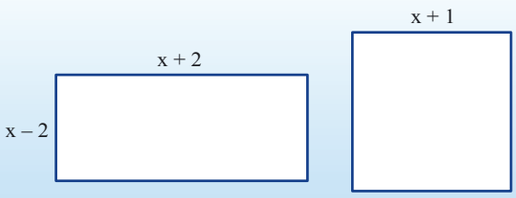
الوحدة الواحدة والعشرون: معادلات ومسائل

الدرس الأوّل: الضرب المختصر، مسائل كلاميّة ومعادلات

أمامكم مربّع ومستطيل.
تصف التعابير المسجّلة بجانب الأضلاع أطوال الأضلاع.
($x > 2$، قياسات الطول معطاة بالسم).
اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة كلّ شكل رباعيّ.



نستعين بقوانين الضرب المختصرة لحلّ معادلات ومسائل كلاميّة.

1. نتطرّق إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
جدوا، في كلّ بند، أطوال أضلاع المستطيل والمربّع حسب المراحل التالية:

- سجّلوا معادلة مناسبة.
- حلّوا المعادلة وافحصوا هل الحلول مناسبة لشروط المسألة؟
- اكتبوا إجابة كلاميّة.

أ. مساحة المربّع 36 سنتمترًا مربّعًا.
ب. مساحة المستطيل 45 سنتمترًا مربّعًا.
ت. مجموع مساحتي المربّع والمستطيل هو 81 سنتمترًا مربّعًا.
ث. مساحة المربّع أكبر بـ 20 سنتمترًا مربّعًا من مساحة المستطيل.
ج. مساحة المستطيل أكبر بـ 9 سنتمترات مربّعة من مساحة المربّع.

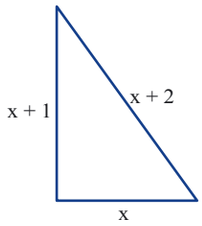
2. طول ضلع مربّع x سم ($x > 3$).
نكبّر طول أحد أضلاع المربّع بـ 3 سم ونصغّر طول الضلع المجاور بـ 3 سم. نحصل على مستطيل.
أ. أيّ شكل رباعيّ محيطه أكبر؟ هل المحيطات متساوية؟ اشرحوا.
ب. أي شكل رباعيّ مساحته أكبر؟ وبكم؟

3. طول أحد أضلاع مربع أكبر بـ 5 سم من طول ضلع مربّع آخر.
أ. ارمزوا بـ x إلى طول ضلع المربّع الصغير ($x > 0$) وسجّلوا تعابيرًا متساوية: لطول ضلع المربّع الكبير، ولمساحتيّ المربّعين.
ب. مساحة أحد المربعين أكبر بـ 225 سنتمترًا مربّعًا من مساحة المربّع الآخر.
أمامكم معادلات، حدّدوا أي منها مناسبة لوصف المسألة الكلاميّة؟

I. $x + 5 = x + 225$
II. $(x + 5)^2 - 225 = x^2$
III. $(x + 5)^2 + 225 = x^2$
IV. $x^2 + 225 = (x + 5)^2$

ت. حلّوا إحدى المعادلات التي اخترتموها وجدوا أطوال أضلاع المربّعات.

4. أمامكم مثلّث قائم الزاوية.
تصف التعابير المسجّلة بجانب الأضلاع أطوال الأضلاع.
($x > 1$، قياسات الطول معطاة بالسم).
جدوا أطوال أضلاع المثلّث.



نسمّي الأعداد الطبيعيّة الثلاثة الّتي تُمثل طول القائمين والوتر في المثلّث القائم الزاوية، في مهمّة 4، **"ثلاثيّة فيثاغوريّة"**.
هذه الثلاثيّة من **الأعداد الطبيعيّة** تُحقّق نظريّة فيثاغوروس $a^2 + b^2 = c^2$.
الثلاثيّة الفيثاغورية الصغرى هي (3 , 4 , 5) ، وقد كانت معروفة منذ العصور القديمة.
يبدو أنّ المصرين القدماء استعملوا مثلّث قائم الزاوية ينتج من هذه الثلاثيّة لبناء قنوات مياه.
هنالك ثلاثيّات كثيرة إضافيّة، مثل: (13 , 12 , 5) , (25 , 24 , 7) , (17 , 15 , 8).
كلّ **حاصل ضرب عدد صحيح أكبر من 1** في ثلاثيّة فيثاغوريّة هو ثلاثيّة فيثاغورية أيضًا.
مثلًا: (10 , 8 , 6) هي حاصل ضرب الثلاثيّة الفيثاغوريّة (5 , 4 , 3) في 2.

5. حلّوا المعادلات التالية.

أ. $(x - 4)^2 - x(x + 8) = 0$

ب. $(x + 4)^2 - x(x - 8) = 0$

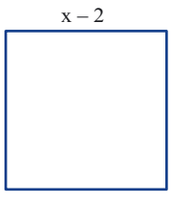
ت. $(x - 4)^2 - x(8 - x) = 16$

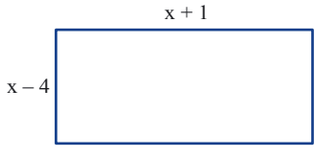
ث. $(x + 4)^2 + x(8 - x) = 16$

مجموعة مهامّ

أُعِدت الرسومات في مجموعة المهام للتوضيح، والتعابير الجبريّة المسجّلة بجانب الأضلاع تصف الأطوال بالسم.

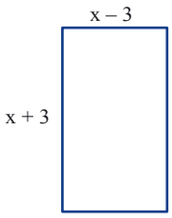
1. أمامكم مربّع ومستطيل.

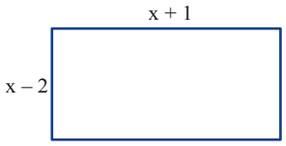




أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟
ب. سجّلوا تعبيرًا لمساحة المستطيل وتعبيرًا لمساحة المربّع.
ت. مساحة المستطيل تساوي مساحة المربّع.
سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
جدوا أطوال أضلاع كلّ شكل رباعيّ.

2. أمامكم مستطيلان.



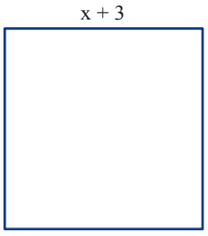


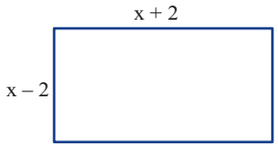
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. سجّلوا تعبيرًا لمساحة كلّ مستطيل

ت. مساحتا المستطيلان متساويتان.
سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
جدوا أطوال أضلاع كلّ مستطيل.

3. أمامكم مستطيل ومربّع.





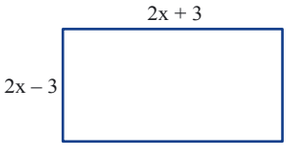
مساحة المربّع أكبر بـ 31 سنتمترًا مربّعًا من مساحة المستطيل.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. سجّلوا تعبيرًا لمساحة المستطيل وتعبيرًا لمساحة المربّع.

ت. سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
جدوا أطوال أضلاع كلّ شكل رباعيّ.

4. أمامكم مستطيل ومربّع.



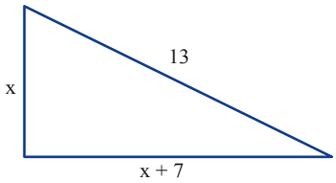
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. أمامكم ثلاث حالات مختلفة:

- مساحة المستطيل 27 سنتمترًا مربّعًا.
- مساحة المربّع أكبر بـ 28 سنتمترًا مربّعًا من مساحة المستطيل.
- مساحة المربّع تساوي مساحة المستطيل.

سجّلوا معادلة مناسبة لكلّ حالة، حلّوا وجدوا أطوال أضلاع كلّ شكل رباعيّ.

5. أمامكم مثلّث قائم الزاوية.

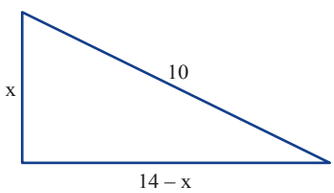


أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. جدوا أطوال أضلاع المثلّث.

ت. جدوا محيط المثلّث ومساحته.

6. أمامكم مثلّث قائم الزاوية.

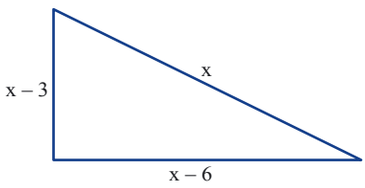


أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. جدوا أطوال أضلاع المثلّث.

ت. جدوا محيط المثلّث ومساحته.

7. أمامكم مثلّث قائم الزاوية.



أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. جدوا أطوال أضلاع المثلّث.

ت. جدوا محيط المثلّث ومساحته.

8. حلّوا المعادلات التالية.

أ. $(x + 1)^2 = x^2 + 13$

ب. $(x + 2)^2 = x^2 + 12$

ت. $(x + 3)^2 = x^2 + 9$

ث. $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

ج. $(x + 4)^2 = (x - 2)(x + 1)$

ح. $(x - 4)^2 = (x + 2)(x - 1)$

9. حلّوا المعادلات.

أ. $(x + 3)^2 = x^2 + 15$

ب. $(x + 3)^2 = (x - 3)^2$

ت. $(x + 3)^2 = 12 + (x - 3)^2$

ث. $(x - 2)^2 = (x + 4)(x + 1)$

ج. $(x + 2)^2 = (x + 3)(x - 3) + 15$

ح. $(x + 4)^2 = 2x(x - 3) + 16$

10. حلّوا المعادلات.

أ. $(5x + 1)^2 - 5x(5x + 2) = x^2 - 15$

ب. $(2x + 1)^2 = (2x - 1)^2 + 20$

ت. $(2x + 1)^2 = (5x - 1)^2$

ث. $(x + 2)^2 = (2x + 1)^2 + 9$

ج. $(2x - 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$

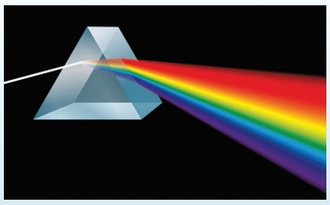
ح. $x^2 + (x - 2)^2 = 2(x + 1)^2$

11. معطى معادلة $\sqrt{x^2 - 4} = x - 1$

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. هل يوجد حلّ للمعادلة؟ إذا كانت الإجابة نعم فما هو؟ وإذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

الدرس الثاني: نحلّ معادلات ومسائل كلاميّة بمساعدة تحليل ثلاثيّ الحدود



أمامكم طريقتان لحلّ المعادلة $x^2 + 2x + 1 = 16$.

طريقة أ	طريقة ب
$x^2 + 2x + 1 = 16$	$x^2 + 2x + 1 = 16 \;/\; -16$
$(x + 1)^2 = 16$	$x^2 + 2x - 15 = 0$

أكملوا الحلّ حسب كلّ طريقة.

نحلّ معادلات ومسائل كلاميّة بمساعدة تحليل ثلاثيّ الحدود.

للتذكير

- **ترينوم** هو ثلاثيّ الحدود: تعبير جبريّ مكوّن من ثلاثة مضافات.
- يمكن أن نكتب تعبير ضرب صورته $(x + a)(x + b)$، كمجموع بمساعدة قانون التوزيع الموسّع كالتالي:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

لذا، ثلاثيّ الحدود الّذي صورته $x^2 + (a + b)x + a \cdot b$ يمكن أن نكتبه كحاصل ضرب بمساعدة التحليل إلى عوامل كالتالي: $x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + \underline{\quad a \quad})(x + \underline{\quad b \quad})$

1. حلّوا المعادلات التالية بطريقة أ أو بطريقة ب.

أ. $x^2 - 12x + 36 = 25$ ت. $x^2 - 14x + 49 = 81$

ب. $x^2 - 12x + 36 = 36$ ث. $x^2 - 14x + 49 = 0$

2. حلّوا المعادلات بمساعدة التحليل إلى ثلاثيّ الحدود.

مثال: $x^2 + 4x - 12 = 0$

نفتش عن عددين حاصل ضربهما (12–) ومجموعهما 4، العددان هما 6 وَ (2–).

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

لذا: $x - 2 = 0$ أو $x + 6 = 0$

$x = 2$ أو $x = -6$

أ. $x^2 + 8x + 12 = 0$ ت. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب. $x^2 - 8x - 9 = 0$ ث. $x^2 - 4x - 21 = 0$

3. حلّوا المعادلات التالية بالطريقة الّتي ترغبونها.

أ. $x^2 - 12x + 36 = 0$ ت. $x^2 - 14x + 49 = 100$ ج. $x^2 + 5x + 2 = 38$

ب. $x^2 - 8x + 12 = 0$ ث. $x^2 - 6x + 3 = 30$ ح. $x^2 - 6x + 2 = 9$

مسائل كلاميّة

4. اخترتُ عددًا صحيحًا.
ضربتُ العدد الّذي اخترته في العدد التالي له وحصلت على 42.
ما هو العدد الّذي اخترته؟ كم حلًّا يوجد للمسألة؟ اشرحوا.

5. اختارت **مريم** عددًا سالبًا، ضربته في عدد أكبر منه بـ 5 وحصلت على 36.
اختار **رائد** عددًا موجبًا، ضربه في عدد أكبر منه بـ 5 وحصل على 36.
ما هو العدد الذي اختارته **مريم**؟ ما هو العدد الذي اختاره **رائد**؟

6. معطى خمسة أعداد صحيحة متتالية.
مجموع مربّع الأعداد الثلاثة الأولى يساوي مجموع مربّع العددين الأخيرين.
ما هي الأعداد؟ اشرحوا.

7. أ. جدوا عددين زوجيّين متتاليين مجموع مربّعيهما 100.
ب. جدوا عددين فرديّين متتاليين مجموع مربّعيهما 130.

مجموعة مهامّ

1. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 + 8x + 15 = 0$ ت. $x^2 + 2x - 15 = 0$ ج. $x^2 - 5x + 1 = 7$

ب. $x^2 - 8x + 15 = 0$ ث. $x^2 - 2x - 15 = 0$ ح. $x^2 + 5x = 6$

2. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 + 8x - 9 = 0$ ت. $x^2 + 3x - 6 = 4$ ج. $2x^2 - 6x + 6 = x^2 + 1$

ب. $x^2 - 8x - 9 = 0$ ث. $x^2 - 3x - 6 = 4$ ح. $x^2 - 6x + 15 = 3(x - 1)$

3. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 + 10x + 25 = 144$ ت. $(x - 2)^2 = 2(x + 2)$ ج. $(x + 3)(x - 4) = x + 12$

ب. $x^2 - 8x + 16 = 0$ ث. $(x + 1)^2 = x + 21$ ح. $2(x - 3)^2 = x^2 - 2(x - 1)$

4. اختاروا عددين صحيحين متتاليين.
أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين، واكتبوا تعبيرًا جبريًّا للعدد الآخر.
ب. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات المسألة؟
ت. إذا كان مجموع العددين المتتالين اللذين تمّ اختيارهما 145، فما هما العددان؟

5. اختاروا ثلاثة أعداد صحيحة متتالية.
مجموع مربّع العددين الأولين أكبر بـ 21 من مربّع العدد الثالث.
أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين، واكتبوا تعابيرًا جبريّة للأعداد الأخرى.
ب. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات المسألة؟
ت. اكتبوا معادلة مناسبة، حلّوا وجدوا الأعداد.

6. اختاروا عددين صحيحين متتاليين.
مجموع مربّع العددين المتتاليين أكبر بـ 50 من مجموع العددين.
أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين، واكتبوا تعبيرًا جبريًّا للعدد الآخر.
ب. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات المسألة؟
ت. اكتبوا معادلة مناسبة، حلّوا وجدوا الأعداد.

7. اخترتُ عددًا، أضفت له 2 وضربتُ المجموع في العدد الّذي اخترته.
أ. إذا حصلت على 63 فما هو العدد الّذي اخترته؟
ب. إذا حصلت على255 فما هو العدد الّذي اخترته؟
ت. إذا حصلت على 168فما هو العدد الّذي اخترته إذا كان العدد موجبًا؟
ث. إذا حصلت على (1−) فما هو العدد الّذي اخترته؟

8. اخترتُ عددًا سالبًا،
أضفت 4 إلى العدد الّذي اخترته،
طرحت 2 من العدد الّذي اخترته،
ضربت النتيجتين اللتين حصلت عليهما في المرحلتين السابقتين وحصلت على 72.
ما هو العدد الّذي اخترته؟

9. أ. كم حلًّا يوجد للمعادلة $x^4 - 32x^2 + 256 = 0$؟ اشرحوا.
ب. كم حلًّا يوجد للمعادلة $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$؟ اشرحوا.

10. حلّوا المعادلات.

أ. $x^3 - 16x^2 = 0$ ب. $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ ت. $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

الدرس الثالث: من أعداد صحيحة إلى مربّعها ونحلّ

حلّوا المعادلة $x^2 + 6x + 5 = 0$

نتعرف على طريقة إضافيّة لحلّ المعادلات التربيعيّة.

1. نتطرّق إلى المعادلة الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

قال **رائد:** حسب المضافين الأوّلين في المعادلة $x^2 + 6x + 5 = 0$

التعبير $x^2 + 6x$ يذكرنا في المربّع الكامل لـ $x^2 + 6x + 9$

يجب أن نضيف (-4)، هذا يعني أن نطرح 4 كي نحافظ على المساواة.

لذا؛ نكتب المعادلة المعطاة كالتالي: $(x^2 + 6x + 9) - 4 = 0$

لذا؛ نسجّل: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ $\quad (x + 3)^2 - 4 = 0$

ومن هنا: $(x + 3)^2 = 4$

استمرّوا في حلّ **رائد**.

نسمّي طريقة حلّ **رائد** الإكمال إلى مربّع.

أحيانًا، يمكن أن نجد حلول المعادلة التربيعيّة الّتي صورتها $a \neq 0 , ax^2 + bx + c = 0$ بمساعدة إكمال إلى مربّع كالتالي:

- نحدد المربّع الكامل بناءً على المضافين الأولين،
- نضيف العدد الّذي يوازن التغيير الّذي حدث نتيجة للإكمال إلى مربّع،
- نحلّ المعادلة المسجّلة كمربّع التعبير.

مثال: معطى المعادلة $x^2 - 10x + 16 = 0$

التعبير $x^2 - 10$ يذكّرنا بالمربّع الكامل $x^2 - 10x - 25$

نوازن ونسجّل المعادلة كالتالية: $(x^2 - 10x + 25) - 9 = 0$

هذا يعني أنّ: $(x - 5)^2 = 9$

يمكن الاستنتاج: $x - 5 = -3$ أو $x - 5 = 3$

لذا: $x = 2$ أو $x = 8$

2. حلّوا المعادلات بطريقة الإكمال إلى مربّع.

مثال: $4x^2 - 16x + 15 = 0$

$(4x^2 - 16x + 16) - 1 = 0$

$(2x - 4)^2 = 1$

$2x - 4 = 1$ أو $2x - 4 = -1$

$x = 2.5$ أو $x = 1.5$

أ. $x^2 + 10x + 9 = 0$ ب. $x^2 - 10x + 24 = 0$ ت. $x^2 - 6x - 7 = 0$ ث. $x^2 + 4x - 5 = 0$ ج. $4x^2 - 12x + 5 = 0$ ح. $4x^2 - 8x + 3 = 0$

3. معطى المعادلة $x^2 + 14x + 40 = 0$. يمكن أنّ نحلّها بعدّة طرق.

تحليل ثلاثيّ الحدود	الإكمال إلى مربّع
$x^2 + 14x + 40 = 0$ $(x + 10)(x + 4) = 0$ $x + 10 = 0$ أو $x + 4 = 0$ $x = -10$ أو $x = -4$	$x^2 + 14x + 40 = 0$ $(x^2 + 14x + 49) - 9 = 0$ $(x + 7)^2 = 9$ $x + 7 = 3$ أو $x + 7 = -3$ $x = -10$ أو $x = -4$

أيّ طريقة تفضلونها؟ لماذا؟

4. بسّطوا وحلّوا المعادلات.

أ. $(2x - 1)(x + 1) = x^2 + 5$

ب. $x^2 + (x - 2)(x + 6) + 6 = 0$

ت. $(2x - 1)(x + 1) - x(x + 1) = 0$

ث. $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 36$

ج. $(x - 5)^2 - 2(x + 1)^2 = 47$

ح. $3(x - 2)^2 = 2(x + 1)^2 - 45$

5. مجموع ثلاثة أعداد هو 12.
العدد الثاني أكبر بـ 1 من العدد الأوّل.
اكتبوا، في كلّ بند، معادلة مناسبة، حلّوا وجدوا جميع الإمكانيّات للأعداد المناسبة.

أ. حاصل ضرب الاعداد الثلاثة هو 0.

ب. مجموع مربّع العددين الأولين يساوي مربّع العدد الثالث.

ت. حاصل ضرب العددين الأولين أصغر بـ 11 من العدد الثالث.

مجموعة مهامّ

1. حلّوا المعادلات.

أ. $(x + 2)(x - 1) = 4$

ب. $3x^2 - 2 = (2x + 1)^2$

ت. $(x - 3)^2 + 6x = 13$

ث. $(x + 2)^2 = 2x + 3$

ج. $(x - 4)(x - 5) = 6x - 34$

ح. $(2x - 1)^2 + x = 3x^2 + 5$

2. حلّوا المعادلات.

أ. $(x + 3)(x - 1) = 2x + 1$

ب. $(2x + 3)^2 + x = 3x(x + 5) + 12$

ت. $(2x - 3)^2 = 3x(x - 4) + 25$

ث. $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 1$

ج. $(x - 6)(x + 6) + (x - 4)^2 = x(x - 7)$

ح. $2x(2x - 3) + 6 = (3x - 1)(x + 1)$

3. حلّوا المعادلات.

أ. $3(x - 1)^2 - 2x(x - 1) = 0$

ب. $2(x - 3)^2 - (x - 4)^2 + 2 = 0$

ت. $(x - 3)^2 - 2(x - 4)^2 = 2$

ث. $(3x - 1)(3x + 1) = 2(x - 3)(x - 1) + 8x$

ج. $(3x - 1)^2 = 4(x - 3)(x - 1) - 16$

ح. $3x^2 - (x - 5)^2 = (2x - 1)(x + 3) - 2$

4. معطى عدد أكبر بـ 6 من العدد الآخر.

أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين وسجّلوا تعبيرًا جبريًّا للعدد الثاني.

ب. جدوا عددين مناسبين لكلّ حالة.

I. حاصل ضرب العددين هو 0.

II. حاصل ضرب العددين هو 55.

III. حاصل ضرب العددين هو (8−) .

IV. مجموع مربّع العددين هو 50.

5. مجموع عددين هو 15.

أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين وسجّلوا تعبيرًا جبريًّا للعدد الثاني.

ب. جدوا عددين مناسبين لكلّ حالة.

I. حاصل ضرب العددين هو 0.

II. حاصل ضرب العددين هو 56.

III. حاصل ضرب العددين هو (100−) .

IV. مجموع مربّع العددين هو 125.

6. مجموع ثلاثة أعداد هو (2−).

العدد الثاني أكبر بـ 1 من العدد الأوّل.

جدوا، في كلّ بند، العددين المناسبين.

أ. حاصل ضرب الأعداد الثلاثة هو 0.

ب. مجموع مربّع العددين الأوّلين يساوي مربّع العدد الثالث.

ت. حاصل ضرب العددين الأوّلين أكبر بـ 13 من العدد الثالث.

الدرس الرابع: كم مضافًا يوجد لتعبير الضرب؟

معطى تعبير الضرب $(a + b) \cdot (c + d)$.
كم مضافًا نحصل إذا ضربنا وبسّطنا التعبير؟

نبحث تعبير ضرب مكوّن من حدين.

1. معطى تعبير الضرب (■ ○ ■) · (■ ○ ■)
انسخوا وسجّلوا، في كلّ بند، بحيث ينتج الشرط المسجّل.
سجّلوا في كلّ ■ أحد المتغيّرات a , b , c أو d.
سجّلوا في كلّ ○ إحدى إشارتيّ العمليتين + أو − .
انتبهوا، يمكن استعمال المتغيّر نفسه أكثر من مرّة واحدة.

أ. بعد التبسيط، النتيجة هي مجموع أربعة مضافات.

ب. بعد التبسيط، النتيجة هي مجموع ثلاثة مضافات.

ت. بعد التبسيط، النتيجة هي مجموع مضافين.

ث. بعد التبسيط، النتيجة هي حاصل ضرب دون مضافات.

ج. بعد التبسيط، النتيجة هي صفر.

2. معطى تعبير الضرب (■ + ■) · (■ + ■)
نعوّض متغيّرات أو أعدادًا في الأماكن الفارغة.

أ. ما هو أكبر عدد من المضافات يمكن الحصول عليه من تبسيط تعبير الضرب؟

ب. ما هو أصغر عدد من المضافات يمكن الحصول عليه من تبسيط تعبير الضرب؟

3. حدّدوا، في كلّ بند، **دون أن تبسطوا** عدد المضافات الناتجة بعد فتح الأقواس والتبسيط.

أ. $(x + 8)(x - 6)$ ث. $(x + 8)^2$ خ. $(x + y)(6 - 8)$

ب. $(x + x)(8 - 6)$ ج. $(x + 8)(x - 8)$ د. $(x - y)(x - y)$

ت. $(x - x)(8 - 6)$ ح. $(x + 8)(y - 6)$ ذ. $(x - y)(x - 5)$

4. معطى تعبير الضرب (■ ○ ■) · $(x + 5)$.
انسخوا وأكملوا، في كلّ بند، أعدادًا، تعابير وعمليّات حسابيّة كما ترغبون، بحيث ينتج بعد التبسيط عدد المضافات التالي.

أ. أربعة مضافات. ت. مضافان.

ب. ثلاثة مضافات. ث. تعبير دون مضافات.

5. معطى تعبير الضرب (____ + x) · (____ + x)

كم مضافًا ينتج بعد التبسيط، إذا سجّلنا، في الأماكن الفارغة، أعدادًا من الأنواع التالية:

أ. أعداد مضادّة. ب. أعداد مختلفة غير مضادّة. ت. أعداد متساوية.

مجموعة مهامّ

1. حدّدوا، في كلّ بند، **دون أن تبسّطوا** عدد المضافات الناتجة بعد فتح الأقواس والتبسيط.

أ. $(2x - 3)(3y - 2)$ ث. $(2x - 3)(3x - 3x)$ خ. $(2x + 3)(3 - 2)$

ب. $(2x - 3)(3x - 2)$ ج. $(2x - 3)^2$ د. $(2x - 3y)(3 - 2)$

ت. $(2x - 3)(3 + 2x)$ ح. $(2x + 3x)(3 - 2)$ ذ. $(2x - 3x)(2x + 3x)$

2. اكتبوا تعابير ضرب مختلفة بحيث يكون أحد المضافات في النتيجة $8x^2$.

3. حلّوا المعادلات.

أ. $x(x + 5) - 6 = 0$ ت. $(x + 3)(x + 4) = 20$ ج. $(x - 6)(x - 2) + 4 = 0$

ب. $(x + 3)^2 = 25$ ث. $(x - 1)(x + 1) = 35$ ح. $x(x + 10) = 2(x - 8)$

4. حلّوا المعادلات.

أ. $x(x - 5) = x - 5$ ت. $2x(x + 3) = (x + 2)^2 + 4$ ج. $(x - 5)(x + 3) + 16 = 0$

ب. $x(x - 5) = 3(x - 5)$ ث. $(x + 3)^2 = 2x^2 + 2$ ح. $x(3x + 5) = 5x + 48$

5. حلّوا المعادلات.

أ. $(4x + 3)(4x - 3) = x(4x - 3)$ ث. $3(x - 1)^2 - 2x(x - 1) = 0$

ب. $x(4x - 3) = 4x - 3$ ج. $(x - 2)(3x + 1) = (2x + 1)^2 + 5$

ت. $x(4x - 3) = 3 - 4x$ ح. $(x - 5)^2 + (x + 3)^2 = x(x - 5) + 36$

الدرس الخامس: مهامّ إضافيّة

قانون التوزيع الموسّع، تحليل ثلاثيّ الحدود إلى عوامل، الضرب المختصر

احسبوا نتائج التمارين التالية:

$5^2 - 4^2$ $\quad 8^2 - 7^2$ $\quad 11^2 - 10^2$

خمّنوا: ماذا تكون نتيجة التمرين $101^2 - 100^2$؟

نستعين بقانون التوزيع، بتحليل ثلاثيّ الحدود وبقوانين الضرب المختصرة لبحث القانونيّة.

أزواج من الأعداد الصحيحة المتتالية

1. نتطرّق إلى التمارين الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. اختاروا ثلاثة أزواج أعداد صحيحة متتالية كما ترغبون، واحسبوا الفرق بين مربّعيهما.

ب. استنتجوا استنتاجًا واكتبوه بكلماتكم وبكتابة جبريّة.

ت. استعينوا بقوانين الضرب المختصرة وبرهنوا استنتاجاتكم.

2. أ. اختاروا ثلاثة أزواج أعداد صحيحة متتالية كما ترغبون ونفّذوا العمليّات التالية.

- اضربوا العددين اللذين اخترتموهما.
- اطرحوا من مربّع العدد الكبير العدد ذاته.

ب. جدوا علاقة بين النتائج الّتي حصلتم عليها.

ت. برهنوا أنّ العلاقة الّتي وجدتموها تتحقّق لكلّ زوج من الأعداد الصحيحة المتتالية.

قوانين الضرب المختصرة

3. حلّوا المعادلة $(x - 5)^2 = (x + 5)^2$

4. حدّدوا، في كلّ بند، لأيّ قيم a وَ b تتحقّق المساواة؟ اشرحوا.

مثال: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - b^2$

$2b^2 - 2ab = 0$

$2b(b - a) = 0$

$b = 0$ أو $b = a$

أ. $(a - b)^2 = (b - a)^2$ $\quad$ ت. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

ب. $(a - b)^2 = a^2 + b^2$ $\quad$ ث. $(a + b)^2 = (a - b)^2$

5. حددوا "صحيح" أو "غير صحيح". اشرحوا.

أ. $(x-3)^2+(3-x)^2=0$ ت. $x\neq 3\ ,\ \frac{(x-3)^2}{(3-x)^2}=1$

ب. $(x-3)^2-(3-x)^2=0$ ث. $x\neq 3\ ,\ \frac{(x-3)^2}{(3-x)^2}=-1$

6. **معطى:** $a-b=9\ ,\ ab=36$.

أ. جدوا قيمة التعابير التالية دون أن تجدوا قيمتيْ a وَ b.

I. $2a-2b$ II. $2ab$ III. $a^2-2ab+b^2$

ب. استعينوا بالنتائج الّتي حصلتم عليها في بند أ واحسبوا قيم التعابير التالية.
(انتبهوا، في البندين III وَ IV هنالك إمكانيّتان.)

I. a^2+b^2 II. $(a+b)^2$ III. $a+b$ IV. a^2-b^2

7. **معطى:** $ab=15\ ,\ a^2+b^2=34\ ,\ a>b$.

احسبوا، في كلّ بند، قيمة التعبير الجبريّ.

أ. $(a+b)^2$ ب. $(a-b)^2$ ت. a^2-b^2

مجموعة مهامّ

1. بيّنوا، في كلّ بند، كيف يمكن أن نحسب حاصل الضرب بواسطة قوانين الضرب المختصرة؟

أ. $26\cdot 34$ ت. $75\cdot 85$ ج. 41^2 خ. 35^2

ب. $39\cdot 41$ ث. $48\cdot 52$ ح. 29^2 د. 62^2

2. بيّنوا، في كلّ بند، كيف يمكن أن نحسب الفرق بواسطة قوانين الضرب المختصرة؟

أ. 31^2-29^2 ب. 99^2-1 ت. 15^2-5^2 ث. 40^2-39^2

3. حدّدوا، في كلّ بند، هل حلّ المعادلة هو مجموعة **كلّ الأعداد**؟
إذا كانت الإجابة لا، فجدوا الأعداد الّتي هي حلّ المعادلة.

أ. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ت. $(x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x$ ج. $(x-1)^2 = (1-x)^2$

ب. $(x+1)(x-1) = x^2 - x$ ث. $(1-x)(x+1) = 1 - x^2$ ح. $(x+3)^2 = x^2 + 9$

4. حدّدوا، في كلّ بند، هل المساواة صحيحة لكلّ زوج أعداد؟
إذا كانت المساواة غير صحيحة لكلّ زوج أعداد فأعطوا مثالًا مضادًّا.

أ. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ت. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

ب. $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ ث. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, $b \neq 0$

5. سجّلوا في كلّ بند $>$, $<$ أو $=$ بحيث تكون المتباينة أو المعادلة صحيحة لكلّ عدد. علّلوا إجاباتكم.

أ. a^2 ◯ $(a+1)(a-1)$ ج. $(a+1)^2 - 1$ ◯ $a(a+2)$

ب. $a^2 - 1$ ◯ $a^2 + 1$ ح. $(a-1)^2$ ◯ $(1-a)^2$

ت. $(a-1)^2$ ◯ $a(a-2)$ خ. $a^2 + 7a$ ◯ $(a+5)(a+2)$

ث. $(a+1)^2$ ◯ $a(a+2)$ د. $(a-5)(a+2)$ ◯ $a(a-3)$

6. حدّدوا، في كلّ بند، $<$ أو $>$ لكلّ زوج من الأعداد الّتي تحقّق الشروط المسجّلة.

أ. إذا كان $a > 0$ وأيضًا $b > 0$ فإنّ $(a-b)^2$ ◯ $(a+b)^2$

ب. إذا كان $a > 0$ وأيضًا $b < 0$ فإنّ $(a-b)^2$ ◯ $(a+b)^2$

ت. إذا كان $a < 0$ وأيضًا $b > 0$ فإنّ $(a-b)^2$ ◯ $(a+b)^2$

ث. إذا كان $a < 0$ وأيضًا $b < 0$ فإنّ $(a-b)^2$ ◯ $(a+b)^2$

7. **معطى:** $a + b = 10 \text{ , } ab = 16$.

احسبوا، في كلّ بند، قيمة التعبير **دون أن تحسبوا** قيمتيْ a وَ b.

أ. $5(a + b)$ ث. $3ab$ خ. $a + b + ab$

ب. $3a + 3b$ ج. $\frac{ab}{2}$ د. $(a + b)^2$

ت. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ ح. $(ab)^2$ ذ. $(a + b)^2 - 2ab$

8. **معطى:** $a + b = 10 \text{ , } ab = 24$.

احسبوا، في كلّ بند، قيمة التعبير **دون أن تحسبوا** قيمتيْ a وَ b.

أ. $2a + 2b$ ث. $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$ خ. $ab \cdot (a + b)$

ب. $2a \cdot 2b$ ج. $a^2 \cdot b^2$ د. $(a + b)^2$

ت. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ ح. $\frac{12a + 12b}{ab}$ ذ. $(a + b)^2 - 2ab$

9. **معطى:** $a - b = 9 \text{ , } ab = 36$.

احسبوا، في كلّ بند، قيمة التعبير **دون أن تحسبوا** قيمتيْ a وَ b.

أ. $2a - 2b$ ث. $a^2 + b^2$ خ. $\frac{ab}{a - b}$

ب. $2ab$ ج. $(a + b)^2$ د. $a^2b - ab^2$

ت. $a^2 - 2ab + b^2$ ح. $a^2 - b^2$ ذ. $\sqrt{\frac{a - b}{ab}}$

10. اختاروا عددين فرديين متتاليين.

أ. ارمزوا بـ x إلى أحد العددين، واكتبوا تعبيرًا جبريًّا للعدد الفرديّ التالي.

ب. الفرق بين مربّع العددين هو 32. جدوا العددين.

11. أمامكم ثلاث متساويات.

أ. افحصوا هل هي صحيحة؟

$4^2 + 4 = 5^2 - 5$

$7^2 + 7 = 8^2 - 8$

$10^2 + 10 = 11^2 - 11$

ب. اختاروا أعدادًا مناسبة، واكتبوا مساواة إضافيّة شبيهة.

ت. استخلصوا استنتاجًا واكتبوه بالكلمات أو بكتابة جبريّة.

ث. استعينوا بقانون التوزيع وبقانون الضرب المختصر وبرهنوا استنتاجاتكم.

12. مجموع عددين هو 30.

الفرق بين مربّعيِ العددين هو 120.

أ. اكتبوا تعابير ومعادلات مناسبة.

ب. حلّوا المعادلات وجدوا العددين.

13. معطى عددين موجبين a وَ b بحيث أن $a > b$.

جدوا الخطأ في البرهان التالي.

$a > b \;/\cdot b$

$ab > b^2 \;/ - a^2$

$ab - a^2 > b^2 - a^2$

$a(b - a) > (b - a)(b + a) \;/ : (b - a)$

$a > b + a \;/ - a$

$0 > b$

استنتاج: b عدد سالب، وذلك عكس المعطى.

14. معطى المعادلة $x^2 + 3bx + 2b^2 = 0$.

معلوم أنّ $x = 2$ هو أحد حلول المعادلة.

أ. جدوا قيمة b (إمكانيّتان).

ب. جدوا الحلّ الثاني (إمكانيّتان).

نحافظ على لياقة رياضيّة

القوى

1. عبروا كقوّة.

أ. $2^{12} \cdot 2^{2}$ ت. $7^{12} \cdot 7^{5} \cdot 7^{3}$ ج. $8^{n} \cdot 8^{3} \cdot 8^{4}$

ب. $3^{5} \cdot 3^{7} \cdot 3^{2}$ ث. $a^{7} \cdot a$ ح. $12^{n} \cdot 12^{k}$

2. احسبوا أو اكتبوا تعابير متساوية بمساعدة قوانين القوى. **مثال:** $\frac{3^5}{3^7} = 3^{5-7} = 3^{-2}$ أو $\frac{1}{3^2}$

أ. $\frac{2^{-3}}{2^4}$ ث. $\frac{7^{30}}{7^2}$ خ. $x \neq 0,\ \frac{x^7}{x^6}$

ب. $a \neq 0,\ \frac{a^{-3}}{a^2}$ ج. $\frac{7^2}{7^{30}}$ د. $b \neq 0,\ \frac{b^7}{b^{10}}$

ت. $a \neq 0,\ \frac{a^{-5}}{a^{-2}}$ ح. $\frac{7^{30}}{7^{30}}$ ذ. $b \neq 0,\ \frac{b}{b^{10}}$

3. احسبوا بمساعدة قوانين القوى.

أ. $\frac{4^{-5} \cdot 4^{-5}}{4^{-3} \cdot 4^{3}}$ ت. $\frac{2^{5} \cdot 2^{2} \cdot 3}{3^{2} \cdot 2^{7}}$ ج. $b \neq 0,\ x \neq 0,\ \frac{12x^4 \cdot b \cdot b^3 \cdot x}{2x^5 \cdot 6b^2}$

ب. $\frac{10^{3} \cdot 10^{-4}}{10^{2}}$ ث. $\frac{2^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot 6}{6^{-3} \cdot 7^{-2}}$ ح. $x \neq 0,\ y \neq 0,\ \frac{9x \cdot x^2 \cdot y^3}{3y^2 \cdot x^3 \cdot y}$

4. بسّطوا.

أ. $\frac{(3a^2)^3 \cdot b}{(3a)^4 \cdot b^3}$ ب. $\left(\frac{3b^3}{5b}\right)^4$ ت. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ \left(\frac{a}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{b^3}{a}\right)^2$

5. بيّنوا أنّ المتساويات التالية صحيحة. استعينوا بالتحليل إلى عوامل وبقوانين القوى.

أ. $2^{100} = 4^{50}$ ب. $12^5 = 2^{10} \cdot 3^5$

6. اشترى **نجيب** و**عامر** مبنى لمصنع.
كان سعر المبنى في يوم البيع $4.8 \cdot 10^7$ شاقلًا.
تمّ دفع المبلغ بثلاثة أقساط كالتالي:
القسط الأوّل: مباشرة دون فائدة.
القسط الثاني: بعد مرور شهرين، بإضافة فائدة مقدارها 30%.
القسط الثاني: بعد مرور 4 شهور، بإضافة فائدة مقدارها 70%.
حدّدوا المبلغ الّذي دفعه **نجيب** و**عامر** في كلّ قسط.