الوحدة الثالثة والعشرون: عائلات الدوال

الدرس الأوّل: العائلة $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$

نتمعّن في الدالتين: $f(x) = 2x^2 - 6x$ $\quad g(x) = x^2 - 3x$

عرض **رائد** كلّ دالّة كتعبير ضرب: $f(x) = 2x(x - 3)$ $\quad g(x) = x(x - 3)$

قال **رائد**: نرى أنّ الدالتين لهما النقاط الصفريّة نفسها؛ لذا لهما نفس محور التماثل والرأس نفسه.
هل قول **رائد** صحيح؟ اشرحوا.

نبحث قطوع مكافئة من العائلة $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$.

نتطرّق في المهام 1- 4 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

نقاط التقاطع مع محور x (نقاط صفريّة)

1. أ. ما هي إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $f(x) = 2x^2 - 6x$؟

سجّل **رائد**: $f(x) = 0$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $f(x)$ بطريقة **رائد**.

ب. جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة $g(x) = x^2 - 3x$.

الدالّة التربيعيّة الّتي صورتها $f(x) = ax^2 + bx$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ لها نقطتان صفريّتان. إحداهما $(0, 0)$.
يمكن إيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة بطريقة جبريّة.

مثال: معطى الدالّة $f(x) = -6x^2 - 3x$

نكتب المساواة $f(x) = 0$ $\quad -6x^2 - 3x = 0$

نكتب التعبير كتعبير ضرب $\quad -3x(2x + 1) = 0$

أحد العوامل، على الأقلّ، في تعبير الضرب هو صفر؛ لذا $2x + 1 = 0$ أو $-3x = 0$

$x_2 = -0.5$ أو $x_1 = 0$

لذا $x_1 = -0.5$ ، $x_2 = 0$

إحداثيّات النقاط الصفريّة هي: $(0, -0.5)$ وَ $(0, 0)$

محور التماثل وإحداثيّات نقطة الرأس

2. ما هو محور تماثل الدالّة $f(x)= 2x^2 - 6x$؟

قال **رائد:** إحداثيّات النقاط الصفريّة هي (3, 0) وَ (0, 0).

النقاط الصفريّة هي نقاط متماثلة مقارنة بمحور التماثل.

هذا يعني أنّ محور التماثل يمرّ **في منتصف القطعة،** بالضبط، الّتي تربط بين النقاط الصفريّة.

أ. ما هو محور تماثل الدالّة $f(x)$؟

ب. ما هو محور تماثل الدالّة $g(x) = x^2 - 3x$؟

3. ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة $f(x) = 2x^2 - 6x$؟

قال **رائد:** تقع نقطة الرأس على محور التماثل ($x = 1.5$).

لإيجاد إحداثيّا نقطة الرأس، نعوّض $x = 1.5$ في التمثيل الجبريّ للدالّة.

أ. جدوا إحداثيْ نقطة رأس الدالّة $f(x)$.

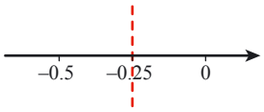
ب. جدوا إحداثيْ نقطة رأس الدالّة $g(x) = x^2 - 3x$.

4. انسخوا وأكملوا **بطاقة هُويّة** كلّ دالّة.

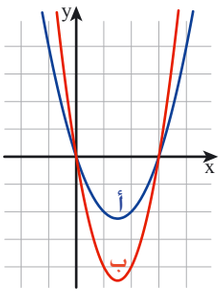
التمثيل الجبريّ للدّالّة	$f(x) = 2x^2 - 6x$	$g(x) = x^2 - 3x$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الّذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

يمرّ محور التماثل للقطع المكافئ الّذي يصف الدالّة التربيعيّة الّتي صورتها $f(x) = ax^2 + bx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ عبر منتصف القطعة الّتي تربط بين النقطتين الصفريّتين للدالّة.
يمكن إيجاد إحداثيّات النقاط الصفريّة بطريقة جبريّة.

مثال: معطى الدالّة $f(x) = -6x^2 - 3x$
إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة هي $(0,\ -0.5)$ وَ $(0,\ 0)$
محور التماثل $x = -0.25$



قطوع مكافئة ذات صفات معطاة



5. أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة $f(x) = 2x^2 - 6x$
$g(x) = x^2 - 3x$

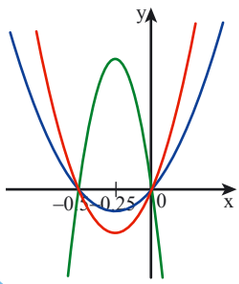
ب. جدوا دالتين إضافيّتين، بحيث تكون لهما النقاط الصفريّة نفسها.
ما هو محور تماثل الدوال الّتي وجدتموها؟
كم دالّة كهذه وجدتم؟

6. أ. أعطوا مثالًا لدالّة تربيعيّة إحداثيّات نقاطها الصفريّة هي: $(4,\ 0)$ وَ $(0,\ 0)$.
كم دالّة كهذه وجدتم؟

ب. أعطوا مثالًا لدالّة تربيعية محور تماثلها هو $x = 5$ ويمرّ خطّها البيانيّ في نقطة الأصل.
كم دالّة كهذه وجدتم؟

ت. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث يكون الإحداثيّ x لنقطة الرأس 2.5 وإحداثيًا إحدى النقاط الصفريّة $(0,\ 0)$.
كم قطعًا مكافئًا مناسبًا يوجد؟

رأينا، في المهمّة 5، أنّه يمكن إيجاد عدد لا نهائيّ من القطوع المكافئة الّتي لها النقاط الصفريّة نفسها ومحور التماثل نفسه.



مثال: الدوال التالية:
$f(x) = -6x^2 - 3x$ $\quad g(x) = x^2 + 0.5x$ $\quad h(x) = 2x^2 + x$
لها النقاط الصفريّة نفسها $(0,\ -0.5)$ وَ $(0,\ 0)$ ومحور التماثل نفسه $(x = -0.25)$
يمكن أن نعرض هذه الدوال كتعبير ضرب كالتالي: $f(x) = ax(x + 0.5)$ $\quad (a \neq 0)$

مجموعة مهامّ

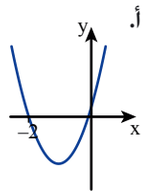
1. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة، محور التماثل وأحداثيْ نقطة الرأس.

أ. $y = 2x^2 - 4x$ ب. $y = 4x^2 + 12x$ ت. $y = -6x^2 + 12x$

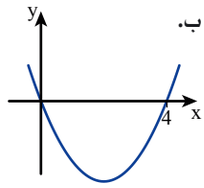
2. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة.

$f(x) = 2x^2 + 4x$ $g(x) = -3x^2 - 6x$ $h(x) = x^2 - 4x$ $s(x) = -x^2 - x$

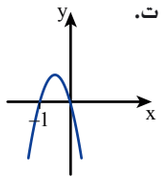
أ.



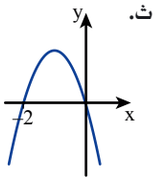
ب.



ت.



ث.



3. ابحثوا الدالتين التاليتين. انسخوا وأكملوا **بطاقة هُويّة** كلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$f(x) = 3x^2 - 12x$	$g(x) = -12x^2 + 6x$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

4. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة، محور التماثل وأحداثيْ نقطة الرأس، وارسموا رسمة تقريبيّة حسب النقاط الّتي وجدتموها.

أ. $y = x^2 + 8x$ ب. $y = -2x^2 + 4x$ ت. $y = 7x^2 - 21x$

5. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة، محور التماثل وأحداثيْ نقطة الرأس، وارسموا رسمة تقريبيّة حسب النقاط الّتي وجدتموها.

أ. $y = 2x^2 + 10x$ ب. $y = -10x^2 - 2x$ ت. $y = -x^2 + x$

6. أ. ارسموا قطعًا مكافئًا محور تماثله $x = 7$.

كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟ أعطوا مثالًا لقطعين مكافئين.

ب. ارسموا قطعًا مكافئًا نقاطه الصفريّة هما (0 ,5) وَ (0 ,0).

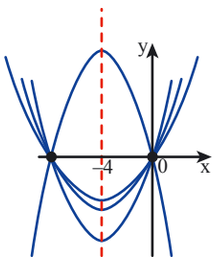
كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟ أعطوا مثالًا لقطعين مكافئين من هذا النوع.

ت ارسموا قطعًا مكافئًا محور تماثله $x = 7$ وإحدى نقاطه الصفريّة هي (0 ,0).

كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟ أعطوا مثالًا لقطعين مكافئين.

7. أعطوا مثالًا لأربع دوال ملائمة للرسمة الّتي أمامكم.

ما هي الصورة العامة للدوال الّتي وجدتموها؟



8. ارسموا قطعًا مكافئًا محور تماثله $x = 3$ ونقطته الصغرى (2- ,3).

كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟ أعطوا مثالًا لقطعين مكافئين.

الدرس الثاني: الدالّة نفسها بتمثيلات جبريّة مختلفة

أمامكم ثلاثة تمثيلات جبريّة مختلفة للدالّة f(x):

$f(x) = 2(x-4)^2 - 18$ $\quad f(x) = 2x^2 - 16x + 14$ $\quad f(x) = 2(x-7)(x-1)$

هل تستطيعون أن تبيّنوا أنّ هذه التمثيلات الثلاثة للدالّة نفسها؟
ما هي الأفضليّة، حسب رأيكم، لكلّ تمثيل جبريّ؟

نميّز صفات الدالّة من التمثيل الجبريّ.

تمثيل الرأس $y = a(x-p)^2 + k$ $(a \neq 0)$

1. معطاة الدالّة $f(x) = 2(x-4)^2 - 18$

أ. ارسموا رسمة تقريبيّة مناسبة للدالّة.

ب. هل يوجد للدالّة نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

ت. هل القطع الّذي رسمتموه هو توسيع أو تضييق للقطع المكافئ $y = x^2$؟

ث. ما هو محور التماثل للقطع المكافئ؟

ج. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟

معلومات عن صفات الدالّة من **تمثيل الرأس** $y = a(x-p)^2 + k$ $(a \neq 0)$

نسمّي الحروف a, p, k "رؤوسًا".

بارمتر a

- نوع نقطة الرأس:
  إذا كان $a > 0$ يوجد للقطع المكافئ نقطة صغرى.
  إذا كان $a < 0$ يوجد للقطع المكافئ نقطة عظمى.
- مدى تضييق أو توسيع ذراع القطع المكافئ:
  كلّما كان $|a|$ أكبر كان ذراع القطع المكافئ أكثر ضيقًا .

بارمتر p وَk

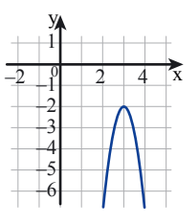
- محور التماثل $x = p$
- إحداثيّا نقطة الرأس (p, k)

مثال:

الدالّة $y = -5(x-3)^2 - 2$

$a = -5,\ p = 3,\ k = -2$

نقطة عظمى للقطع المكافئ.



محور التماثل $x = 3$

إحداثيّا نقطة الرأس $(3, -2)$

التمثيل كتعبير ضرب $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $(a \neq o)$

2. معطاة الدالّة $f(x) = 2(x - 7)(x - 1)$

أ. هل يوجد للدالّة نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

ب. ما هي النقاط الصفريّة للدالّة؟

ت. ما هو محور التماثل للدالّة؟

معلومات عن صفات الدالّة من التمثيل كتعبير ضرب $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $(a \neq 0)$.

بارمتر a

البارمتر a له نفس الوظيفة كما هو الأمر في تمثيل الرأس.

النقاط الصفريّة للدالّة هما: $(x_2, 0)$ وَ $(x_1, 0)$.

محور التماثل

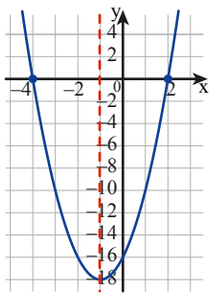
يمرّ في منتصف القطعة الّتي تربط بين النقاط الصفريّة

محور التماثل $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

مثال:

الدالّة $g(x) = 2(x + 4)(x - 2)$

يوجد للقطع المكافئ نقطة صغرى



إحداثيّات النقاط الصفريّة: $(0, -4)$ وَ $(0, 2)$

محور التماثل $x = \frac{-4 + 2}{2} = -1$

الصورة العامة للدالّة التربيعيّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq o)$

3. معطاة الدالّة $f(x) = 2x^2 - 16x + 14$

أ. هل يوجد للدالّة نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

ب. ما هي نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور y؟

ت. ما هو محور التماثل للدالّة؟

معلومات عن صفات الدالّة من الصورة العامة للدالّة التربيعيّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

بارمتر a

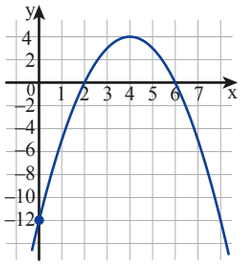
البارمتر a له نفس الوظيفة كما هو الأمر في التمثيل الرأسي.

نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ مع محور y هي $(0, c)$

مثال:

الدالّة $h(x) = -x^2 + 8x - 12$

يوجد للقطع المكافئ نقطة عظمى



إحداثيّا نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور y هي: $(0, -12)$

4. أمامكم ثلاثة تمثيلات للدالّة $f(x)$

تمثيل رأسي	الصورة العامة	تمثيل كتعبير ضرب
$f(x) = (x - 2)^2 - 9$	$f(x) = x^2 - 4x - 5$	$f(x) = (x + 1)(x - 5)$

أ. بيّنوا أنّ التمثيلات الثلاثة تصف الدالّة نفسها.

ب. استعينوا بالمعلومات المعطاة في التمثيلات المختلفة، وجدوا:

هل يوجد للدالّة نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع المحاور؟

ما هو محور التماثل الدالّة؟

ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة؟

ت. ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $f(x)$. عيّنوا النقاط الّتي وجدتموها في بند ب على الخطّ البيانيّ.

مجموعة مهامّ

1. أمامكم تمثيلات جبريّة مختلفة للدالّة $f(x)$.

تمثيل رأسي	الصورة العامة	تمثيل كتعبير ضرب
$f(x) = 3(x + 1)^2 - 27$	$f(x) = 3x^2 + 6x - 24$	$f(x) = 3(x + 4)(x - 2)$

أمامكم صفات، حدّدوا أيّ منها يمكن استنتاجها بسهولة من التمثيل دون تنفيذ حسابات تقريبًا.

أ. نوع الرأس: صغرى أم عظمى

ب. إحداثيّات النقاط الصفريّة

ت. محور التماثل

ث. إحداثيّا نقطة الرأس

ج. مدى تضييق ذراعي القطع المكافئ

ح. إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y

2. أمامكم ثلاثة تمثيلات جبريّة مختلفة للدالّة f(x).

تمثيل رأسي	الصورة العامة	تمثيل كتعبير ضرب
$f(x) = 2(x - 1)^2 - 8$	$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$	$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

أ. بيّنوا أنّ التمثيلات الثلاثة تصف الدالّة نفسها.

ب. استعينوا بالمعلومات المعطاة في التمثيلات المختلفة، وجدوا:

هل يوجد للدالّة نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع المحاور؟

ما هو محور التماثل الدالّة؟

ما هما إحداثيّا نقطة رأس الدالّة؟

ت. ارسموا رسمة تقريبية للخطّ البيانيّ للدالّة f(x). عيّنوا النقاط الّتي وجدتموها في بند ب على الخطّ البيانيّ.

3. ابحثوا الدوال. انسخوا وأكملوا **بطاقة هُويّة** كلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$g(x) = (x + 4)(x - 2)$	$h(x) = -2(x - 4)^2 + 2$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

4. سجّلوا، في كلّ بند، صفتين (أو أكثر) للدالّة.

مثال: الدالّة $f(x) = -3x^2 - 5$
هنالك نقطة عظمى للقطع المكافئ (لأنّ $a = -3$)
نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة مع محور y هي $(0, -5)$.

أ. $f(x) = -5x^2$

ب. $f(x) = (x - 5)(x + 3)$

ت. $f(x) = 2(x - 5)^2 + 3$

ث. $f(x) = (x - 3)(x + 5)$

ج. $f(x) = 3x^2 + x - 2$

ح. $f(x) = (x - 3)^2 - 5$

الدرس الثالث: الانتقال بين التمثيلات الجبريّة

نُحرّك القطع المكافئ $y = x^2$ ثلاث وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأسفل.
سجّلوا التمثيل الجبريّ للدالّة الناتجة بطرق مختلفة:

تمثيل رأسي	الصورة العامة	تمثيل كتعبير ضرب
$y = a(x - p)^2 + k$	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

نتعلّم كيفية الانتقال بين التمثيلات الجبريّة المختلفة للدالّة التربيعيّة.

من تمثيل رأسي إلى تمثيلات جبريّة أخرى

1. معطاة الدالّة بتمثيل رأسي $f(x) = (x - 2)^2 - 16$

أ. بسّطوا التعبير الجبريّ وسجّلوا $f(x)$ بالصورة العامة.

ب. حلّلوا التعبير الّذي حصلتم عليه في بند أ (حسب ثلاثيّ الحدود) إلى عوامل، وسجّلوا $f(x)$ كتعبير ضرب.

يمكن الانتقال من تمثيل رأسي للدالّة التربيعيّة إلى الصورة العامة بواسطة التبسيط.
يمكن الانتقال من الصورة العامة إلى التمثيل كتعبير ضرب بواسطة التحليل إلى عوامل.

مثال:

تمثيل رأسي		الصورة العامة		تمثيل كتعبير ضرب
$y = (x - 2)^2 - 16$	← تبسيط	$y = x^2 - 4x - 12$	← تحليل إلى عوامل	$y = (x - 6)(x + 2)$

من التمثيل كتعبير ضرب إلى تمثيلات جبريّة أخرى

2. معطاة الدالّة بتمثيل تعبير ضرب $g(x) = (x - 2)(x + 8)$

قالت **نعيمة:** إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة هي: $(0, -8)$ وَ $(0, 2)$.
يقع محور التماثل على البُعد نفسه من كِلا النقطتين الصفريّتين؛ لذا محور التماثل هو $x = -3$.
نعوّض $x = -3$ في التمثيل الجبريّ للدالّة، ونحصل على $y = -25$
هذا يعني أنّ إحداثيْ نقطة رأس الدالّة (النقطة الصغرى) هما: $(-3, -25)$

أ. اكتبوا التمثيل الرأسي للدالّة.

ب. بسّطوا أحد التمثيلات الجبريّة للدالّة (التمثيل كتعبير ضرب أو تمثيل رأسي)، واكتبوا الصورة العامة للدالّة $g(x)$.

ت. ارسموا رسمة تقريبية للدالّة $g(x)$ وعيّنوا فيها جميع المعلومات الّتي حصلتم عليها من التمثيلات الثلاثة.

يمكن الانتقال من تمثيل الدالّة كتعبير ضرب إلى التمثيل الرأسي بواسطة إيجاد محور التماثل وإحداثيْ نقطة الرأس بمساعدة النقاط الصفريّة.

مثال:

تمثيل كتعبير ضرب		تمثيل رأسي
$f(x) = -(x - 6)(x + 2)$	⟸	$f(x) = -(x - 2)^2 + 16$

إحداثيّات النقاط الصفريّة هي: $(6, 0)$ وَ$(-2, 0)$ — محور التماثل $x = 2$,

إحداثيّا نقطة الرأس: $(2, 16)$ (نعوّض $x = 2$ في التمثيل الجبريّ ونحصل على $y = 16$)

من الصورة العامة إلى تمثيلات جبريّة أخرى

3. معطاة الصورة العامة للدالّة $h(x) = x^2 - 2x - 3$

أ. حلّلوا إلى عوامل (حسب ثلاثيّ الحدود) واكتبوا الدالّة $h(x)$ كتعبير ضرب.

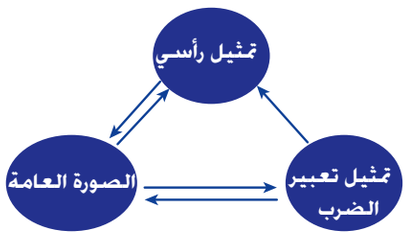
ب. جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة، محور التماثل وإحداثيْ نقطة الرأس.

ت. اكتبوا التمثيل الرأسي للدالّة $h(x)$.

ث. ارسموا رسمة تقريبيّة للدالّة $h(x)$ وعيّنوا فيها جميع المعلومات الّتي حصلتم عليها من التمثيلات الثلاثة.

4. انسخوا الرسم التخطيطيّ.
سجّلوا، على كلّ سهم، طريقة الانتقال بين التمثيلات الجبريّة للدالّة التربيعيّة من القائمةالتالية:

- تبسيط.
- بمساعدة النقاط الصفريّة.
- تحليل إلى عوامل (ثلاثيّ الحدود).
- إكمال إلى مربّع.



مجموعة مهامّ

1. أ. معطاة الدالّة بتمثيل رأسي: $f(x) = (x - 5)^2 - 1$.
بسّطوا التعبير الجبريّ وسجّلوا $f(x)$ بالصورة العامة.

ب. معطاة الصورة العامة للدالّة: $g(x) = x^2 - 10x + 24$.
حلّلوا إلى عوامل (حسب ثلاثيّ الحدود) واكتبوا الدالّة $g(x)$ كتعبير ضرب.

ت. إذا كان حلكم صحيحًا فستجدون أنّ $f(x) = g(x)$.
ارسموا رسمة تقريبيّة وعيّنوا فيها جميع المعلومات الّتي وجدتموها في التمثيلات المختلفة للدالّة.

2. انسخوا الجدول وأكملوه.

تمثيل رأسي $y = a(x - p)^2 + k$	الصورة العامة $y = ax^2 + bx + c$	تمثيل كتعبير ضرب $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$f(x) = (x - 2)^2 - 25$		
		$g(x) = -(x + 6)(x - 4)$
	$h(x) = x^2 + 5x - 50$	

3. انسخوا الجدول وأكملوه.

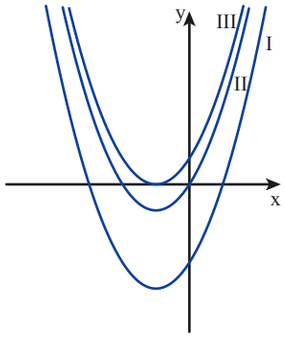
تمثيل رأسي $y = a(x - p)^2 + k$	الصورة العامة $y = ax^2 + bx + c$	تمثيل كتعبير ضرب $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$f(x) = 2(x - 4)^2 - 2$		
		$g(x) = (x + 6)(x - 6)$
	$h(x) = 3x^2 - 6x - 9$	

4. ابحثوا الدوال التالية. انسخوا وأكملوا

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$f(x) = x^2 - 8x - 20$	$g(x) = (x+7)(x-5)$	$h(x) = -2(x+5)^2 - 7$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة			
محور التماثل			
إحداثيّا نقطة الرأس			
نوع الرأس			
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)			
مجال تصاعد الدّالّة			
مجال نزول الدّالّة			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)			

5. أمامكم خطوط بيانيّة لثلاث دوال:

$f(x) = 2x^2 + 4x$ $\quad g(x) = 2x^2 + 4x - 6$ $\quad h(x) = 2x^2 + 4x + 2$



أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة (يمكن الاستعانة بـ c).

ب. جدوا لكلّ دالّة الصفات التالية بطريقة جبريّة:

- إحداثيّات النقاط الصفريّة.
- محور التماثل.
- إحداثيّا نقطة الرأس.
- إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y .

افحصوا إجاباتكم بمساعدة الخطوط البيانيّة.

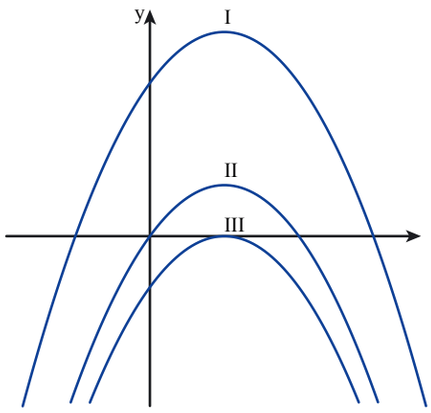
ت. جدوا الإحداثيّ x عندما يكون: $f(x) = 6$; $g(x) = 10$.

6. أمامكم خطوط بيانيّة لثلاث دوال بصورتها العامة $y = ax^2 + bx + c$ $\quad (a \neq 0)$

$f(x) = -x^2 + 4x$

$g(x) = -x^2 + 4x - 4$

$h(x) = -x^2 + 4x + 12$



أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للدالّة المناسبة (يمكن الاستعانة بـ c).

ب. جدوا لكلّ دالّة الصفات التالية بطريقة جبريّة:

- إحداثيّات النقاط الصفريّة.
- محور التماثل.
- إحداثيّا نقطة الرأس.
- إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y .

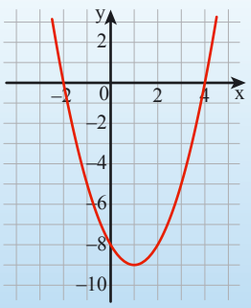
افحصوا إجاباتكم بمساعدة الخطوط البيانيّة.

7. جدوا محور تماثل الدالّة.

أ. $y = 3(x - 4)(x + 2)$ $\quad$ ب. $y = 3(x - 4)^2 + 1$ $\quad$ ت. $y = -2(x - 1)(x + 4)$

الدرس الرابع: من الصفات إلى الدالّة

أمامكم قطع مكافئ يصف دالّة تربيعيّة فيها a = 1.

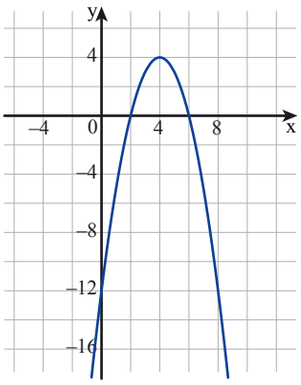


هل تستطيعون أن تجدوا حسب الرسمة التمثيل الجبريّ للدالّة؟

نجد التمثيل الجبريّ للدالّة حسب الصفات.

1. قالت **نعيمة**: حسب الرسمة، إحداثيّات النقاط الصفريّة هي (4, 0) وَ (−2, 0).
لذا؛ الدالّة هي $f(x) = (x + 2)(x - 4)$.
قالت **مريم**: حسب الرسمة، إحداثيّا نقطةالرأس (−9, 1).
لذا؛ الدالّة هي $f(x) = (x - 1)^2 - 9$.

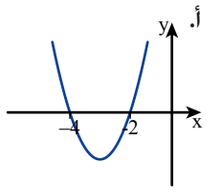
أ. من منهما قولها صحيح؟ اشرحوا.
ب. اكتبوا التمثيل المعياري للدالّة.

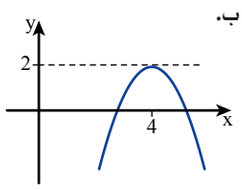


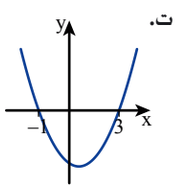
2. أمامكم قطع مكافئ يصف دالّة تربيعيّة فيها a = −1.
ما هو التمثيل الجبريّ للدالّة؟
اكتبوا تمثيلات جبريّة مختلفة:
- تمثيل رأسي.
- الصورة العامة.
- تمثيلًا كتعبير ضرب.

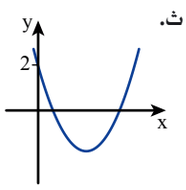
3. جدوا، في كلّ بند، مثالًا لدالّة مناسبة، حدّدوا عدد الدوال المناسبة واشرحوا:
أ. إحداثيّات النقاط الصفريّة (3, 0) وَ (−1, 0).
ب. إحداثيّا نقطة الرأس (5, −9).
ت. إحداثيّات نقطة التقاطع مع محور y هما (2, 0).
ث. محور التماثل x = 4.
ج. يوجد للقطع المكافئ نقطة عظمى، ومدى تضيق أو توسيع ذراعيّ القطع المكافئ هو |a| = 0.5.

4. جدوا التمثيل الجبريّ المناسب لكلّ رسمة دالّة.

أ.


ب.


ت.


ث.


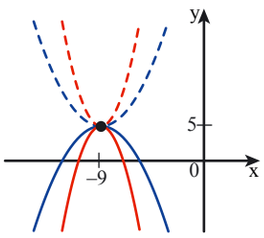
هل a = 1 أو a = −1 في جميع التمثيلات الجبريّة الّتي سجّلتموها؟
إذا كانت الإجابة نعم فاقترحوا تمثيلًا جبريًّا واحدًا، على الأقلّ، لـ a ≠ 1 أو a ≠ −1.

رأينا أنّه يمكن أن نحصل على معلومات عن التمثيل الجبريّ للدالّة حسب صفاتها.

أمثلة: في المهمّة 3،

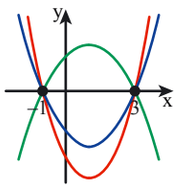
إذا كان إحداثيْ رأس القطع المكافئ: (5 ,9−)،
فإنّ الدوال المناسبة صورتها:

$$y = a(x + 9)^2 + 5$$



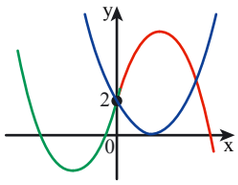
إذا كانت إحداثيّات النقاط الصفريّة
(3 ,0) وَ (1− ,0)، فإنّ الدوال المناسبة صورتها:

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$



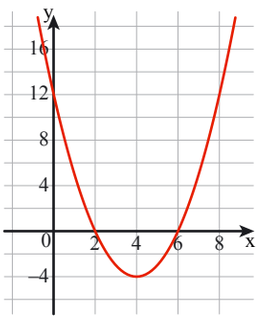
إذا كان إحداثيْ نقطة التقاطع مع محور
y: (2 ,0)، فإنّ الدوال المناسبة صورتها:

$$y = ax^2 + bx + 2$$



مجموعة مهامّ

1. أمامكم خطّ بيانيّ لدالّة تربيعيّة فيها $a = 1$.
ما هو التمثيل الجبريّ للدالّة؟
اكتبوا الدالّة بثلاثة تمثيلات:
رأسي، صورة عامة وتعبير الضرب.



2. أعطوا، في كلّ بند، مثالًا لدالّة مناسبة.
أ. إحداثيّات النقاط الصفريّة (5 ,0) وَ (1− ,0).
ب. إحداثيّا نقطة الرأس (3 ,5).
ت. إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y هما (5 ,0).

3. أعطوا، في كلّ بند، مثالًا لدالّة مناسبة.

أ. للقطع المكافئ نقطة صغرى ومحور التماثل هو $x = -2$.

ب. للقطع المكافئ نقطة عظمى، محور التماثل $x = -2$ وهو يمرّ في نقطة الأصل.

ت. محور التماثل للقطع المكافئ هو $x = -2$ وإحداثيّا النقطة الصغرى هما $(-2, 5)$.

4. لائموا كلّ دالّة للصفة المناسبة.

الصفات	الدوال
أ. إحداثيّات النقاط الصفريّة هي $(3, 0)$ وَ $(-1, 0)$	$f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$
ب. إحداثيّا نقطة الرأس هما $(-1, 3)$	$g(x) = 2x^2 - 3x + 1$
ت. إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y هما $(0, 1)$	$h(x) = (x - 3)(x + 1)$

5. لائموا صفة واحدة لكلّ دالّة.

الصفات	الدوال
أ. إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y هما $(0, -2)$	$f(x) = -3x^2 - 5$
ب. إحداثيّا النقطة العظمى هما $(0, -5)$	$g(x) = 3x^2 + x - 2$
ت. إحداثيّات النقاط الصفريّة هي $(3, 0)$ وَ$(-5, 0)$	$h(x) = (x - 3)^2 - 5$
ث. إحداثيّا النقطة الصغرى هما $(3, -5)$	$r(x) = 2(x - 5)^2 + 3$
ج. محور التماثل هو $x = 0$	$s(x) = (x - 3)(x + 5)$
ح. إحداثيّا النقطة الصغرى هما $(5, 3)$	$e(x) = 5x^2$

6. إحداثيّات النقاط الصفريّة لدالّة تربيعيّة هي $(2, 0)$ وَ $(4, 0)$.

جدوا دالّة مناسبة من بين الدوالّ التالية.

أ. $y = (x + 2)(x + 4)$ ت. $y = (x - 2)(x - 8)$ ج. $y = -(x - 2)(x - 4)$

ب. $y = 3(x - 2)(x + 11)$ ث. $y = (x - 5)^2 + 7$ ح. $y = -(x - 5)^2 + 1$

7. محور التماثل لدالّة تربيعيّة هو $x = 5$.

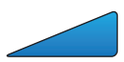
افحصوا في أيّ بنود سُجّلت دالّة مناسبة.

أ. $y = (x + 2)(x + 4)$ ت. $y = (x - 2)(x - 8)$ ج. $y = -(x - 2)(x - 4)$

ب. $y = 3(x - 2)(x + 11)$ ث. $y = (x - 5)^2 + 7$ ح. $y = -(x - 5)^2 + 1$

8. ابحثوا الدوال. انسخوا وأكملوا **بطاقة هُويّة**.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$	$h(x) = -3(x + 1)^2 + 12$
المجال	جميع الأعداد	جميع الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع الرأس		
نقاط التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		



9. معطاة الدالّة $y = (x - 1)(x - 5)$.

أ. ما هو محور تماثل القطع المكافئ المناسب؟

ب. أزيحوا القطع المكافئ بحيث يكون محور تماثله $x = 6$.

جدوا نقطة تقاطع الدالّة الناتجة مع محور x ، واكتبوا التمثيل الجبريّ للدالّة الناتجة.

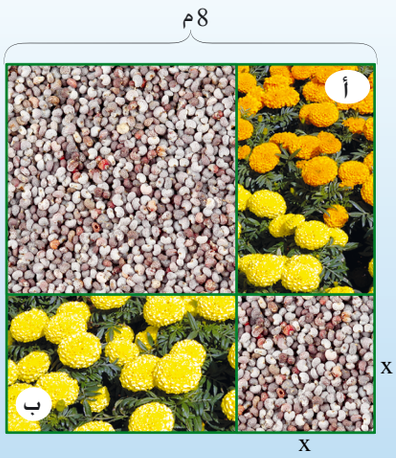
10. أزيحوا القطع المكافئ $y = x^2$ بحيث ينتج القطع المكافئ $f(x) = x^2 + 4x + 7$.

هل توجد نقاط صفريّة للدالّة؟ إذا كانت الإجابة بنعم فاكتبوا إحداثيّاتها. وإذا كانت الإجابة "لا" فاشرحوا.

إرشاد: يمكن تسجيل الدالّة كالتالي: $f(x) = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2} + 3$

الدرس الخامس: نقاط الرأس وحلّ معادلات

يوجد في ساحة المدرسة قطعة أرض مربّعة الشكل طول ضلعها 8 م.
تُخطط إدارة المدرسة أن تغرس الأزهار في حوضين (كما يظهر في الصورة)، وأن تُبلط المساحة الّتي بقيت.



سجّلوا تعابير جبريّة مناسبة لقياسات الحوضين
(x يُمثل طول ضلع المربّع الأيمن المبلّط بالأمتار،
$0 \le x \le 8$).
خمّنوا: ما هي المساحة الكبرى الممكنة لغرس الأزهار؟
ما هي مساحة المربّع الأيمن المبلط في هذه الحالة؟

نحلّ مسائل كلاميّة، ونجد قيمًا عظمى وصغرى لتعابير تربيعيّة.

نتطرّق في المهام 1 - 5 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. انسخوا الجدول وأكملوه.

المساحة الكليّة لحوضيّ الأزهار (بالأمتار المربّعة)	مساحة الحوض ب (بالأمتار المربّعة)	مساحة الحوض أ (بالأمتار المربّعة)	طول ضلع المربّع الأيمن المبلط (بالأمتار)
			1
			3
			x

بسّطوا!

2. اقترح البستانيّ أن تُغرس الأزهار في مساحة كليّة مقدارها 24 مترًا مربّعًا.

أ. قالت **جميلة**: الدالّة التي تصف مساحة حوضيّ الأزهار هي $y = -2x^2 + 16x$.

سجّلت: $-2x^2 + 16x = 24$

$-2x^2 + 16x - 24 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

حلّوا معادلة **جميلة**.

ب. ما هي قياسات المربّع الأيمن المبلط حسب اقتراح البستانيّ؟

ت. ارسموا، على ورقة مقسمة إلى تربيعات، رسمين تخطيطين لتخطيط الساحة المناسبة لاقتراح البستانيّ.

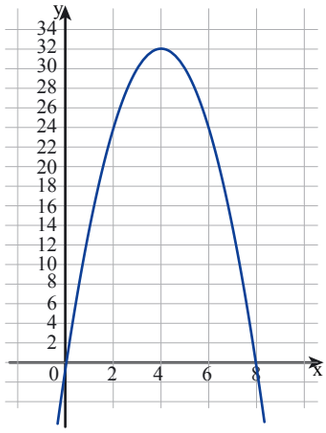
ث. ما هي المساحة المبلطة في كلّ حالة من الحالتين؟

3. اقترحت المديرة أن تكون المساحة الكليّة للحوضين 14 مترًا مربّعًا.

ما هي قياسات المربّع الأيمن المبلط حسب اقتراح المديرة؟

هل هنالك إمكانيّات مختلفة لتخطيط الساحة حسب اقتراح المديرة؟ اشرحوا.

4. رسم **عماد** بواسطة الحاسوب الخطّ البيانيّ للدالّة $y = -2x^2 + 16x$.



أ. أيّ قسم من الخطّ البيانيّ مناسب للقصّة؟ اشرحوا.

ب. اشرحوا كيف يمكن أن نجد، من الرسم البيانيّ، طول ضلع المربّع الأيمن المبلّط في كلّ حالة:

- حسب اقتراح البستاني: المساحة الكليّة للحوضين هي 24 مترًا مربّعًا.
- حسب اقتراح المديرة: المساحة الكليّة للحوضين هي 14 مترًا مربّعًا.

ت. ما هو مجال صعود، وما هو مجال نزول الدالّة؟
ما هو معنى مجال الصعود ومجال النزول في الدالّة؟

5. أراد طلاب دورة الزراعة أن تكون مساحة الحوضين عظمى.
ما هي قياسات المربّع الأيمن المبلط في هذه الحالة؟
جدوا الإجابة بطريقة جبريّة وافحصوها بمساعدة الرسم البيانيّ.

6. مجموع طول قائمَيْ مثلّث قائم الزاوية هو 22 سم.
نرمز: x - طول أحد القائمين بالسم.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. اكتبوا تعابير جبريّة لطول القائم الثاني للمثلّث ولمساحة المثلّث.

ت. ما هما طولا القائمين إذا كانت مساحة المثلّث 56 سنتمترًا مربّعًا؟ كم إمكانيّة مختلفة وجدتم؟

ث. ما هي المساحة العظمى الممكنة للمثلّث؟ اشرحوا.

ج. ما هو طول الوتر إذا كانت مساحة المثلّث عظمى؟ اشرحوا.

مجموعة مهامّ

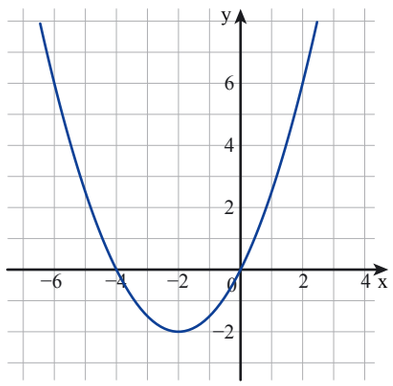
1. أمامكم الخطّ البيانيّ للدالّة $y = 0.5x^2 + 2x$.
حلّوا المعادلات التالية بمساعدة الرسم البيانيّ.

أ. $0.5x^2 + 2x = 0$

ب. $0.5x^2 + 2x = 6$

ت. $0.5x^2 + 2x = -2$

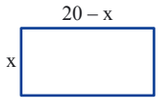
ث. $0.5x^2 + 2x = -4$



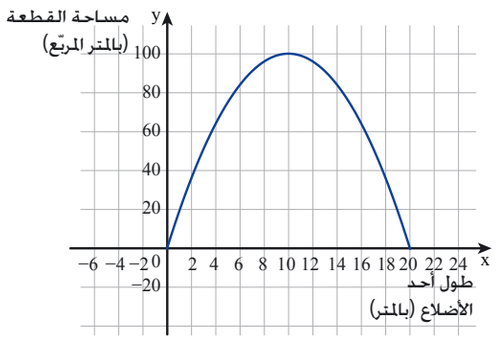
2. طول سيّاج قطعة أرض مستطيلة الشكل هو 40 متراً.

أ. أعطوا 3 أمثلة لقياسات قطعة الأرض المستطيلة الشكل.

ب. نرمز بـ x إلى طول أحد أضلاع قطعة الأرض المستطيلة الشكل (بالأمتار) $(0 < x < 20)$.
نرمز بـ $(20 - x)$ إلى طول الضلع الثاني لقطعة الأرض المستطيلة الشكل (بالأمتار) (انظروا الرسمة التوضيحيّة).
ماذا يمثّل التعبير $x(20 - x)$؟



ت. أمامكم الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x(20 - x)$.
أجيبوا حسب الرسم البيانيّ:
ما هي أطوال أضلاع القطعة المستطيلة الشكل إذا كانت المساحة:20 متراً مربّعًا؟ 50 متراً مربّعًا؟ 90 متراً مربّعًا؟
ما هي المساحة العظمى الممكنة لقطعة الأرض؟



3. نبني مستطيلًا من خيط طوله 12 سم.

أ. اكتبوا تعابير جبريّة لأطوال أضلاع المستطيل ولمساحة المستطيل.

ب. ما هي قياسات المستطيل إذا كانت مساحته 8 سنتمترات مربّعة؟ اشرحوا.

ت. ما هي قياسات المستطيل الّذي يمكن بناؤه بحيث تكون مساحته عظمى؟ اشرحوا.

4. معطى عددان، أحدهما أكبر من الآخر بـ 10. نضرب العددين ببعضهما.
في أيّ أعداد نحصل على حاصل الضرب الأصغر؟

5. حلّوا المعادلات.

أ. $3x^2 + 6x = 9$ ب. $2x^2 - 16x = -30$ ت. $-2x^2 - 8x + 10 = 0$

نحافظ على لياقة رياضيّة

الضرب المختصر

1. جدوا أزواجًا من التعابير الجبريّة المتساوية.

أ. $x^2 + 2x + 1$ ب. $x^2 + 10x + 25$ ت. $x^2 - 9$ ث. $x^2 - 12x + 36$

a. $(x + 5)^2$ b. $(x - 6)^2$ c. $(x + 1)^2$ d. $(x + 3)(x - 3)$

2. جدوا الأخطاء وصحّحوها.

أ. $(x + 5)^2 = x^2 + 25$ ت. $(x - 6)^2 = x^2 + 12x + 36$

ب. $(x - 3)(x + 3) = x^2 + 9$ ث. $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 8$

3. حلّوا.

أ. $x^2 - 2x + 1 = 0$ ث. $x^2 - 8x + 16 = 0$

ب. $4x^2 - 4x + 1 = 144$ ج. $x^2 + 6x + 9 = 0$

ت. $x^2 + 18x + 81 = 16$ ح. $4x^2 - 20x + 25 = 36$

4. حلّوا.

أ. $5(x - 3)^2 - 5(x - 4)(x + 4) > 75$

ب. $(x - \frac{1}{2})^2 - (x + \frac{1}{2})^2 > 0$

ت. $(x - 1)^2 - (4 - x)^2 > 3$

5. حدّدوا، في كلّ بند، أيّ قيم مناسبة لـ x حسب المعطيات، وسجّلوا تعبيرًا لمساحة المربع (x بوحدات طول).

أ. طول ضلع المربّع $x - 8$ ب. طول ضلع المربّع $x + 2$ ت. طول ضلع المربّع $7x - 2$

6. يمثّل التعبير الجبريّ، في كلّ بند، مساحة المربّع بالسنتمتر مربّع (x بالسم).
حدّدوا أيّ قيم مناسبة لـ x، وسجّلوا تعبيرًا لطول ضلع المربّع حسب مساحته.

أ. $(2x - 5)^2$ ب. $x^2 + 10x + 25$

7. معطى مربّع طول ضلعه $3a$ وحدات ($a > 0$ وحدة طول).
معطى مستطيل طول أحد أضلاعه أصغر بـ 2 وحدات من طول ضلع المربّع،
وطول الضلع الآخر أكبر بـ 2 وحدات من طول ضلع المربّع.
أ. أيّ قيم مناسبة لـ a حسب شروط المسألة؟
ب. أيّ شكل رباعي مساحته أكبر، المستطيل أم المربّع؟ اشرحوا.