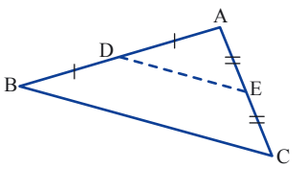
الوحدة الثالثة والثلاثون: قِطع متوسّطة

الدرس الأوّل: قِطع متوسّطة في المثلّث

يبني **ماهر** أرجوحة لأطفال الروضة.
وضع، في كلّ طرف، قضيبًا أفقيًّا لتثبيت الإطار كما يظهر في الرسمة.
تربط القضبان الملوّنة **بالأحمر** بين منتصفات الأعمدة.
كيف يحسب **ماهر** طول القضيب **الأحمر**؟

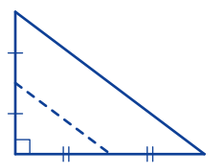
نتعرّف على صفات قطع توصل بين منتصفات أضلاع المثلّث.

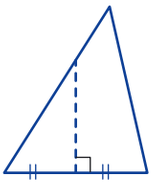
تعريف: نسمّي القطعة الّتي توصل بين منتصفات الأضلاع في المثلّث "**قطعة متوسّطة في المثلّث**".



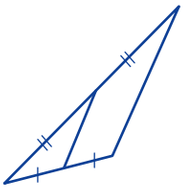
مثال: في المثلّث ABC ، في الرسمة، DE هو قطعة متوسّطة.

1. أ. في أيّ مثلّث القطعة المتقطعة هي قطعة متوسّطة؟

I


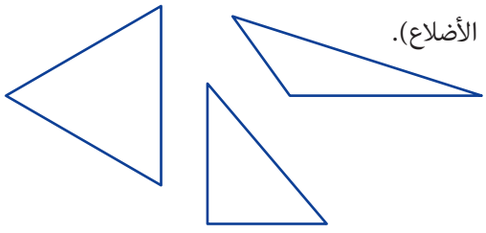
II


III

IV


ب. أي قِطع رُسمت في المثلّثات الأخرى؟

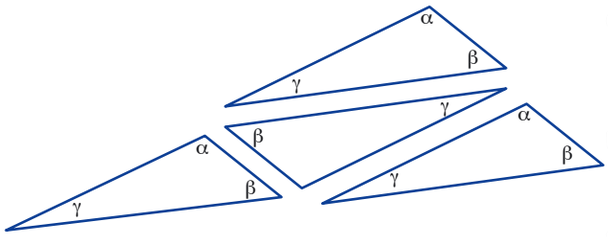
2. أ. ارسموا مثلّثات مختلفة (قائم الزاوية، منفرج الزاوية، متساوي الأضلاع).
ارسموا، في كلّ مثلّث، جميع القطع المتوسّطة.



ب. كم قطعة متوسّطة يوجد في كلّ مثلّث؟

ت. أين تقع القطع المتوسّطة، بالتقريب، في "مثلّثات الملاقط" الّتي تظهر في الصورة؟

3. أ. قُصّوا 4 مثلّثات متطابقة (يمكنكم طيّ ورقة مرّتين وقصّ مثلّث).
أشيروا في المثلّثات، الّتي قمتم بقصّها، إلى الزوايا المتساوية بالمقدار بالحروف α ، β وَ γ حسب المثلّثات التوضيحيّة



ابنوا مثلّثًا كبيرًا واحدًا من المثلّثات الصغيرة الّتي قمتم بقصّها.

ب. برهنوا أنكم بنيتم مثلّثًا بالفعل:
بيّنوا أنّ الزوايا المتجاورة تُنتج خطًّا مستقيمًا (ضلع مثلّث كبير).

ت. علّلوا لماذا كلّ ضلع، مثلّث صغير، هو قطعة متوسّطة في المثلّث الكبير؟

ث. علّلوا لماذا القطعة المتوسّطة في المثلّث تساوي بالطول نِصف طول الضلع الثالث؟

ج. علّلوا لماذا القطعة المتوسّطة في المثلّث توازي الضلع الثالث؟

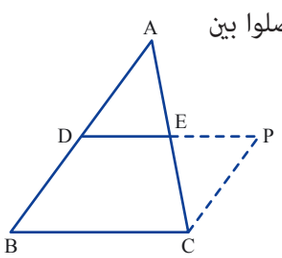
برهنا في المهمّة 3:
نظريّة القطعة المتوسّطة في المثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نِصف طول الضلع الثالث.

4. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة (الرسمة للتوضيح).
البُعد بين عمدان الأرجوحة الّتي بناها **ماهر** هو 180 سم.
يوصل القضيبان الملوّنان **بالأحمر** بين منتصفي العمودين.
ما هو طول كلّ قضيب **أحمر** يُثبت الأعمدة؟ اشرحوا.

5. نبرهن بطريقة إضافيّة أنّ القطعة المتوسّطة في المثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نِصف طول الضلع الثالث.

أ. اكتبوا المعطى والمطلوب برهانه.

ب. **بناء مساعد**: مدّوا القطعة DE بمقدار طولها حتى النقطة P (DE = EP)، وأوصلوا بين النقطتين P وَ C.



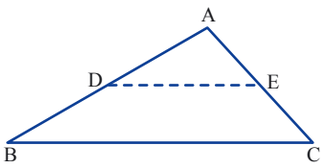
برهنوا: $\Delta ADE \cong \Delta CPE$

ت. ما هو نوع الشكل الرباعيّ BCPD؟ **برهنوا**.

ث. **برهنوا**: $DE \parallel BC$

$DE = \frac{1}{2}BC$

قطعة متوسّطة في المثلّث

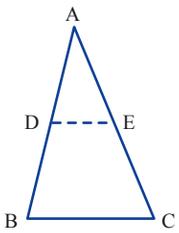


- حسب التعريف تُنصّف القطعة المتوسّطة ضلعين في المثلّث AD = DB.
  AE = EC

برهنا أنّ القطعة المتوسّطة:

- توازي الضلع الثالث DE ∥ BC.
- طولها يساوي نِصف طول الضلع الثالث $DE=\frac{1}{2}BC$

6. معطى DE قطعة متوسّطة في المثلّث ABC.



أ. **برهنوا:** ΔABC~ΔADE

ب. ما هي نسبة التشابه؟

ت. ما هي النسبة بين مساحات المثلّثات المتشابهة؟

مجموعة مهامّ

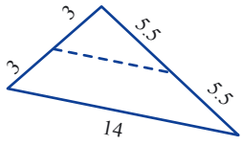
ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهمّة بديلة للمهمّة 5 في هذه المجموعة من المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

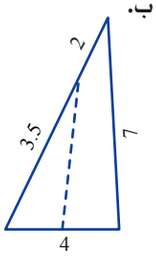
.

1. حدّدوا، في كلّ مثلّث، هل القطعة المتقطعة قطعة متوسّطة؟ إذا كانت الإجابة نعم، فجدوا طول القطعة.

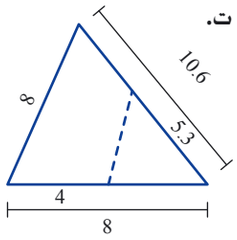
أ.



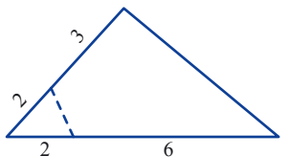
ب.



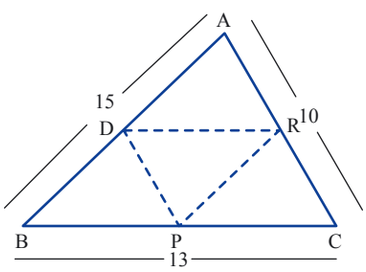
ت.



ث.



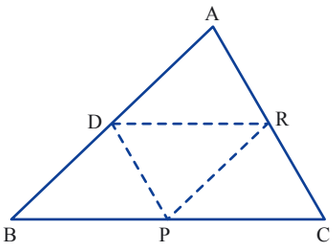
2. معطى النقاط D, P, R هي منتصفات أضلاع المثلث ΔABC.
احسبوا محيط المثلّث الداخلي ΔDPR.



3. معطى النقاط D, R, P هي منتصفات أضلاع المثلّث ΔABC

أ. **برهنوا:** المثلّثات الأربعة الناتجة متطابقة.

ب. جدوا النسبة بين مساحة ΔPRD ومساحة ΔABC.

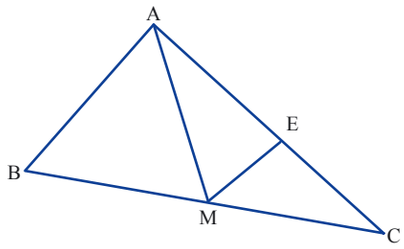


4. معطى AM متوسّط للضلع BC في ΔABC.

ME قطعة متوسّطة في ΔABC.

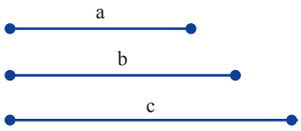
مساحة ΔABC تساوي 12 سنتمترًا مربّعًا.

جدوا مساحة المثلّثات EMC, AME وَ ABM. اشرحوا.



5*. ابنوا مثلّثًا أطوال القطع المتوسّطة فيه كأطوال القطع a, b وَ c.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "مثلّث حسب القطع المتوسّطة" *"משולש לפי קטעי אמצעים"*



6. أوصلوا في ΔABC بين منتصفات الأضلاع، ونتج $\Delta A_1B_1C_1$.

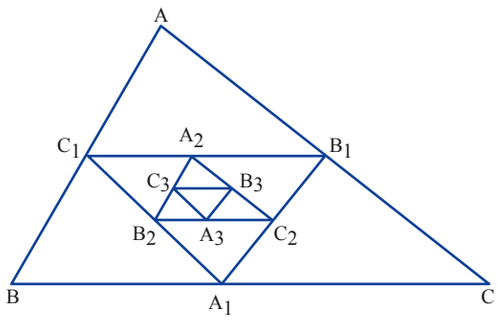
أوصلوا في $\Delta A_1B_1C_1$ بين منتصفات الأضلاع، ونتج مثلّث $\Delta A_2B_2C_2$.

وأوصلوا في $\Delta A_2B_2C_2$ بين منتصفات الأضلاع، ونتج مثلّث $\Delta A_3B_3C_3$.

أ. كم مثلّثًا من النوع $A_3B_3C_3$ يغطي $\Delta A_2B_2C_2$؟

ب. كم مثلّثًا من النوع $A_3B_3C_3$ يغطي $\Delta A_1B_1C_1$؟

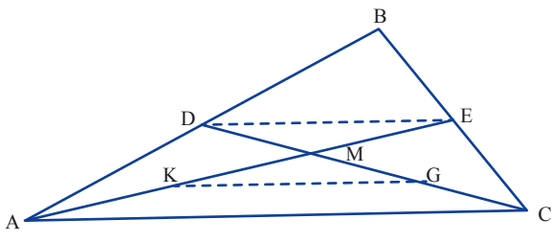
ت. كم مثلّثًا من النوع $A_3B_3C_3$ يغطي ΔABC؟



7. معطى AE وَ CD هما متوسّطان في ΔABC.

يلتقي المتوسّطان في النقطة M.

KG قطعة متوسّطة في ΔMAC.

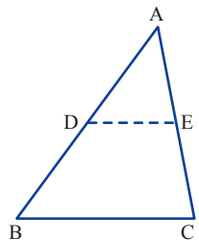


أ. **برهنوا:** DEGK متوازي أضلاع.

ب. **برهنوا:** تُقسّم نقطة التقاء المتوسّطين في المثلّث كلّ متوسّط بنسبة 2:1.

(AM = 2ME وَ CM = 2MD)

8. نبرهن أنّ القطعة المتوسّطة توازي الضلع الثالث (بطريقة تختلف عما رأيناها في الدرس).



معطى AD = DB

AE = EC

المطلوب برهانه BC || DE

أ. ΔAED وَ ΔBED متساويان في المساحة. علّلوا.

ب. ΔAED وَ ΔCED متساويان في المساحة. علّلوا.

ت. ΔCED وَ ΔBED متساويان في المساحة. علّلوا.

ث. **برهنوا:** DE يوازي الضلع BC (بواسطة بند ت)

ج. ΔABC~ΔADE. علّلوا.

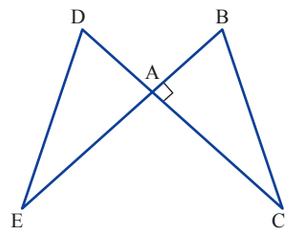
ح. ED = 0.5 BC. علّلوا.

9. معطى CD ⊥ BE , ΔABC ≅ ΔADE.

AB = 3 سم, AE = 4 سم

إذا أوصلنا منتصفات الأضلاع التالية

AB, AD, DE, AE, AC, BC وَ AB الواحدة تلو الأخرى فنحصل على شكل سداسيّ.

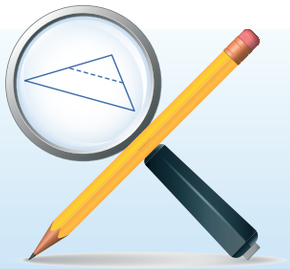


أ. احسبوا محيط الشكل السداسيّ.

ب. احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ BCED.

ت. احسبوا مساحة الشكل السداسيّ.

الدرس الثاني: شروط كافية لتمييز قطع متوسّطة في المثلث



معطى قطعة تتقاطع مع ضلعين في المثلّث.

- توازي القطعة الضلع الثالث.

هل يمكن الاستنتاج أنّها قطعة متوسّطة؟

- طول القطعة تساوي نصف طول الضلع الثالث.

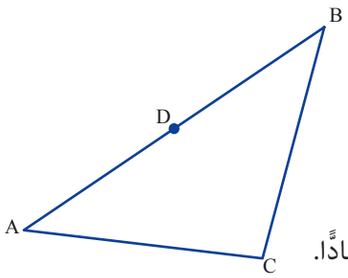
هل يمكن الاستنتاج أنّها قطعة متوسّطة؟

- أيّ صفات للقطعة تكفي كي نبرهن أنّها قطعة متوسّطة؟

نتعرّف على شروط كافية للقطع المتوسّطة.

1. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة " شروط كافية للقطع المتوسّطة" (هنالك 3 فعّاليّات متتالية) "תנאים מספיקים לקטע אמצעים". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

قطعة تخرج من منتصف ضلع واحد وتوازي الضلع الآخر



2. معطى ΔABC

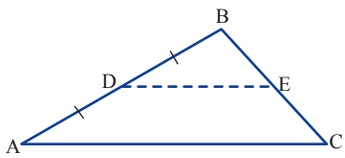
النقطة D هي منتصف الضلع AB.

ارسموا عبر النقطة D قطعة موازية للضلع AC، وارمزوا إلى نقطة التقاطع مع الضلع BC بالحرف E.

هل يتقاطع DE مع BC في منتصف الضلع؟

إذا كانت الإجابة نعم، فصوغوا نظريّة. وإذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

نظريّة إذا تقاطعت قطعة مع ضلعين في المثلّث، وتنصّف ضلعًا واحدًا من الضلعين، وتوازي الضلع الثلث، فإنّها **قطعة متوسّطة** في المثلّث.



3. أ. سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه في النظريّة المسجّلة في الإطار.

ب. جدوا مثلّثات متشابهة، واكتبوا نسبة التشابه.

ت. استعينوا بالبنود السابقة، وأكملوا برهان النظريّة.

قطعة تخرج من منتصف ضلع واحد وطولها يساوي نِصف طول الضلع الآخر

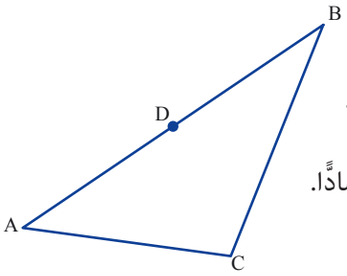
4. معطى ΔABC

النقطة D هي منتصف الضلع AB.

ارسموا من النقطة D، بواسطة فرجار، قطعة طولها كطول نِصف الضلع AC.

هل تتقاطع القطعة مع BC في منتصف الضلع؟

إذا كانت الإجابة نعم، فصوغوا نظريّة. وإذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.



5. **ادّعاء:** إذا خرجت قطعة من منتصف ضلع مثلّث، وطولها يساوي نِصف طول الضلع الآخر، فإنّها تنصّف الضلع الثالث (هذا يعني أنّها قطعة متوسّطة في المثلّث).

أ. سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه في الادّعاء.

ب. هل الادّعاء صحيح؟ اشرحوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

قطعة تتقاطع مع ضلعين في المثلّث، وطولها يساوي نِصف طول الضلع الثالث وموازية له

6. معطى ΔABC

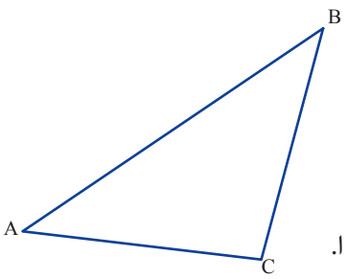
قصّوا قطعة طولها كطول نِصف الضلع AC.

حركوا القطعة الّتي قصصتموها بالموازاة للضلع AC، حتّى تتقاطع أطرافها مع الضلعين AB وَ BC.

أشيروا إلى نقطتيْ تقاطع القطعة مع أضلاع المثلّث في النقطتين E وَ M.

هل القطعة EM قطعة متوسّطة؟

إذا كانت الإجابة نعم فصوغوا نظريّة. إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.



نظريّة (النظريّة العكسيّة لصفات القطعة المتوسّطة في المثلّث).

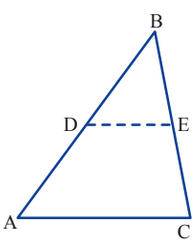
إذا تقاطعت قطعة مع ضلعين من أضلاع المثلّث، توازي الضلع الثالث وتساوي نِصف طول الضلع الثالث، فإنّها **قطعة متوسّطة في المثلّث**.

7. أ. اكتبوا المعطى والمطلوب برهانه للنظريّة المسجّلة في الإطار.

ب. **برهنوا:** $\Delta BAC \sim \Delta BDE$

ت. ما هي نسبة التشابه؟

ث. اشرحوا لماذا DE قطعة متوسّطة؟



تعريف: نسمّي القطعة الّتي توصل بين منتصفيْ الأضلاع في المثلّث **"قطعة متوسّطة في المثلّث"**

صفات القطعة المتوسّطة في المثلّث

إذا كانت قطعة هي قطعة متوسّطة في مثلّث، **فإنّها توازي الضلع الثالث وتساوي نِصف طول الضلع الثالث.**

متعاكسان

شروط كافية لتمييز قطع متوسّطة في المثلّث

إذا كانت قطعة تتقاطع مع ضلعيْ مثلّث، توازي الضلع الثالث وتساوي نِصف طول الضلع الثالث، فإنّها **قطعة متوسّطة في المثلّث.**

إذا نصّفت قطعة أحد أضلاع المثلّث، وتوازي الضلع الآخر، فإنّها **قطعة متوسّطة في المثلّث.**

8. في المثلّث ABC عُيّنت النقطة K على الضلع AB والنقطة L على الضلع AC.
حدّدوا، في كلّ بند، بناء على المعطيات هل القطعة KL هي قطعة متوسّطة في المثلّث؟

أ. $AK = KB$

ب. KLCB هو شبه منحرف

ت. $KL = \frac{1}{2}BC$

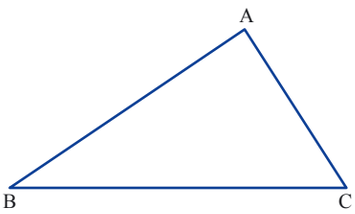
ث. $AL = LC$ $\quad AK = KB$

ج. $KL \parallel BC$ $\quad AK = KB$

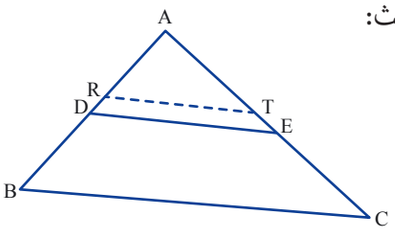
ح. $KL = \frac{1}{2}BC$ $\quad AL = LC$

خ. $KL = \frac{1}{2}BC$ $\quad KL \parallel BC$

د. $\Delta ABC \sim \Delta AKL$



9. نبرهن **بطريقة النفي النظريّة العكسيّة** لصفات القطعة المتوسّطة في المثلّث:
إذا تقاطعت قطعة مع ضلعين من أضلاع المثلّث، توازي الضلع الثالث وتساوي نِصف طول الضلع الثالث، فإنّها **قطعة متوسّطة في المثلّث.**



معطى تتقاطع القطعة DE مع الضلعين AB وَ AC.
DE يوازي الضلع BC.
طول DE يساوي نِصف طول BC.

برهان:
نفترض أنّ القطعة DE **ليست** قطعة متوسّطة.
إذا كانت DE ليست قطعة متوسّطة، فإنّه توجد قطعة RT تختلف عن DE، وهي قطعة متوسّطة في المثلّث، والشكل الرباعيّ RTED هو متوازي أضلاع. علّلوا.
اشرحوا لماذا لا يمكن أن يكون الشكل الرباعيّ RTED متوازي أضلاع؟
نستنتج من ذلك أنّ **الافتراض** غير صحيح وَ DE هو قطعة متوسّطة في المثلّث ABC.

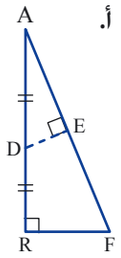
مجموعة مهامّ

ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهامّ بديلة لقسم من المهامّ في مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

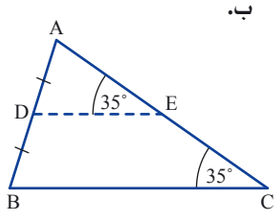
أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. حدّدوا، في كلّ بند، هل القطعة DE هي قطعة متوسّطة في المثلّث ABC؟ اشرحوا.

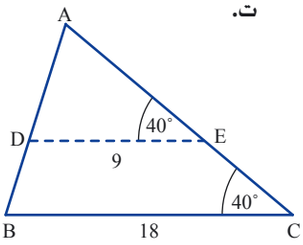
أ.



ب.



ت.



2. ارسموا المثلّث ABC. عيّنوا النقطة K على الضلع AB والنقطة L على الضلع AC.
ارسموا، في كلّ بند، وحدّدوا هل القطعة KL هي قطعة متوسّطة في المثلّث؟

أ. CK متوسّط للضلع AB وَ BL متوسّط للضلع AC.

ب. $\Delta ABC \sim \Delta AKL$

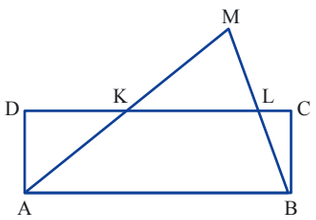
ت. $AL = \frac{1}{2}AC \quad KL = \frac{1}{2}BC$

3. معطى ABCD مستطيل.

$AK = KM$

أ. هل القطعة KL هي قطعة متوسّطة في المثلّث ABM؟ اشرحوا.

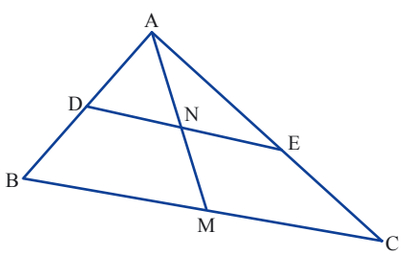
ب. **برهنوا:** $KL = DK + LC$



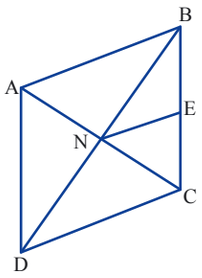
4. معطى DE قطعة متوسّطة في ΔABC.

AM متوسّط للضلع BC في ΔABC.

المطلوب برهانه AN متوسّط للضلع DE في ΔADE.



5. معطى الشكل الرباعيّ ABCD هو معين.
الشكل الرباعيّ ABEN هو شبه منحرف متساوي الساقين.
محيط المعين ABCD هو 32 سم.



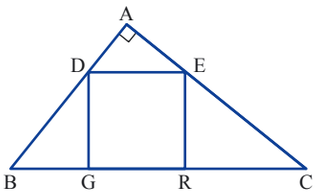
أ. **برهنوا:** EC = BE

ب. احسبوا مقدار زوايا المعين.

ت. احسبوا محيط شبه المنحرف ABEN.

6. نسمّي المستقيم الّذي يتقاطع مع قطعة ويعامدها "عمودًا منصّفًا".
هل يمكن أن يكون عمود متوسّط لأحد أضلاع المثلّث قطعة متوسّطة في المثلّث؟
ارسموا رسمة مناسبة أو اشرحوا.

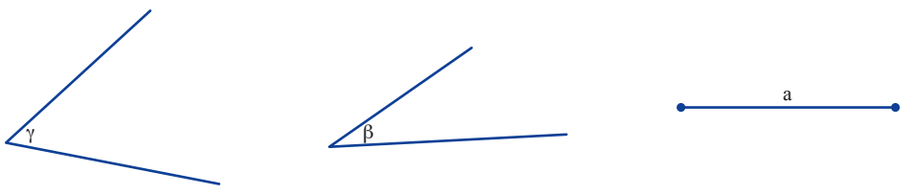
7. في المثلّث القائم الزاوية ABC (∢A = 90°) حُصر المربّع DERG.



أ. جدوا، في الرسمة، جميع المثلّثات المتشابه.

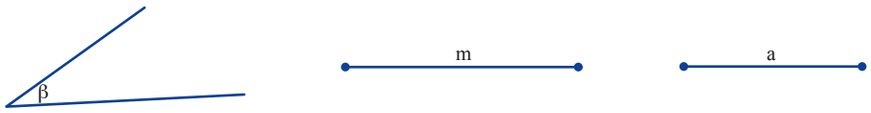
ب. هل يمكن أن تكون القطعة DE قطعة متوسّطة في المثلّث ΔABC؟ علّلوا.

***8.** ابنوا المثلّث ABC بحيث يكون طول القطعة المتوسّطة الموازية للضلع BC كطول القطعة a، ومقدار الزاويتين اللتين تنتجهما هذه القطعة مع الضلعين AB وَ AC كمقدار الزاويتين β وَ γ.
ارسموا، في البداية، رسمة توضيحيّة.



اسم المهمّة البديلة في الموقع: "قطعة متوسطة وزاويتان" *: "קטע אמצעים ושתי זוויות"*

***9.** ابنوا المثلّث ABC بحيث يكون طول القطعة المتوسّطة الموازية للضلع BC كطول القطعة a، طول المتوسّط للضلع BC كطول القطعة m ومقدار الزاوية بين المتوسّط للضلع BC كمقدار الزاوية β.
ارسموا، في البداية، رسمة توضيحيّة.

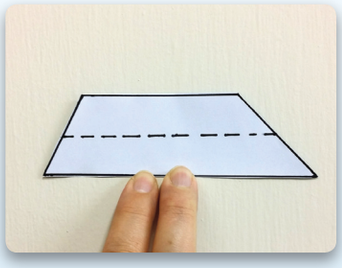


اسم المهمّة البديلة في الموقع: "قطعة متوسّطة، متوسّط وزاوية"*: "קטע אמצעים, תיכון וזווית"*

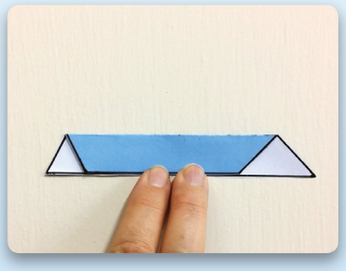
الدرس الثالث: قطعة متوسّطة في شبه المنحرف

تعريف: نسمّي القطعة الّتي توصل بين منتصفيْ ساقيْ شبه المنحرف "**قطعة متوسّطة في شبه المنحرف**".

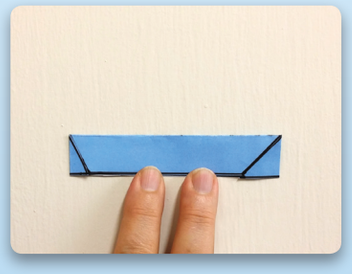
قصوا شبه منحرف. ارسموا قطعة متوسطة في شبه المنحرف.



اطووا شبه المنحرف على طول قطعته المتوسّطة.
على ماذا حصلتم؟



اطووا رؤوس شبه المنحرف إلى الداخل كما يظهر في الصورة:
ما هو الشكل الّذي حصلتم عليه؟

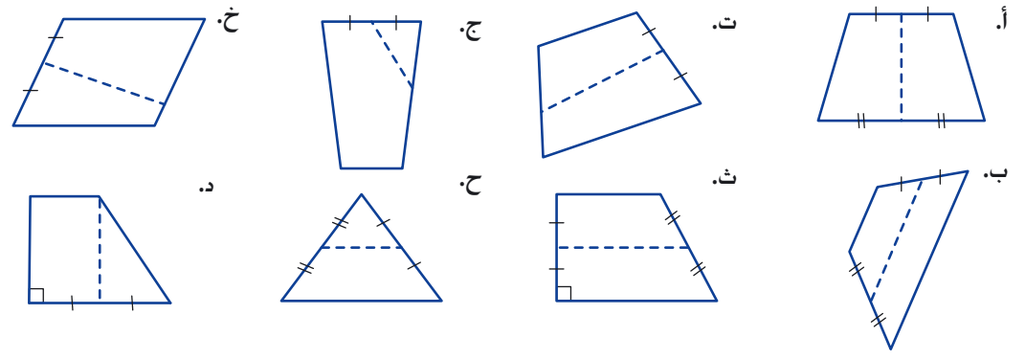


ما هي صفات القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف؟

نتعرّف على صفات القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف.

صفات القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف

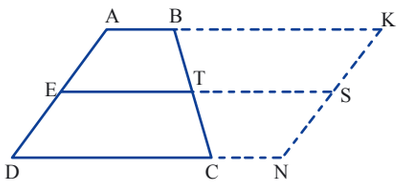
1. في أيّ رسومات القطعة المتقطعة هي قطعة متوسّطة في **شبه المنحرف**؟
اشرحوا لماذا القطعة، في الرسومات الأخرى، ليست قطعة متوسّطة في شبه المنحرف؟



2. جدوا في الصورة أشباه منحرف، وجدوا فيها قِطع متوسّطة.

نفكّر بـ ...

3. ضعوا شبهيْ منحرف متطابقين مع قطعتيهما المتوسّطة الواحد بجانب الآخر، كما يظهر في الرسمة.



أ. **برهنوا:** الشكل الرباعيّ AKND هو متوازي أضلاع.

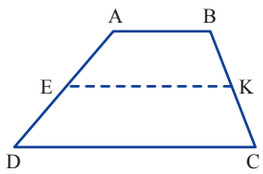
ب. **برهنوا:** الشكلان الرباعيّان AKSP وَ PSND هما متوازيا أضلاع.

ت. **استنتاج:** ET يوازي قاعدتيْ شبه المنحرف. علّلوا.

ث. **برهنوا:** $PT = \frac{AB + DC}{2}$

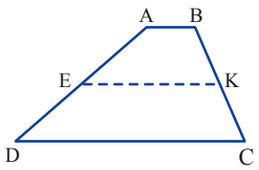
معطى **القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف** توازي القاعدتين، وطولها يساوي نِصف مجموع طوليِّ القاعدتين.

$EK \parallel DC \parallel AB$ $\qquad EK = \frac{AB + CD}{2}$

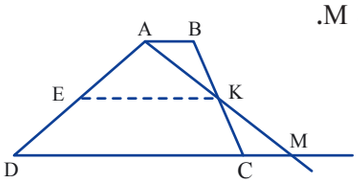


4. نبرهن نظريّة **القطعة المتوسطة في شبه المنحرف** بطريقة إضافيّة.

أ. سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه.



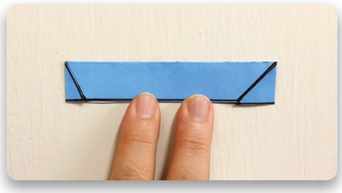
ب. **بناء مساعد:** نوصل AK، ونمدّه حتّى يتقاطع مع امتداد CD في النقطة M.



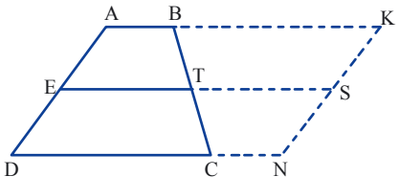
- **برهنوا:** $\Delta ABK \cong \Delta MCK$
- القطعة EK هي قطعة متوسّطة في ΔDAM. علّلوا.
- **برهنوا:** EK توازي قاعدتيْ شبه المنحرف، وطولها يساوي نِصف مجموع طوليِّ القاعدتين.

5. وجدنا، خلال الدرس، صفات القطع المتوسّطة في شبه المنحرف بثلاث طرق.

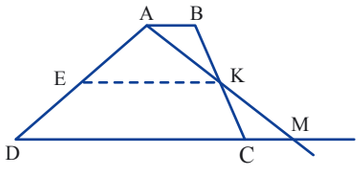
تحويل شبه منحرف إلى مستطيل
(مهمّة الافتتاحيّة)



تحويل شبه منحرف إلى متوازي أضلاع
(مهمّة 3)



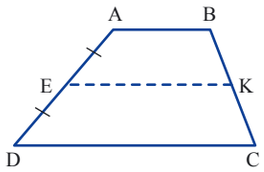
تحويل شبه منحرف إلى مثلّث
(مهمّة 4)



بيّنوا كيف يمكن أن نستنتج، بواسطة كلّ طريقة من هذه الطرق، أنّ مساحة شبه المنحرف تساوي نِصف حاصل ضرب مجموع طولي القاعدتين في طول ارتفاع شبه المنحرف؟

شروط كافية لتمييز القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف

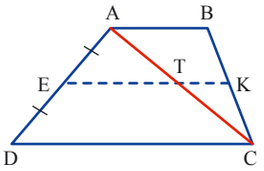
6. في شبه المنحرف ABCD تنصّف القطعة EK الساق AD وتوازي القاعدتين.
هل EK قطعة متوسّطة في شبه المنحرف؟



أ. اكتبوا المعطى والمطلوب برهانه.

ب. استعينوا بالقُطر AC، وجدوا قِطع متوسّطة في المثلّثات الّتي نتجت.

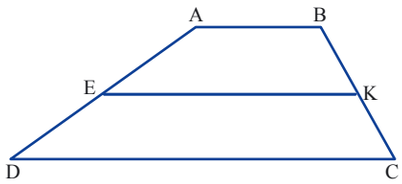
ت. استعينوا بالبنود السابقة، وبرهنوا أنّ EK قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.



برهنا:

نظريّة إذا نصّفت قطعة أحد ساقيْ شبه المنحرف، وتوازي القاعدتين، فإنّها قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.

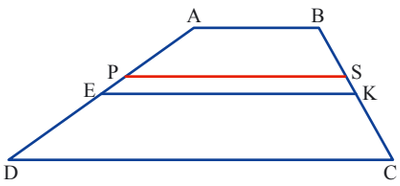
7. أمامكم **نظريّة عكسيّة** لنظرية صفات القطعة المتوسطة في شبه المنحرف.
إذا تقاطعت قطعة مع ساقي شبه المنحرف، توازي القاعدتين وطولها يساوي نِصف مجموع طولي القاعدتين، فإنها قطعة متوسطة في شبه المنحرف.



معطى $EK \parallel DC \parallel AB$

$$EK = \frac{AB + CD}{2}$$

برهنوا:
نبرهن النظرية **بطريقة النفي.**
نفترض أن EK ليست قطعة متوسطة.
هذا يعني أن هنالك قطعة PS تختلف عن EK، وهي قطعة متوسطة في شبه المنحرف، وعندئذٍ الشكل الرباعي $PSKE$ هو متوازي أضلاع.
عللوا.
اشرحوا لماذا لا يمكن أن يكون الشكل الرباعي $PSKE$ متوازي أضلاع.
نستنتج من هنا أن **الافتراض** غير صحيح، لذا EK هي قطعة متوسطة في شبه المنحرف $ABCD$.
سجلوا الاستنتاج بكتابة رياضيّة.



تعريف: نسمّي القطعة الّتي توصل بين منتصفيْ الأضلاع في شبه المنحرف **"قطعة متوسّطة في المثلّث"**

صفات القطعة المتوسّطة في المثلث

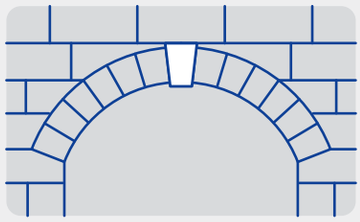
إذا كانت قطعة هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف، **فإنها توازي القاعدتين وطولها يساوي نِصف مجموع طوليّ القاعدتين.**

متعاكستان

شروط كافية لتمييز قطع متوسّطة في المثلّث

إذا كانت قطعة تتقاطع مع ساقي شبه المنحرف، توازي القاعدتين وطولها يساوي نِصف مجموع طولي القاعدتين، فإنّها **قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.**

إذا نصّفت قطعة ساقًا واحدًا في شبه المنحرف، وتوازي القاعدتين، فإنّها **قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.**



لبناء جسر، سقف أو مدخل لقاعة نبني أحيانًا قوسًا من حجر. تطورت تكنولوجيا بناء الأقواس في الهند قبل حوالي 5,000 سنة، لكن حسّنها الرومانيون وطوّروا استعمالها. القوس الأساسيّ مكوّن من عدد زوجيّ من اللبنات أو الحجارة الّتي شكلها شبه منحرف، حيث ترتكز كلّ واحدة منها على جارتيها. نسمّي الحجر العلويّ "حجر الرأس" وهو يُغلق القوس ويحافظ على ثباته. عندما تكون جميع اللبنات في مكانها، يبقى القوس ثابتًا، والحجارة لا تسقط. تؤثّر قوى الضغط على طول القوس بين جدران اللبنات، ولا ينتج جهد انحناء يؤدّي إلى انهيار المبنى.

أمامكم صورة القسم الأماميّ **للكنيس القديم في بارعم** - أحد الكنائس الكثيرة التي بُنيت في البلدات اليهوديّة الّتي كانت في الجليل بعد دمار بيت المقدس. وُجدت بقايا كنائس في بيت ألفا، كورزيم، كتسرين، تسيبوري وغير ذلك.

مجموعة مهامّ

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. معطى EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABCD.

AB = 12 سم

DC = 28 سم

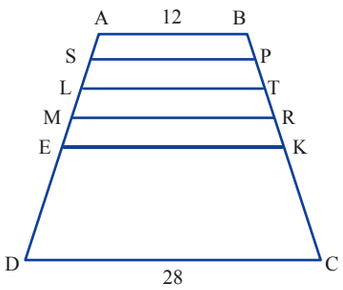
AS = SL = LM = ME

BP = PT = TR = RK

أ. احسبوا طول القطعة EK حسب معطيات الرسمة.

ب. احسبوا طول القطع SP, LT وَ MR.

اشرحوا الطريقة الحسابيّة.

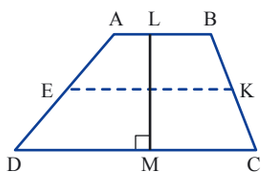


2. معطى EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABCD

EK = 15 سم

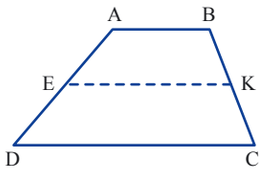
ML = 10 سم

ما هي مساحة شبه المنحرف؟ اشرحوا الطريقة الحسابيّة.



للتذكير: مساحة شبه المنحرف تساوي نِصف حاصل ضرب مجموع طوليِّ القاعدتين في طول الارتفاع.

3. معطى EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABCD



ارسموا الساقين ومدوهما حتّى نقطة تقاطعهما، وارمزوا إلى نقطة التقاطع بالحرف M.

أ. هل يمكن أن تكون القطعة EK هي قطعة متوسّطة في المثلّث MDC؟
اشرحوا أو أعطوا مثالًا.

ب. هل يمكن أن تكون القطعة AB هي قطعة متوسّطة في المثلّث MDC؟
اشرحوا أو أعطوا مثالًا.

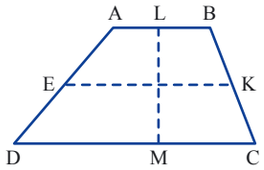
ت. هل يمكن أن تكون القطعة AB هي قطعة متوسّطة في المثلّث MEK؟ اشرحوا أو أعطوا مثالًا.

4. أوصلوا بين منتصفي الضلعين المتقابلين لمتوازي الأضلاع.

أ. هل توازي القطعة أضلاع متوازي الأضلاع. **برهنوا.**

ب. هل طول القطعة يساوي نِصف مجموع طولَيْ هذين الضلعين؟ **برهنوا.**

5. معطى ABCD شبه منحرف.



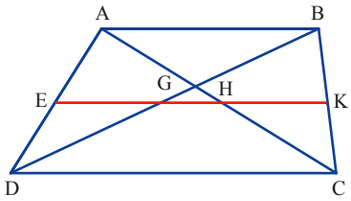
LM يتقاطع مع القاعدتين.

EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.

أ. إلى أيّ أشكال مقسّم شبه المنحرف؟ اشرحوا.

ب. هل ينصّف القطعة EK القطعة LM؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

6. معطى EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABCD.



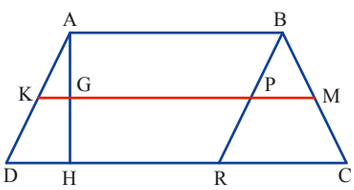
G وَ H هما نقطتا تقاطع القطعة EK وقُطريْ شبه المنحرف.

AB = 4 سم

DC = 6 سم

احسبوا طول القطع: EG, GK, HK, GH

7. معطى KM هي قطعة متوسّطة في شبه منحرف متساوي الساقين ABCD.



AH ⊥ DC

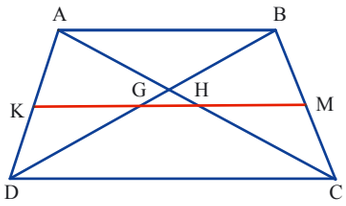
AD || BR

AB = 10 سم

DC = 16 سم

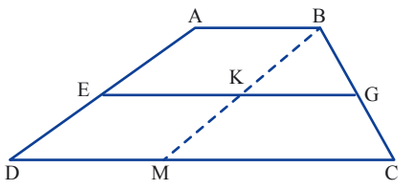
أ. **برهنوا:** GP هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABRH.

ب. احسبوا طول القطع: KG, PM, GP.



8. معطى شبه منحرف متساوي الساقين $ABCD$.
KM هي قطعة متوسّطة.
G وَ H هما نقطتا تقاطع KM وقُطريْ شبه المنحرف.

برهنوا: $GH = \frac{DC - AB}{2}$

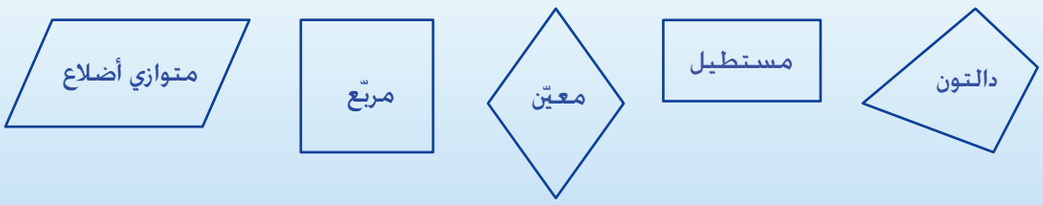


9. نظريّة إذا تتقاطع قطعة مع ساقيْ شبه المنحرف، توازي القاعدتين وطولها يساوي نِصف طولي القاعدتين، فإنّ القطعة هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف.
(نظريّة عكسيّة لنظريّة القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف).
برهنوا بطريقة إضافيّة.
اعتمدوا على **البناء المساعد**: نرسم عبر النقطة B قطعة موازية لـ AD.

10. أ. هل تقسّم القطعة المتوسّطة شبه المنحرف إلى شبهيْ منحرفٍ متشابهين؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة فبيّنوا مثالاً مضادًّا أو اشرحوا.
ب. M هي نقطة التقاء القطرين في شبه المنحرف.
هل يمكن أن تقع النقطة M على القطعة المتوسّطة في شبه المنحرف؟ اشرحوا.

الدرس الرابع: نوصل بين منتصف ومنتصف

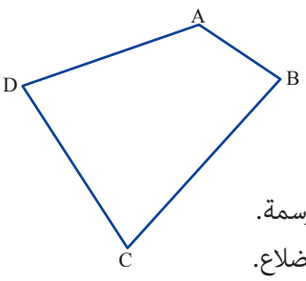
نوصل حسب الترتيب بين منتصفات أضلاع الأشكال الرباعيّة التالية:



أيّ شكل رباعيّ ينتج في كلّ حالة؟

نبحث الشكل الرباعيّ الناتج إذا أوصلنا بين منتصفات أضلاع شكل رباعيّ آخر.

1. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة " نوصل منتصف إلى منتصف" "אמצע לאמצע נחבר" نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.



2. أ. ارسموا شكلًا رباعيًّا. أشيروا إلى منتصف كلّ ضلع.
أوصلوا بين منتصفات الأضلاع حسب الترتيب.
أيّ شكل رباعيّ نَتَج؟ كرّروا الفعّاليّة مع شكل رباعيّ آخر. ماذا نَتَج؟

ب. ارسموا أحد أقطار الشكل الرباعيّ الأصليّ. تمعنوا في المثلّثات الّتي نَتَجت في الرسمة.

برهنوا: الشكل الرباعيّ الناتج من التوصيل بين منتصفات أضلاع هو متوازي أضلاع.

استنتاج: القطع الّتي توصل بين منتصفات الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعيّ تنصّف بعضها.
ارسموا وعلّلوا.

نظريّة إذا أوصلنا بين منتصفات أضلاع شكل رباعيّ، الواحد تلو الآخر، فينتج متوازي أضلاع.

3. أ. ارسموا شكلًا رباعيًّا **أقطاره متعامدة**. صلوا بين منتصفات الأضلاع حسب الترتيب.
ما هو الشكل الرباعيّ الّذي حصلتم عليه؟ برهنوا.

ب. ارسموا شكلًا رباعيًّا أقطاره **متساوية في الطول**. صلوا بين منتصفات الأضلاع حسب الترتيب.
ما هو الشكل الرباعيّ الّذي حصلتم عليه؟ برهنوا.

ت. ما هي الشروط الّتي يجب أن تحقّقها أقطار الشكل الرباعيّ كي نحصل على مربّع إذا أوصلنا بين منتصفات الأضلاع؟ علّلوا.

4. حدّدوا، في كلّ بند، نوع الشكل الرباعيّ الناتج إذا أوصلنا بين منتصفات الأضلاع، الواحد تلو الآخر. علّلوا.

أ. شكل رباعيّ ت. متوازي أضلاع ج. مستطيل خ. شبه منحرف

ب. دالتون ث. معين ح. مربّع د. شبه منحرف متساوي الساقين

5. أ. نوصل بين منتصفات أضلاع شكل رباعيّ حسب الترتيب، ونحصل على **مستطيل**.
حدّدوا هل الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا.
- الشكل الرباعيّ الأصليّ **يجب** أن يكون معينًا.
- الشكل الرباعيّ الأصلي **يمكن** أن يكون دالتون.
- **يجب** أن تكون أقطار الشكل الرباعيّ الأصليّ متعامدة.

ب. نوصل بين منتصفات أضلاع شكل رباعيّ حسب الترتيب، ونحصل على **معين**.
حدّدوا هل الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا.
- الشكل الرباعيّ الأصليّ **يجب** أن يكون مستطيلًا.
- الشكل الرباعيّ الأصلي **يمكن** أن يكون مستطيلا.
- **يجب** أن تكون أقطار الشكل الرباعيّ الأصليّ متساوية في الطول.

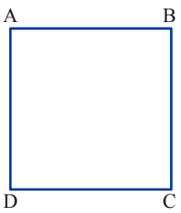
ت. نوصل بين منتصفات أضلاع شكل رباعيّ حسب الترتيب، ونحصل على مربّع.
حدّدوا هل الادّعاءات التالية صحيحة؟ علّلوا.
- الشكل الرباعيّ الأصليّ **يجب** أن يكون مربّعًا.
- الشكل الرباعيّ الأصلي **يمكن** أن يكون مربّعًا.
- **يجب** أن تكون أقطار الشكل الرباعيّ الأصليّ متعامدة ومتساوية في الطول.

مجموعة مهامّ

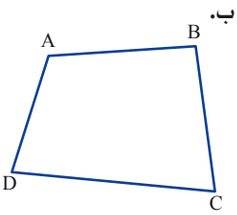
ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهامّ بديلة لقسم من المهامّ في مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. انسخوا، في كلّ بند، وصلوا بين منتصفات أضلاع الشكل الرباعيّ ABCD حسب الترتيب.
حدّدوا الشكل الرباعيّ الناتج. وعلّلوا.

أ.


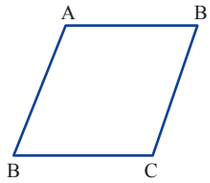
ABCD **مربّع**

ب.


AC = BD

ت.

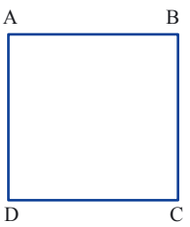
ABCD **مستطيل**

ث.


ABCD **معين**

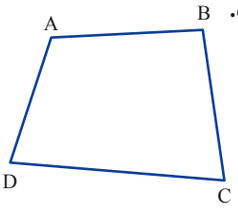
2. احسبوا، في كلّ بند، طول أضلاع الشكل الرباعيّ الّذي رؤوسه منتصفات أضلاع الشكل الرباعيّ المعطى، أو اشرحوا لماذا لا يمكن أن نحسب ذلك؟

أ.



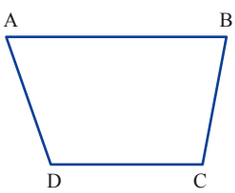
ABCD **مربّع**
BD = 10

ب.



AC = BD = 8

ت.



ABCD **شبه منحرف**
AC = 6

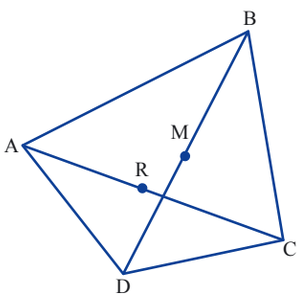
ث.

ABCD **مستطيل**
AC = 12

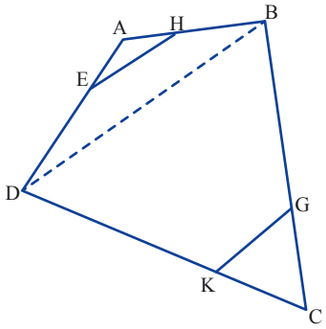
3. ارسموا شبه منحرف متساوي الساقين، وصلوا بين منتصفات الأضلاع حسب الترتيب.
أيّ شكل رباعيّ تُنتج منتصفات الأضلاع؟ **برهنوا**.

4. **برهنوا:** في شبه المنحرف متساوي الساقين، تنصف القطعة المتوسطة والقطعة الّتي توصل بين منتصفيّ القاعدتين بعضهما، وهما متعامدتان.

5. معطى معطى الشكل الرباعيّ ABCD.
M منتصف القطر BD
R منتصف القطر AC
ارسموا وعيّنوا نقطة التقاطع الّتي توصل بين منتصفيْ الضلعين AB وَ CD في النقطة P.
برهنوا: PR = PM



6*. معطى الشكل الرباعيّ ABCD.



تُقسّم النقطة E الضلع AD بنسبة 1:2.

EH || DB

تُقسّم النقطة K الضلع CD بنسبة 1:2.

KG || DB

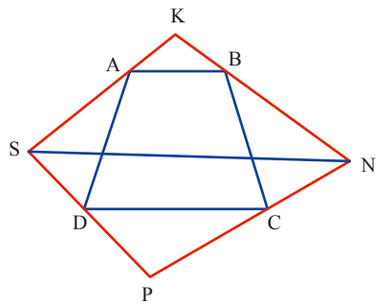
أ. ما هو نوع الشكل الرباعيّ EKGH؟ **برهنوا.**

ب. إذا كان معلومًا أنّ أقطار الشكل الرباعيّ ABCD متعامدة، فما هو نوع الشكل الرباعيّ EKGH؟ علّلوا.

ت. إذا كان معلومًا أن أقطار الشكل الرباعيّ ABCD متساوية في الطول، فما هو نوع الشكل الرباعيّ EKGH؟ علّلوا.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "النسبة *1* إلى *2* *"היחס 1 ל- 2"*

7. معطى شبه المنحرف ABCD محصور داخل الشكل الرباعيّ KNPS.



SN || AB || DC

SN = 10 سم

AB = 4 سم

DC = 7.5 سم

NB = 6 سم

PC = 9 سم

إذا كان الأمر ممكنًا، فاحسبوا طول القطع: KB, CN, AS

إذا لم تتمكّنوا من تنفيذ الحسابات فاشرحوا.

8*. معطى متوازي أضلاع ABCD.

ابنوا شكلًا رباعيًّا بحيث تكون رؤوس متوازي الأضلاع هذا منتصفات أضلاعه.

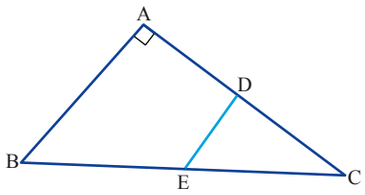
صفوا البناء.

برهنوا: جميع رؤوس متوازي الأضلاع هي منتصفات أضلاع الشكل الرباعيّ الّذي بنيتموه.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "من متوازي أضلاع إلى شكل رباعيّ لمنتصفات أضلاع *"ממקבילית למרובע של אמצעי צלעות"*

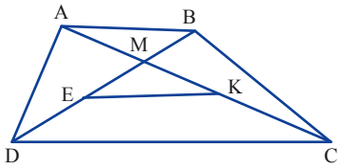
مهامّ إضافيّة

1. معطى DE هي قطعة متوسّطة في المثلّث ABC.
$\sphericalangle A=90°$
مدّوا DE وانتجوا قطعة EK تساوي طول القطعة DE.
صلوا K مع B وَC.



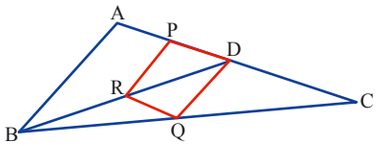
برهنوا:
أ. الشكل الرباعيّ KCDB هو متوازي أضلاع.
ب. الشكل الرباعيّ ADKB هو مستطيل.

2. معطى ABCD هو شبه منحرف.
AB ll DC
النقطتان E وَ K هما منتصفا القطعتين MD وَ MC.
$DC = 2 \cdot AB$



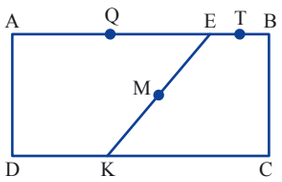
أ. **برهنوا:** تقسّم النقطتان M وَ E القطر BD إلى ثلاثة أقسام متساوية في الطول.
ب. معطى $EK = a$
عبّروا بواسطة a عن طول القطعة المتوسّطة لشبه المنحرف.

3. معطى BD هو متوسّط في ΔABC.
R منتصف المتوسّط.
P منتصف AD.
Q منتصف BC.

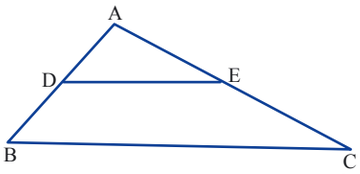


أ. **برهنوا:** الشكل الرباعيّ PDQR هو متوازي أضلاع.
ب. ما هو نوع الشكل الرباعيّ PDQR إذا كانت الزاوية A هي زاوية قائمة؟ علّلوا.
ت. أيّ شرط يجب أن يحقّق ΔABC كي يكون الشكل الرباعيّ PDQR معين؟ علّلوا.

4. معطى ABCD هو مستطيل.
EK يمرّ عبر النقطة M - نقطة التقاء أقطار المستطيل.
Q منتصف AE
T منتصف EB
ابنوا المثلّث QMT.
جدوا كم ضعفًا مساحة المستطيل ABCD أكبر من مساحة ΔQMT؟



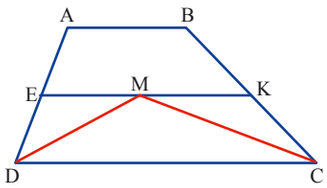
5. **معطى** DE هي قطعة متوسّطة في المثلّث ABC.
مساحة المثلّث ABC تساوي 24 سنتمترًا مربّعًا.
BC = 6 سم



أ. احسبوا مساحة المثلّث ADE.
ب. هل يمكن أن نتنازل عن أحد المعطيات؟ إذا كانت الإجابة نعم فأي معطى؟ اشرحوا.

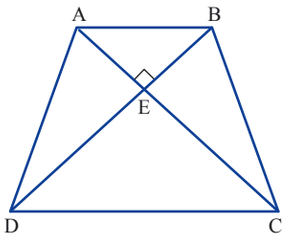
6. **معطى** ABCD متوازي أضلاع.
النقطتان M وَ L هما منتصفا الضلعين AD وَ BC بالتناظر.
برهنوا: تقسّم القطعتان BM وَ DL القطر AC إلى ثلاثة أقسام متساوية في الطول.

7. **معطى** EK هي قطعة متوسّطة في شبه المنحرف ABCD.
ينصّف CM وَ DM الزاويتين إلى جانب القاعدة الكبرى، ويلتقي CM وَ DM على القطعة المتوسطة.
EK = 10 سم



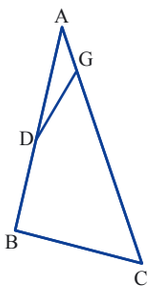
احسبوا محيط شبه المنحرف.

8. قطرا شبه منحرف متساوي الساقين متعامدان.
طول القطعة المتوسّطة يساوي 8 سم.



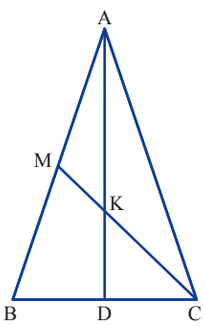
أ. احسبوا طول ارتفاع شبه المنحرف.
ب. احسبوا مساحة شبه المنحرف.

9. **معطى** النقطة D هي منتصف AB.
تقع النقطة G على الضلع AC بحيث أن ∢C = ∢DGC



برهنوا: $DG = \frac{1}{2} \cdot BC$

10. **معطى** ABC هو مثلث متساوي الساقين (AB = AC)
AD هو ارتفاع للقاعدة.
CM هو متوسّط للساق.
K هي نقطة تقاطع الارتفاع AD والمتوسّط CM.



برهنوا: $KD = \frac{1}{2} \cdot AD$
(**إرشاد:** ارسموا عمودًا من M إلى BC.)