعيّة.

1. حاولوا أن تجدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.
إذا لم تنجحوا فأشيروا بـ x.

أ. $y = x^2 + 9x + 18$ ت. $y = x^2 - 5x + 6$

ب. $y = 5x^2 + 3x + 8$ ث. $y = 2x^2 - 5x - 3$

للتذكير

نسمّي نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع محور x "**النقاط الصفريّة**" للدالّة.
يمكن إيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة بمساعدة حلول المعادلة $f(x) = 0$.

2. أمامكم **قانون الجذور** الّذي بمساعدته نجد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة التربيعيّة
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

نبرهن فيما بعد، خلال الوحدة، أنّ هذا القانون صحيح $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

أ. استعينوا بالقانون وحلّوا المعادلة $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

ب. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة. ما هي النقاط الصفريّة للدالّة $y = 2x^2 + 9x - 5$؟

نحلّ **معادلة تربيعيّة** لإيجاد النقاط الصفريّة للدالّة.

يمكن أن نمثّل المعادلة التربيعيّة بصورتها العامّة كالتالي: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

نسمّي حلول المعادلة "**جذور المعادلة**".

يمكن إيجاد جذور المعادلة التربيعيّة $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ بمساعدة **قانون الجذور (الدستور العامّ)**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يظهر فيما بعد، خلال الوحدة، الشرح للطريقة الّتي توصلنا بواسطتها إلى القانون.

مثال: معطى الدالّة $f(x) = -3x^2 + 13x - 4$ $\quad a = -3 \quad b = 13 \quad c = -4$

لإيجاد النقاط الصفريّة للدالّة، نحلّ المعادلة التربيعيّة التالية: $-3x^2 + 13x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{-6} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 11}{-6} = \frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{-13 - 11}{-6} = 4$$

إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة هي $(4\ ,0)$ وَ $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

للتذكير

كلّ عدد **موجب** له جذرين تربيعيّين، أحدهما **موجب** والآخر **سالب**.

نرمز إلى **الجذر التربيعيّ الموجب** كالتالي: $\sqrt{\ }$

نرمز إلى **الجذر التربيعيّ السالب** كالتالي: $-\sqrt{\ }$

مثال: الجذر التربيعيّ الموجب للعدد 9 هو $\sqrt{9} = 3$

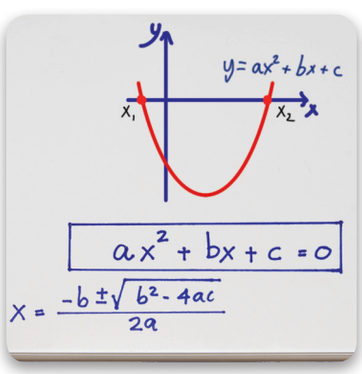
الجذر التربيعيّ السالب للعدد 9 هو $-\sqrt{9} = -3$

انتبهوا، عندما نكتب بالكلمات "الجذر التربيعيّ لـ ...." نقصد الجذرين.

عندما نكتب " $\sqrt{\ }$ " نقصد الجذر التربيعيّ الموجب فقط.

لذا؛ عندما نكتب ± قبل الإشارة $\sqrt{\ }$ في قانون الجذور للمعادلة التربيعيّة نقصد الجذر التربيعيّ الموجب والجذر التربيعيّ السالب.

مثال: $\pm\sqrt{121} = \pm 11$ ، هذه الطريقة المختصرة لتسجيل $\sqrt{121}$ وَ $-\sqrt{121}$.



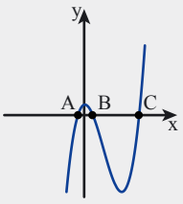
3. حدّدوا، في كلّ بند، قيم البارمترات a, b وَ c ، وجدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة.

أ. $y = 5x^2 + 3x - 14$ ت. $y = x^2 - 9x + 14$ ج. $y = -x^2 - 3x + 10$

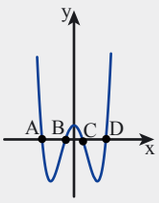
ب. $y = 2x^2 - x - 15$ ث. $y = 3x^2 - 5x - 12$ ح. $y = -5x^2 - 4x + 1$

تعرّفنا، في هذا الدرس، على القانون لإيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة من الدرجة الثانية، هذا يعني القانون لإيجاد جذور المعادلة التربيعيّة. حاول رياضيون، خلال سنوات كثيرة، أن يكتشفوا قانونًا شبيهًا لإيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة لدوال (أو جذور معادلات) درجتها أعلى من الدرجة الثانية،

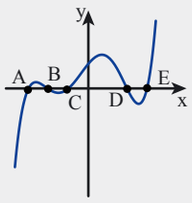
مثل:



$y = 0.1x^3 - 4x^2 - 4x + 100$



$y = 0.1x^4 - 4x^2 + 10$



$y = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$

لم تكن الإجابة عن ذلك بسيطة. طُوّرت القوانين العامّة لإيجاد جذور المعادلة من الدرجة الثانية، الثالثة والرابعة (هذا يعني تعابير تعتمد على العمليّات الحسابيّة وإخراج جذر معاملات المعادلة) قبل حوالي 400 سنة.

يُعتبر إيجاد قوانين شبيهة لجذور المعادلات من الدرجة الخامسة فما فوق، تحديًّا للرياضيين خلال سنوات إضافيّة، حتى أثبت الرياضيّ جولوا، قبل حوالي 200 ، النظريّة أنّه لا يمكن إيجاد قوانين الجذور للمعادلات من الدرجة ال 4 فما فوق. لا تتطرّق هذه النظريّة لحقيقة وجود الجذور، بل لإيجادها بواسطة القانون الذي يعتمد على عمليّات حسابيّة بين معاملات المعادلات وهي مناسبة لجميع المعادلات من الدرجة نفسها.

مجموعة مهامّ

1. حدّدوا، في كلّ بند، هل توجد نقاط صفريّة للدالّة؟
إذا كانت الإجابة بنعم فجدوا إحداثيّات النقاط.

أ. $y = x^2 - 4x - 21$ ج. $y = -8x^2 + 7x - 3$

ب. $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5$ ح. $y = -3x^2 - 6x + 9$

ت. $y = x^2 - 9x + 18$ خ. $y = 9x^2 - 6x + 1$

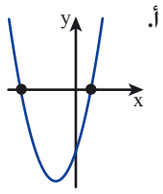
ث. $y = x^2 - 5x - 14$ د. $y = 2x^2 - 3x + 20$

2. حلّوا المعادلات، وافحصوا الحلول.

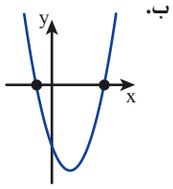
أ.	$2x^2 - 7x + 5 = 0$	خ.	$3x^2 - 8x + 9 = 0$
ب.	$-2x^2 + 5x + 3 = 0$	د.	$-2x^2 + x + 15 = 0$
ت.	$x^2 - 9x + 14 = 0$	ذ.	$7x^2 + 15x - 100 = 0$
ث.	$x^2 - 19x - 150 = 0$	ر.	$-5x^2 + 14x - 8 = 0$
ج.	$-3x^2 - 5x - 12 = 0$	ز.	$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$
ح.	$-6x^2 + 36x - 54 = 0$	س.	$5x^2 + 3x - 14 = 0$

3. معطاة الدالّة $y = x^2 - 3x - 10$.
أمامكم عدّة خطوط بيانيّة، أيّ خطّ بيانيّ يمكن أن يكون مناسبًا للدالّة؟ اشرحوا.

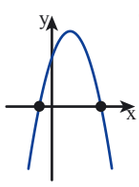
أ.



ب.



ت.



4. حلّوا المعادلات الّتي تظهر في الجدول، انسخوا الجدول وسجّلوا الحلول في الأعمدة المناسبة في الجدول.

الدالّة	الحلّ الأكبر	الحلّ الأصغر
$x^2 - 18x = 0$	ب	أ
$x^2 + 8x + 12 = 0$	ث	ت
$x^2 - 14x + 40 = 0$	ح	ج
$x^2 - 4x - 140 = 0$	خ	د
$x^2 - 16x + 64 = 0$	ذ	ذ

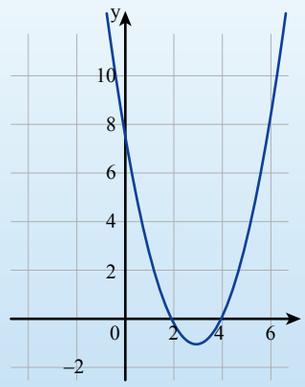
المربّع السحريّ:
سجّلوا الحلول حسب الحروف الّتي تظهر في المربّع السحريّ.
إذا كان حلكم صحيحًا فستحصلون على مجموع متساوٍ في كلّ سطر، كلّ عمود وفي كلّ قُطر.

أ	ب	ت
ث	ج	ح
خ	د	ذ

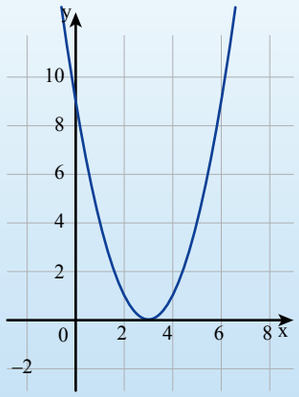
الدرس الثاني: كم حلًّا يوجد للمعادلة؟

كم نقطة صفريّة توجد لكلّ دالّة؟

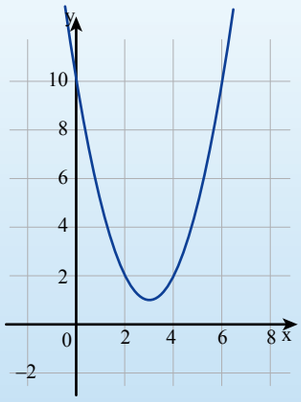
$f(x) = x^2 - 6x + 8$



$g(x) = x^2 - 6x + 9$



$h(x) = x^2 - 6x + 10$



هل تستطيعون الإجابة عن السؤال دون الاستعانة بالخطّ البيانيّ للدالّة؟

نبحث في عدد حلول المعادلة التربيعيّة.

1. جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة لكلّ دالّة وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
كم نقطة صفريّة وجدتم لكلّ دالّة؟
افحصوا الحلول بمساعدة التعويض وحسب الرسم البيانيّ.

2. حلّوا المعادلات. إذا لم تجدوا حلًّا للمعادلات فاشرحوا.

أ. $x^2 + 2x - 15 = 0$

ب. $-2x^2 - 3x + 20 = 0$

ت. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

ث. $-3x^2 + 10x - 9 = 0$

ج. $2x^2 + 4x + 3 = 0$

ح. $-x^2 + 8x - 16 = 0$

3. سألت المعلمة: كم حلًّا يوجد للمعادلة التربيعيّة $x^2 - 4x + 8 = 0$؟
قالت **سليمة**: لمعرفة عدد حلول المعادلة أفحص قيمة التعبير $b^2 - 4ac$ الّذي يظهر داخل إشارة الجذر في قانون الجذور.
اشرحوا اقتراح **سليمة**. تطرّقوا إلى الحالات التالية:

$b^2 - 4ac > 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$b^2 - 4ac < 0$

يمكنكم الاستعانة بأمثلة.

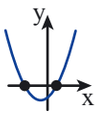
القانون لإيجاد جذور المعادلة التربيعيّة $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

هو $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

أمثلة

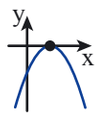
- إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فيوجد للمعادلة **حلّان مختلفان**.
يتقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ في **نقطتين**.

المعادلة $2x^2 + 3x - 5 = 0$
$b^2 - 4ac = 49 > 0$
لذا؛ يوجد جذران للمعادلة.
الخطّ البيانيّ للدالّة $y = 2x^2 + 3x - 5$
له نقطتان صفريّتان $(-2.5, 0)$ وَ$(1, 0)$



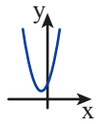
- إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فيوجد للمعادلة **حلّ واحد** (الجذران متساويان).
يمس الخطّ البيانيّ للدالّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ مع محور x في نقطة واحدة، هذا يعني أنّه مماس لمحور x في **نقطة واحدة**.

المعادلة $-x^2 + 8x - 16 = 0$
$b^2 - 4ac = 0$
لذا؛ يوجد للمعادلة حلّ واحد(الجذران متساويان)، الخطّ البيانيّ للدالّة
$y = -x^2 + 8x - 16$ له نقطة صفريّة واحدة $(4, 0)$



- إذا كان $b^2 - 4ac < 0$,
فلا يوجد حلّ للمعادلة.
لا توجد **نقاط صفريّة** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
وهذا يعني أنّه لكلّ قيمة x يقع الخطّ البيانيّ للدالّة فوق أو تحت محور x.

المعادلة $2x^2 + 4x + 3 = 0$
$b^2 - 4ac = -8 < 0$
لذا؛ لا يوجد حلّ للمعادلة،
الخطّ البيانيّ للدالّة $y = 2x^2 + 4x + 3$
لا توجد له نقاط صفريّة.
في هذه الحالة يقع الخطّ البيانيّ فوق محور x.



4. كم حلًّا يوجد للمعادلة $4x^2 - 12x + 9 = 0$؟

قالت **عناية**: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ لذا؛ يوجد حلّ واحد للمعادلة وهو $x = 1\frac{1}{2}$.

قالت **مريم**: $b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0$ لذا؛ يوجد حلّ واحد للمعادلة وهو $x = 1\frac{1}{2}$.

هل قولهما صحيح؟

إذا كانت الإجابة نعم فأيّ طريقة حلّ تبدو لكم أفضل؟

5. معطى عائلة المعادلات $x^2 + bx + 16 = 0$.

أ. أعطوا مثالًا لقيمة b بحيث يكون حلًّا واحدًا للمعادلة. كم إمكانيّة يوجد؟

ب. أعطوا مثالًا لقيمة b بحيث لا يكون حلًّا للمعادلة. كم إمكانيّة يوجد؟

ت. أعطوا مثالًا لقيمة b بحيث يكون حلّين مختلفين للمعادلة. كم إمكانيّة يوجد؟

نفكّر بـ ...

6. كم حلًّا يوجد للمعادلة $x^2 - 8x + 10 = 0$؟

قال **رائد**: يوجد حلّان للمعادلة، لأنّ قيمة التعبير $b^2 - 4ac$ عدد موجب وهو 24.

قال **أمير**: لا يوجد حلّ للمعادلة، لأنّ جذر العدد 24 هو عدد غير صحيح.

من منهما قوله صحيح؟ اشرحوا.

ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2 - 8x + 10$.

مجموعة مهامّ

1. حلّوا.

أ. $x^2 + 4x + 5 = 0$ ب. $x^2 + 4x + 4 = 0$ ت. $x^2 + 4x + 3 = 0$

2. صنّفوا المعادلات حسب عدد الحلول (لا توجد حاجة للحلّ).

أ. $5x^2 + 3x - 14 = 0$ ت. $x^2 + 8x + 25 = 0$ ج. $x^2 - 10x + 25 = 0$

ب. $2x^2 - x - 15 = 0$ ث. $x^2 - 8x + 16 = 0$ ح. $4x - x^2 = 0$

3. أ. حلّوا المعادلة $4x^2 - 20x + 25 = 0$. كم حلًّا وجدتم؟

كم نقطة تقاطع توجد للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 4x^2 - 20x + 25$ مع محور x؟

ارسموا رسمة تقريبيّة للدالّة.

ب. حلّوا المعادلة $4x^2 - 20x + 24 = 0$. كم حلًّا وجدتم؟

كم نقطة تقاطع توجد للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 4x^2 - 20x + 24$ مع محور x؟

ارسموا رسمة تقريبيّة للدالّة.

ب. حلّوا المعادلة $4x^2 - 20x + 26 = 0$. كم حلًّا وجدتم؟

كم نقطة تقاطع توجد للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 4x^2 - 20x + 26$ مع محور x؟

ارسموا رسمة تقريبيّة للدالّة.

4. حدّدوا، في كلّ بند، هل الادّعاء صحيح؟ اشرحوا.

أ. المعادلة $x^2 - 12x + 36 = 0$ لها حلّان.

ب. المعادلة $2x^2 + 50 = 0$ لا يوجد لها حلّ.

ت. المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ يوجد لها حلّ واحد.

ث. الدالّة $y = -x^2 - 6x + 16$ لها نقطتان صفريّتان.

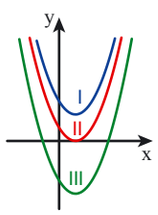
ج. الدالّة $y = -x^2 + 7$ لا يوجد لها نقاط تقاطع مع محور x.

5. معطاة عائلة الدوالّ التربيعيّة $y = ax^2 + 2x + 1$ $(a \neq 0)$
لأيّ قيم a يوجد للدالّة من هذه العائلة:
أ. نقطتان صفريّتان. ب. نقطة صفريّة واحدة. ت. قيم موجبة فقط.

6. معطاة المعادلة $x^2 - 8x + 16 = 0$.
أ. كم حلًّا يوجد للمعادلة؟
ب. غيّروا عددًا واحدًا في المعادلة المعطاة بحيث تنتج معادلة لها حلّان. كم إمكانيّة يوجد؟
ت. غيّروا عددًا واحدًا في المعادلة المعطاة بحيث لا يكون حلًّا لها. كم إمكانيّة يوجد؟

7. أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$
$g(x) = x^2 - 2x - 3$
$h(x) = x^2 - 2x + 1$

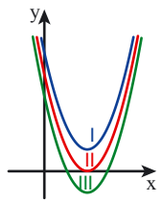


ب. حلّوا المعادلات.

$x^2 - 2x + 3 = 0$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

8. أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

$f(x) = 4x^2 - 12x + 8$
$g(x) = 4x^2 - 12x + 11$
$h(x) = 4x^2 - 12x + 9$

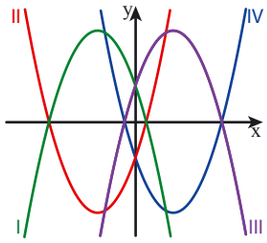


ب. حلّوا المعادلات.

$4x^2 - 12x + 8 = 0$ $4x^2 - 12x + 11 = 0$ $4x^2 - 12x + 9 = 0$

9. أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

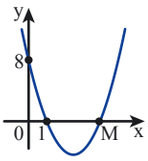
$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$
$g(x) = 2x^2 + 7x - 4$
$h(x) = -2x^2 - 7x + 4$
$m(x) = -2x^2 + 7x + 4$



ب. حلّوا المعادلات.

$2x^2 - 7x - 4 = 0$ $-2x^2 - 7x + 4 = 0$
$2x^2 + 7x - 4 = 0$ $-2x^2 + 7x + 4 = 0$

10. أمامكم الخطّ البياني للدالّة $y = ax^2 - 10x + c$ $(a \neq 0)$



أ. ما هي قيمة c؟ ب. ما هي قيمة a؟ ت. ما هما إحداثيّا النقطة M؟

الدرس الثالث: نبسّط ونحلّ

ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $f(x) = -2(x-4)^2 + 18$؟

نبسّط ونحلّ معادلات تربيعيّة.

1. ما هي النقاط الصفريّة للدالّة $f(x) = -2(x-4)^2 + 18$؟

أ. ارسموا (دون أن تحسبوا) رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة.

أجيبوا حسب الرسم البيانيّ: كم نقطة صفريّة توجد للدالّة؟ ما هي إحداثيّاتها؟

ب. بدأت **سلمى** تحلّ كالتالي: $-2(x-4)^2 + 18 = 0$

$-2(x-4)^2 = -18 \quad / : (-2)$

أكملوا حلّ المعادلة بطريقة **سلمى**. كم نقطة صفريّة توجد للدالّة؟ ما هي إحداثيّاتها؟

ت. بدأت **باسمة** تحلّ كالتالي: $-2(x-4)^2 + 18 = 0$

$-2(x^2 - 8x + 16) + 18 = 0$

أكملوا حلّ المعادلة بطريقة **باسمة**. كم نقطة صفريّة توجد للدالّة؟ ما هي إحداثيّاتها؟

ث. تناقشوا حول طرق الحلّ المختلفة. أيّ طريقة حلّ أسهل، حسب رأيكم؟

2. جدوا النقاط الصفريّة للدالّة $y = (x+4)^2 - 4$.

رأينا، في المهمة 1، أنّه لإيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة التربيعيّة المعروضة بالتمثيل الرأسيّ $y = a(x-p)^2 + k \ (a \neq 0)$

نحلّ المعادلة $a(x-p)^2 + k = 0$

كالتالي:

$a(x-p)^2 = -k$

$(x-p)^2 = -\frac{k}{a}$

$x - p = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$

$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$

لذا: النقاط الصفريّة للدالّة هما $\left(p-\sqrt{-\frac{k}{a}},0\right)$ وَ $\left(p+\sqrt{-\frac{k}{a}},0\right)$.

نستعين فيما بعد بهذا القانون لإيجاد النقاط الصفريّة للدالّة التربيعيّة بتمثيلها العامّ كي نبرهن قانون الجذور.

3. بسّطوا، في كلّ بند، سجّلوا الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ وحلّوا.

مثال: $x(3x - 1) = 4(3 + x)$

نبسّط: $3x^2 - x = 12 + 4x \quad / \quad -12 - 4x$

$3x^2 - 5x - 12 = 0$

نحلّ: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3}$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6}$

نحصل على: $x_1 = \frac{5+13}{6} = 3 \quad , \quad x_2 = \frac{5-13}{6} = -\frac{4}{3}$

حلا المعادلة هما: $x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -\frac{4}{3}$

أ. $x^2 - 2x = x + 4$

ب. $x(x - 4) = 21$

ت. $(x - 3)(x + 1) = 22 - 2x$

ث. $2(x + 4) = 3 - 3x^2$

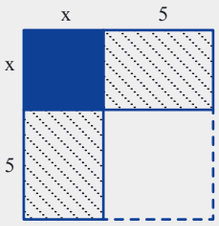
ج. $2(8 - x) = (x - 4)^2$

ح. $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = x + 2$

خ. $\frac{(x-4)^2}{7} = 1 - 2x$

د. $\frac{2x^2+3x}{5} = \frac{x(x-9)}{4}$

كان الخوارزمي رياضيًّا عربيًّا، عاش في القرن التاسع الميلاديّ. وقد كان أحد المساهمين في بناء أسس الجبر. يصف في كتابه **الجبر والمقابلة** طريقة لحلّ المعادلة التربيعيّة. استعمل الخوارزمي كلمة "الجبر" لعمليّات نقل الحدود من طرف إلى طرف آخر في المعادلة، واستعمل كلمة "المقابلة" لوصف عمليّة تجميع الحدود المتشابهة. اشتق اسم مجال الجبر في الرياضيّات الذي يتناول حلّ المعادلات أيضًا من اسم كتاب الخوارزمي. نعرض هنا حلّ المعادلة $x^2 + 10x = 39$ بطريقة الخوارزمي:



- ارسموا مربّعًا طول ضلعه x (المربّع الملوّن).
- أضيفوا مستطيلين إلى كِلا طرفيِّ المربّع (المستطيلين المخططين) بحيث يكون طول أحد أضلاع المستطيل 5 وحدات.
- أكملوا الرسمة إلى مربّع بمساعدة إضافة المربّع (المربّع الفارغ).

مساحة الشكل ممثّلة بواسطة التعبير $x^2 + 10x$ ، وحسب شروط المعادلة فهو يساوي 39 وحدة.

مساحة المربّع الكبير ممثّلة بواسطة التعبير $(x + 5)^2$، وحسب الرسمة فهو يساوي 64 وحدة.

هذا يعني أنّ الكتابة في أيامنا هي: $(x + 5)^2 = 64$

من هنا نستطيع أن نستنتج أنّ $x + 5 = 8$ وحلّ المعادلة هو $x = 3$

ملاحظات:

- طريقة حلّ الخوارزمي هندسيّة، وهي لا تأخذ بالحسبان حلول سالبة (في حالتنا $x = -13$)
- عُرض الحلّ الأصليّ بطريقة كلاميّة، لأنّ استعمال الحروف والمتغيّرات لم يكن معروفًا في فترة الخوارزمي (وهذا يعني قبل حوالي 1,200 سنة).

لإيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة التربيعيّة المعروضة بتمثيل عام $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ نحلّ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.
نستعمل جذور المعادلة بالتمثيل الرأسيّ كي نبرهن **قانون الجذور**.
نجد العلاقة بين التمثيل العامّ والتمثيل الرأسيّ بواسطة التبسيط.

$$f(x) = a(x - p)^2 + k$$

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + k$$

نقارن بالتمثيل العام ونحصل على:

$$\begin{matrix} a & & b & & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

$$f(x) = \boxed{a}\,x^2 - \boxed{2ap}\,x + \boxed{ap^2 + k}$$

نستخرج متساويتين:

أ. $-2ap = b$

ومن هنا: $\boxed{p = -\frac{b}{2a}}$

ب. $c = ap^2 + k$

$$k = c - ap^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

ومن هنا: $\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$

رأينا أنّ حلول المعادلة **بالتمثيل الرأسيّ** هي: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$

نعوّض بناء على الخطوات السابقة ونحصل على:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) : a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون لحساب الإحداثيّ x للنقاط الصفريّة للدالّة التربيعيّة (هذا يعني جذور المعادلة) هو:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. رأينا من خلال العلاقة بين التمثيل العامّ والتمثيل الرأسيّ للدالّة التربيعيّة أنّ $p=-\frac{b}{2a}$.

أ. قال **سليم**: يمكن الاستنتاج أنّ الإحداثيّ x لنقطة رأس الدالّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ هو $x=-\frac{b}{2a}$. اشرحوا.

ب. جدوا إحداثيْ نقطة الرأس لكلّ دالّة من الدالّتين التاليتين:

$y = 2x^2 - 16x - 6$ $\qquad$ $y -2x^2 + 16x - 14$

5. حلّوا كلّ معادلة بطريقتين: بمساعدة قانون الجذور وبطريقة إضافيّة.

أ. $x^2 - 169 = 0$ $\qquad$ ب. $3x^2 - 15x = 0$ $\qquad$ ت. $x^2 - 10x + 24 = 0$

مجموعة مهامّ

1. حلّوا.

أ. $x(x + 5) - 6 = 0$ $\qquad$ ث. $x(6x - 13) + 2(5x - 1) = 1$

ب. $2x(x + 1) + 3.5 = 5$ $\qquad$ ج. $x(3x - 5) = 2(3x - 5)$

ت. $2(2x - 5) = x(x - 7)$ $\qquad$ ح. $x+\frac{x^2-x}{2}=0$

2. حلّوا.

أ. $(x + 3)(x + 4) = 72$ $\qquad$ ث. $(3x + 4)(x - 1) = 2x^2 + 2$

ب. $(x + 3)^2 = 4$ $\qquad$ ج. $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 9$

ت. $(x - 3)^2 = x + 3$ $\qquad$ ح. $4+\frac{2x-2x^2}{3}=0$

3. حلّوا.

أ. $(2x - 1)(x - 1) = 13 - 5x$ $\qquad$ ث. $x - (x + 4)^2 = x - 1$

ب. $3x^2 - 2x + 9 = 2x(x - 4)$ $\qquad$ ج. $(2x + 1)^2 - (x + 7)^2 = 0$

ت. $\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{x+5}{5}$ $\qquad$ ح. $\frac{x(x-5)}{2}-2x+4=0$

4. صنّفوا المعادلات حسب عدد الحلول (لا توجد حاجة للحلّ).

أ. $3x^2 - 5x - 12 = 0$

ب. $9x^2 - 30x + 25 = 0$

ت. $8(x - 1) - x(5x - 6) = 0$

ث. $8(1 - x^2) = (2x - 3)^2$

ج. $(x - 4)^2 = -1$

ح. $x - \frac{(3+x)^2}{2} = 0$

5. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب. $2x^2 - 5x = 0$

ت. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

ث. $(x - 5)(x + 2) = 0$

ج. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

ح. $(x - 2)^2 = x(x - 3)$

6. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$

ب. $x(x - 4) = 21$

ت. $x^2 + 5(8 - x) = 46$

ث. $(x + 2)^2 = x^2 + 20$

ج. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 1)$

ح. $(x - 4)^2 = x(8 + x)$

7. حلّوا المعادلات.

أ. $x(x + 4) = 3x + 12$

ب. $(x + 5)(x + 2) = -2$

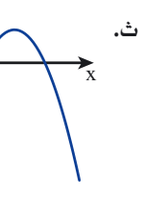
ت. $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 9$

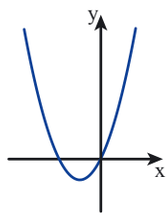
ث. $x(2x + 3) = 2x + 10$

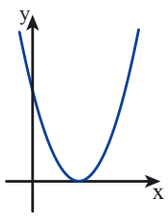
ج. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 4x - 5$

ح. $(x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 31$

8. أمامكم رسوم تقريبيّة لقطوع مكافئة. جدوا النقاط الصفريّة (إنْ وُجدت)، ولائموا كلّ قطع مكافئ للدالّة المناسبة.

أ. 

ب. 

ت. 

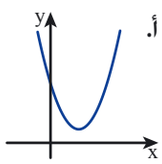
ث.

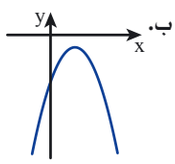
$k(x) = x^2 - 8x + 16$ $\quad$ $h(x) = x^2 + 2x$ $\quad$ $g(x) = -x^2 + 3x - 2$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 3$

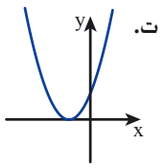
9. لائموا كلّ رسمة تقريبيّة للقطع المكافئ للدالّة المناسبة. اشرحوا.

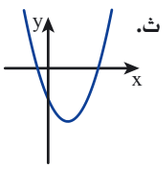
$f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $p(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $m(x) = -x^2 + 3x + 4$

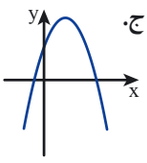
$h(x) = -x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $k(x) = -x^2 + x - 1$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 3x - 4$

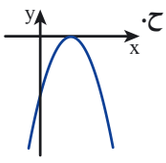
أ. 

ب. 

ت. 

ث. 

ج. 

ح. 

10. انسخوا وأكملوا **بطاقة هُويّة** كلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$f(x) = -2(x-1)^2 + 8$	$g(x) = x^2 - 6x + 10$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

الدرس الرابع: مسائل كلاميّة ومعادلات

اختار **زياد** عددًا صحيحًا.
أضاف العدد 5 إلى العدد الّذي اختاره،
ضرب المجموع الّذي حصل عليه في العدد الّذي اختاره وحصل على 6.
قال **باسم**: العدد الّذي اخترته هو 1.
قال **زياد**: خطأ، لقد اخترت عددًا آخر.
هل يمكن ذلك؟ اشرحوا.
نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة معادلات تربيعيّة.

1. نبني مستطيلات مختلفة من خيط طوله 24 سم.

أ. جدوا قياسات ممكنة للمستطيلات، ثمّ جدوا مساحاتها.

ب. مساحة أحد المستطيلات الّذي نتج من نفس الخيط هي 27 سنتمرًا مربّعًا.
جدوا أطوال أضلاع المستطيل. اشرحوا.

2. نُسيّج قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها 45 مترًا مربّعًا بسيّاج. طول أحد أضلاع المستطيل أكبر بـ 12 م من طول الضلع الآخر.

أ. ارمزوا بـ x إلى طول أحد أضلاع المستطيل (بالسم).
اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لطول الضلع الآخر للمستطيل.

ب. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات السؤال؟ اشرحوا.

ت. ما هي أطوال أضلاع المستطيل؟

3. قرر تلاميذ الصفّ التاسع، في نهاية السنة الدراسيّة، أن يتبادلوا فيما بينهم الصور كهدايا تذكارية.
مجموع الصور التي تمّ تبديلها هو 870 صورة.

أ. أيّ أعداد يمكن أن تكون مناسبة لعدد التلاميذ في الصفّ؟

ب. كم تلميذًا يوجد في الصفّ؟ اشرحوا.

4. معطى عددين متتاليين. مجموع مربّعيهما هو 1301.

أ. أيّ أعداد يمكن أن تكون مناسبة؟

ب. ما هي حلول المعادلة المناسبة؟

ت. ما هما العددان؟ اشرحوا.

للتذكير

عندما نحلّ مسائل كلاميّة نستعمل عادةً ما يلي:

- نُحدّد، في البداية، شروط المحدوديّة في المسألة، هذا يعني أن نستنتج أيّ قيم مناسبة للمعطيات.
- نجد الإجابة للمسألة بمساعدة اعتبارات، بمساعدة حسابات، بمساعدة رسم بيانيّ أو بمساعدة معادلة.
- نفحص هل الحلول الناتجة مناسبة لشروط المسألة.

5. حلّوا المعادلات.

أ. $5x(4x - 10) = 0$

ب. $-2x^2 + (3x + 2)^2 + 2(x - 2) = 0$

ت. $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

ث. $-x(5x - 6) - 8(1 - x) = 0$

ج. $-1 - (x - 4)^2 = 0$

ح. $2x - (3 + x)^2 = 0$

مجموعة مهامّ

1. طول أحد أضلاع المستطيل أكبر بـ 2 سم من طول الضلع الآخر. مساحة المستطيل 24 سنتمترًا مربّعًا.

أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لأطوال أضلاع المستطيل؟

ب. جدوا أطوال أضلاع المستطيل.

ت. جدوا محيط المستطيل.

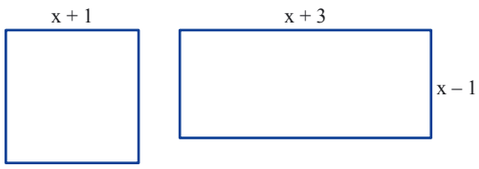
2. معطى محيط مستطيل 32 سم.

ارمزوا بـ x إلى طول أحد أضلاع المستطيل (x بالسم).

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات السؤال؟ اشرحوا.

ب. مساحة المستطيل 48 سنتمترًا مربّعًا. جدوا أطوال أضلاع المستطيل.

3. أمامكم مربّع ومستطيل (أطوال أضلاع المستطيل معطاة بالسم).



أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات السؤال؟ اشرحوا.

ب. مجموع مساحتيِّ المربّع والمستطيل هو 94 سنتمترًا مربّعًا.
جدوا أطوال أضلاع المربّع وأطوال أضلاع المستطيل.

ت. جدوا مجموع محيطيِّ المربّع والمستطيل.

4. لعب كلّ لاعب، في مسابقة الشطرنج، ضد لاعب واحد من اللاعبين الآخرين.
تمّت في المسابقة 36 مباراة.
كم لاعبًا اشترك في المسابقة؟

5. أ. جدوا عددًا مربّعه يساوي حاصل ضربه في 6.
ب. جدوا عددًا مربّعه أكبر منه بـ 2.

6. **سامي** أكبر من **آدم** بـ 10 سنوات. حاصل ضرب عُمريهما هو 39.
ما هو عُمر **سامي**؟ وما هو عُمر **آدم**؟

7. حاصل ضرب زوج عددين متتالين هو 2. جدوا العددين.
كم زوجًا من الأعداد وجدتم؟

8. جدوا عددًا إذا ضربنا العدد السابق له في العدد التالي له نحصل على 24.

9. جدوا زوجًا من الأعداد المتتالية مجموعهما يساوي مجموع مربّعيهما.

10. حلّوا المعادلات.

أ. $(x-1)(3x+1)=x^2+11$
ب. $(2x-1)(x+3)=15$
ت. $(x-4)^2+(x+4)^2=82$
ث. $(x-2)(x+4)=(2x-7)(x+2)$
ج. $(x+5)^2=(x-1)(5x-11)$
ح. $(x-5)^2+(x+3)^2=16x-8$

11. حلّوا المعادلات.

أ. $8(1+x)=x(6+x)$
ب. $(x-4)(x+4)=(2x-1)(2x+1)$
ت. $(3x-2)^2=8(x^2-3)+1$
ث. $x(x+2)+(x-5)^2=89$
ج. $(2x-1)(x+2)=x(x+1)+1$
ح. $(2x-3)(2x+3)=5x+(x+1)(x-1)$

12. حلّوا المعادلات.

أ. $7(2-x)+x(x-3)=5$
ب. $3(x-1)^2=2(x+3)^2-96$
ت. $(3x+2)^2+2(3x-2)=0$
ث. $(x-3)(x+2)+(x-5)^2=10$
ج. $(2x-3)(2x+3)=3x(x+1)-19$
ح. $(2x-3)^2-4(x+1)^2=10-15x$