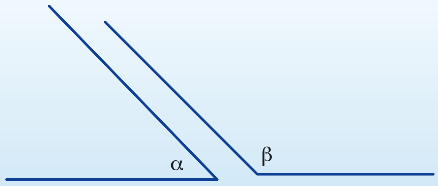
الوحدة الثانية والثلاثون: العلاقة بين المقادير والبرهان بطريقة النفي

الدرس الأوّل: الزوايا الخارجيّة للمثلّث

معطى الزاويتان α وَ β.



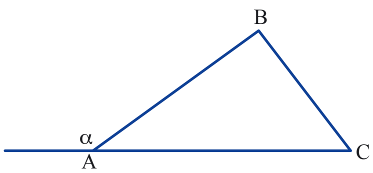
هل يمكن أن نبني مثلّثًا، بحيث تكون الزاويتين α وَ β من بين زواياه الخارجيّة؟

نبحث العلاقة بين الزوايا الداخليّة في المثلّث والزوايا الخارجيّة للمثلّث.

للتذكير

نسمّي الزاوية المجاورة لإحدى زوايا المثلّث **زاوية خارجيّة للمثلّث.**

مثال: الزاوية α، في الرسمة، هي زاوية خارجيّة للمثلّث ABC.

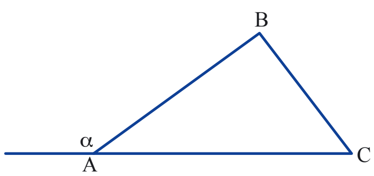


.1 ارسموا، في كلّ بند، مثلّثًا مناسبًا.

أ. الزاوية الخارجيّة أكبر من الزاوية الداخليّة المجاورة لها.

ب. الزاوية الخارجيّة تساوي الزاوية الداخليّة المجاورة لها.

ت. الزاوية الخارجية أصغر من الزاوية الداخليّة المجاورة لها.



.2 أ. نظريّة الزاوية الخارجيّة للمثلّث تساوي مجموع الزاويتين الداخليّتين غير المجاورتين لها.

سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه للنظريّة، ثمّ برهنوا.

ب. **استنتاج:** الزاوية الخارجيّة للمثلّث أكبر من كلّ زاوية داخليّة غير مجاورة لها. اشرحوا الاستنتاج.

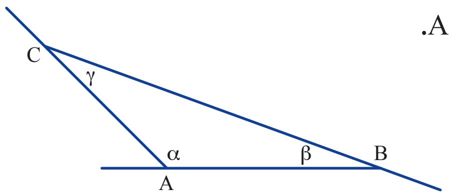
نظريّة الزاوية الخارجيّة للمثلّث تساوي مجموع الزاويتين الداخليّتين غير المجاورتين لها.

استنتاج من النظريّة: الزاوية الخارجيّة للمثلّث أكبر من كلّ زاوية داخليّة غير مجاورة لها.

.3 رُسمت زاوية خارجيّة واحدة إلى جانب كلّ رأس من رؤوس المثلّث ABC.

أ. عبّروا عن كلّ زاوية خارجيّة بواسطة الزاوية الداخليّة المجاورة لها.

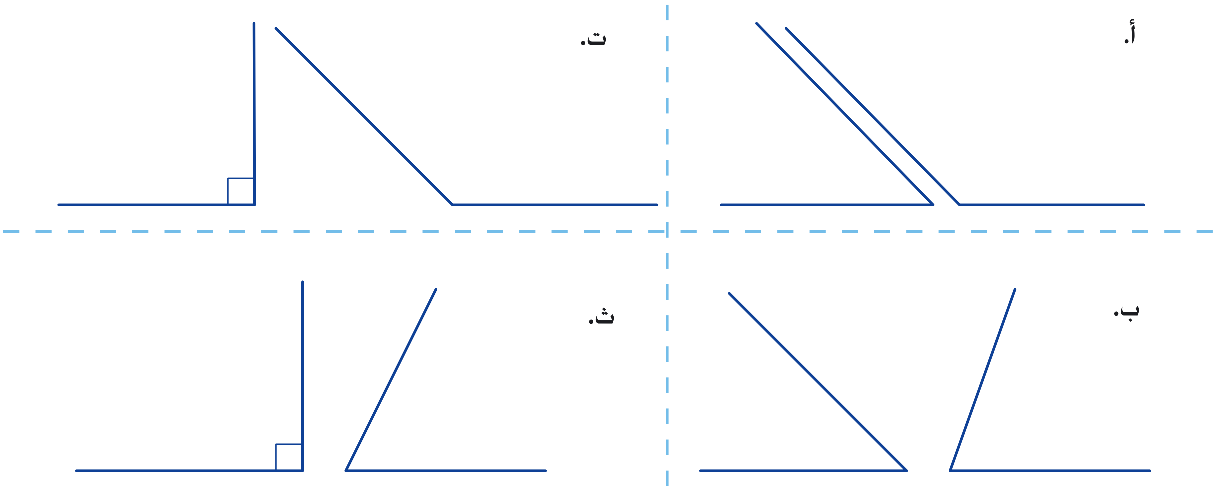
ب. جدوا مجموع كلّ ثلاث زوايا خارجيّة.

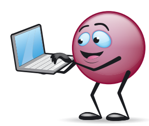


نفكّر بـ ...

.4 نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة ونوسّعها.

حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن أن تكون الزاويتين المرسومتين خارجيّتين للمثلّث نفسه؟ علّلوا.

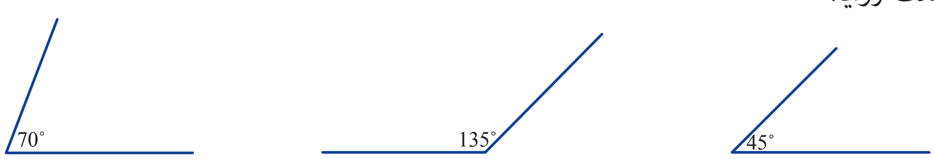




.5 ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة "مثلّث حسب زوايا خارجيّة" "משולש לפי זוויות חיצוניות". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة في الحاسوب

.6 معطى ثلاث زوايا.



أ. زاويتان فقط من بين هذه الزوايا يمكن أن تكون زوج زوايا خارجيّة للمثلّث نفسه. ما هما؟ اشرحوا.

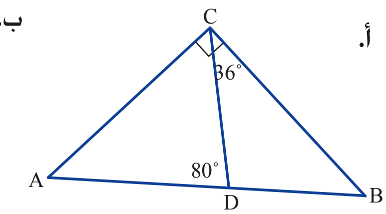
ب. ابنوا المثلّث ΔABC، بحيث تساوي الزاويتين الخارجيّتين الزاوية الخارجيّة التي اخترتموها في بند أ.

مجموعة مهامّ

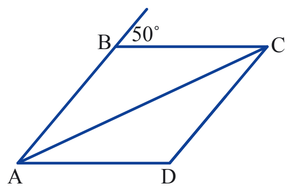
ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهامّ بديلة لقسم من المهامّ في مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

1. احسبوا، في كلّ بند، مقادير جميع الزوايا.

أ.

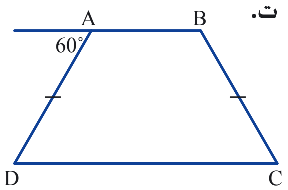


ب.



معيّن ABCD

ت.



شبه منحرف متساوي الساقين

2. نتطرّق في المهمّة إلى زاوية خارجيّة واحدة إلى جانب كلّ رأس في المثلّث.
احسبوا مقادير زوايا المثلّث إذا كان الأمر ممكنًا؟ إذا لم تتمكّنوا فاشرحوا.

أ. المثلّث قائم الزاوية، ومقدار إحدى زواياه الخارجيّة $125°$.

ب. المثلّث فيه زاوية واحدة مقدارها $42°$ وزاوية خارجيّة مقدارها $80°$.

ت. للمثلّث زاوية خارجيّة مقدارها $95°$ وزاوية خارجيّة أخرى مقدارها $112°$.

ث. المثلّث فيه زاوية واحدة مقداره $140°$ وزاوية خارجيّة أخرى مقدارها $40°$.

3. نتطرّق في المهمّة إلى زاوية خارجيّة واحدة إلى جانب كلّ رأس من رؤوس المثلّث.
أمامكم ادّعاءات، حدّدوا هل هي صحيحة؟ اشرحوا.

أ. إذا كانت للمثلّث زاوية خارجيّة منفرجة، فإنّ المثلّث حادّ الزوايا.

ب. إذا كانت للمثلّث زاويتان خارجيّتين منفرجتين، فإنّ المثلّث حادّ الزوايا.

ت. إذا كانت للمثلّث ثلاث زوايا خارجيّة منفرجة، فإنّ المثلّث حادّ الزوايا.

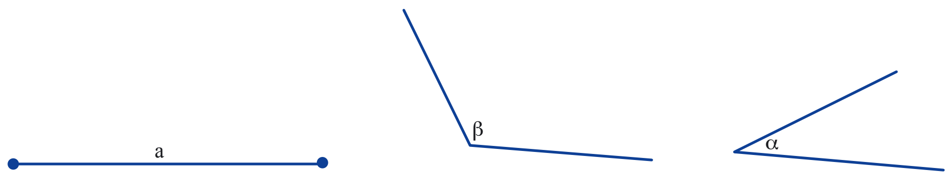
4. نتطرّق في المهمّة إلى زاوية خارجيّة واحدة إلى جانب كلّ رأس من رؤوس المثلّث.
أمامكم ادّعاءات، حدّدوا هل هي صحيحة؟ اشرحوا.

أ. مجموع زاويتان خارجيّتان للمثلّث **يساوي** $180°$.

ب. مجموع زاويتان خارجيّتان للمثلّث **أكبر من** $180°$.

ت. مجموع زاويتان خارجيّتان للمثلّث **أصغر من** $180°$.

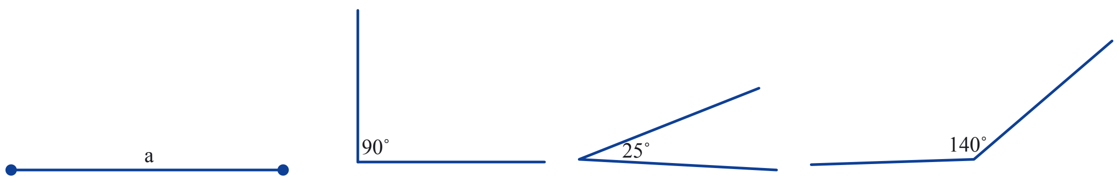
*5. معطى الزاويتان α وَ β والقطعة a.



ابنوا المثلّث ΔABC ، بحيث يكون فيه طول الضلع BC كطول القطعة a، مقدار الزاوية $\measuredangle B$ كمقدار إحدى الزوايا المعطاة، ومقدار الزاوية الخارجيّة في الرأس C كمقدار الزاوية المعطاة الثانية.
حدّدوا، في البداية، أيّ زاوية من الزاويتين الداخليّتين هي زاوية داخليّة، وأيّهما زاوية خارجيّة؟ اشرحوا.

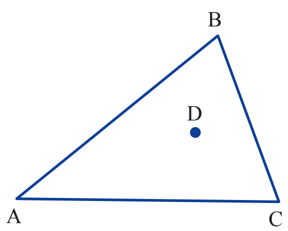
اسم المهمّة البديلة في الموقع "زاوية داخليّة، زاوية خارجيّة وضلع": *"זווית פנימית, זווית חיצונית וצלע"*

*6. معطى ثلاث زوايا وقطعة. اثنتان منهما زاويتان خارجيّتان للمثلّث ABC.

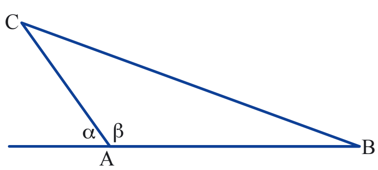


أ. زاويتان فقط يمكن أن يكونا زاويتين خارجيتين للمثلّث نفسه. من هما؟ اشرحوا.
ب. ابنوا المثلّث ΔABC ، بحيث يكون فيه طول الضلع BC كطول القطعة a، ومقدار الزاويتان في الرأسين B وَ C كمقدار الزاويتين الخارجيّتين اللتين اخترتموهما في بند أ. كم مثلثًا مناسبًا للمعطيات يمكن أن نبني؟ اشرحوا.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "زاويتان خارجيّتان وضلع" *"שתי זוויות חיצוניות וצלע"*



7. **معطى** D نقطة معيّنة داخل المثلّث ABC.
هل الزاوية $\measuredangle ADC$ أكبر من $\measuredangle B$، أم أصغر من $\measuredangle B$، أم تساوي $\measuredangle B$؟
برهنوا.
(**إرشاد:** ارسموا مستقيمًا يمرّ عبر النقطتين B, D.)



8. **معطى** المثلّث ABC.
α زاوية خارجيّة مجاورة للزاوية $\measuredangle CAB$.
حدّدوا، في كل بند، $>$, $<$, $=$ وعلّلوا.

أ. $\measuredangle B + \measuredangle C \ \bigcirc \ a$ ب. $\measuredangle B \ \bigcirc \ \alpha$ ت. $\measuredangle C \ \bigcirc \ \alpha$

9. معطى مثلّث ABC.

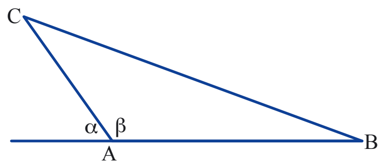
α زاوية خارجيّة مجاورة للزاوية $\measuredangle A$.

حدّدوا صحيح أو غير صحيح وعلّلوا.

أ. $\alpha + \beta = 180^\circ$

ب. $\alpha + \measuredangle B = 180^\circ$

ت. $\alpha = \measuredangle B + \measuredangle C$



10. معطى في المثلّث ABC.

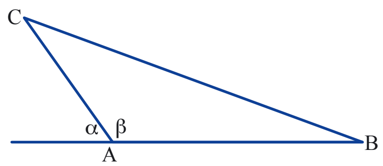
α زاوية خارجيّة مجاورة للزاوية $\measuredangle A$.

حدّدوا صحيح أو غير صحيح وعلّلوا.

أ. $\beta > 180^\circ - \alpha$

ب. $180^\circ + \beta = \measuredangle B + \measuredangle C$

ت. $\alpha - \measuredangle B = \measuredangle C$



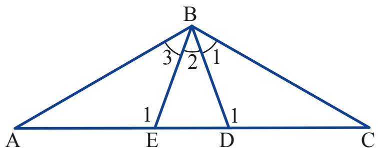
11. معطى المثلّث ABC.

$\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 = \measuredangle B_3$

$\measuredangle D_1 = \measuredangle E1$

أ. **برهنوا**: مثلّث BED متساوي الساقين.

ب. ما هو نوع المثلّث ABC؟ **برهنوا**.



12. معطى $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 = \measuredangle B_3$

$\measuredangle B_1 = \alpha$

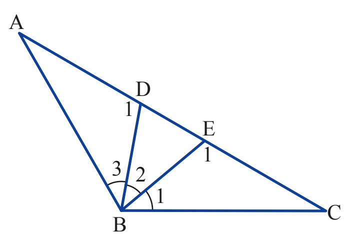
$\measuredangle D_1 = \measuredangle E_1$

أ. حالة واحدة من الحالات التالية ممكنة. ما هي؟ اشرحوا.

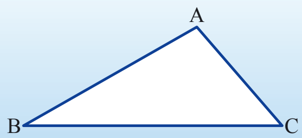
(1) $\measuredangle E_1 = 2\alpha$ (2) $\measuredangle E_1 = 1.5\alpha$ (3) $\measuredangle E_1 = 2.5\alpha$

ب. ما هي قيمة α المناسبة للحالة الممكنة؟

ت. احسبوا مقدار زوايا المثلّث ABC.



الدرس الثاني: العلاقة بين أطوال أضلاع المثلّث ومقدار زواياه.



معطى: $AB \neq AC$

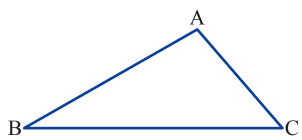
هل يمكن الاستنتاج أنّ $\measuredangle B \neq \measuredangle C$؟

نتناول العلاقات بين أطوال أضلاع المثلّث ومقدار زواياه.

1. نتطرّق إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

معطى $AB \neq AC$

المطلوب برهانه $\measuredangle B \neq \measuredangle C$



البرهان: نفترض أنّ الجملة غير صحيحة، هذا يعني أنّ $\measuredangle B = \measuredangle C$.

أ. اشرحوا لماذا تتناقض هذه الفرضيّة مع المعطى؟

ب. هل يمكن الاستنتاج من ذلك أنّ $\measuredangle B \neq \measuredangle C$؟

نظريّة إذا كان في المثلّث ضلعان مختلفان في الطول ، فإنّ الزوايا المقابلة لها مختلفة بالمقدار.

برهنا هذه النظريّة في المهمّة 1 **بطريقة النفي.**

عندما **نبرهن بطريقة النفي**، نعمل حسب المراحل التالية:

- نفحص الإمكانيّة أنّ النظريّة **غير** صحيحة.
- نفحص ما هي النتائج لهذه الإمكانيّة؟
- إذا أدّت نتيجة معيّنة إلى تناقض، فإنّنا نستنتج أنّ الفرضيّة (النظريّة **غير** صحيحة) غير صحيحة.

نسمّي هذه الطريقة للبرهان "**البرهان بطريقة النفي**"، لأنّنا ننفي الإمكانيّة أنّ النظريّة غير صحيحة.

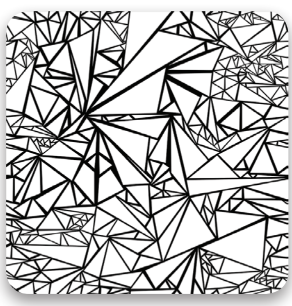
2. حدّدوا، في كلّ بند، هل الادّعاء المسجّل صحيح؟ **وبرهنوا.**

أ. إذا كان في المثلّث ضلعين مختلفين في الطول، فإنّ المثلّث غير متساوي الساقين.

ب. إذا كانت في المثلّث زاويتين مختلفين في المقدار، فإنّ الأضلاع المقابل لهذه الزوايا مختلفة في الطول.

ت. إذا كانت في المثلّث زاويتين مختلفين في المقدار، فإنّ المثلّث غير متساوي الساقين.

ث. إذا كانت في المثلّث جميع الأضلاع مختلفة في الطول، فإنّ جميع زوايا المثلّث تختلف عن بعضها في المقدار.

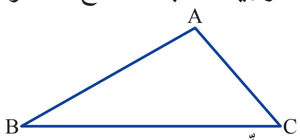


نفكّر بـ ...

3. برهنا، في المهمّة 1، أنّ الأضلاع المختلفة في الطول، في المثلث، تقابلها زوايا مختلفة في المقدار.
نصوغ كنظريّة، ونبرهن أنّ الضلع الأطول، في المثلّث، تقابله زاوية أكبر.

نظريّة

إذا كان في المثلّث ضلع أطول من الضلع الآخر، فإنّ الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

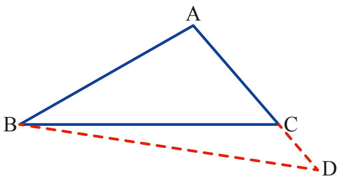


معطى $AB > AC$

المطلوب برهانه $\sphericalangle C > \sphericalangle B$

البرهان: انسخوا الرسمة، ومدّوا AC حتّى النقطة D بحيث أن: $AB = AD$، ثمّ صلوا بخطّ بين D وَ B.

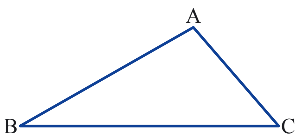
أ. أمامكم البرهان. أضيفوا تعليلات.



الادّعاء	التعليل
$\sphericalangle D = \sphericalangle ABD$	______
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle D$	______
$\Downarrow$	
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABD$	
$\sphericalangle ABD > \sphericalangle ABC$	
$\Downarrow$	
$\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$	______

ب. صوغوا نظريّة عكسيّة للنظريّة التي برهنتموها في بند أ.

ت. سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه في النظريّة العكسيّة، وبرهنوا.
(**إرشاد**: البرهان بطريقة النفي).



نفترض أنّ النظريّة غير صحيحة. هذا يعني أنّ $AB = AC$ أو $AB < AC$
اشرحوا لماذا تتناقض هذه الإمكانيّات مع المعطى؟

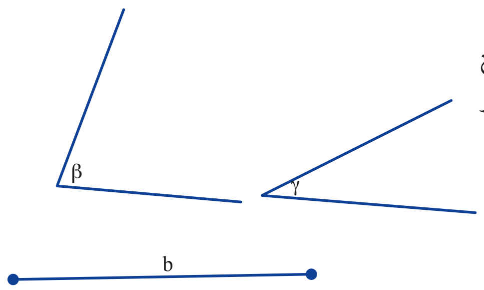
إذا كان أحد الأضلاع، في المثلّث، **أطول** من الضلع الثاني، فإنّ الزاوية المقابلة للضلع الأطول تكون **أكبر** من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.	متعاكستان	إذا كانت إحدى الزوايا، في المثلّث، **أكبر** من الزاوية الأخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الأكبر **أطول** من الضلع المقابلة للزاوية الأصغر.

4. **نظريّة** في المثلّث القائم الزاوية، طول كلّ قائم أصغر من طول الوتر.
برهنا هذه النظريّة بواسطة نظريّة فيثاغوروس.
برهنا النظريّة مرّة أخرى كاستنتاج من النظريّات التي برهناها هنا.

.5 ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة "أضلاع مقابل زوايا في المثلّث" "צלעות מול זוויות במשולש". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة في الحاسوب

.6 معطى القطعة b والزاويتان β وَ γ.
نبني المثلّث ABC ، بحيث يكون طول الضلع AC كطول الضلع b، ومقدار الزاوية B كمقدار الزاوية β، ومقدار الزاوية C كمقدار الزاوية γ.



أ. ارسموا رسمة لعرض المعطيات.

ب. ابنوا المثلّث وصفوا البناء.

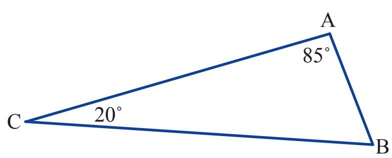
ت. أيّ ضلع أطول:
الضلع المقابل للزاوية β أم الضلع المقابل للزاوية α؟ علّلوا.

مجموعة مهامّ

ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهامّ بديلة لقسم من المهامّ في مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

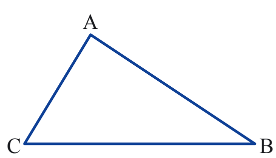
.1 أطوال أضلاع المثلّث ABC هي: 10 سم، 3.43 سم، 9.7 سم.
جدوا طول كلّ ضلع.



.2 معطى يتحقّق في المثلّث ABC ما يلي: CB > AB > CA

أ. ما هي الزاوية الكبرى في المثلّث؟ علّلوا.

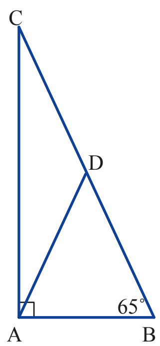
ب. ما هي الزاوية الصغرى في المثلّث؟ علّلوا.



3. معطى ΔABC متساوي الساقين $(AB = AC)$

$\measuredangle A = 52°$

أيّ ضلع أطول القاعدة أم الساق؟ علّلوا.



4. معطى AD متوسّط للوتر في المثلّث ABC.

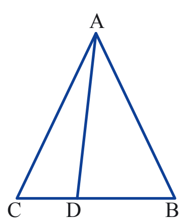
$\measuredangle B = 65°$

أ. احسبوا مقدار جميع الزوايا.

ب. أيُّهما أكبر القائم AB أم المتوسّط AD؟ علّلوا.

ت. أيُّهما أكبر القائم AC أم المتوسّط AD؟ علّلوا.

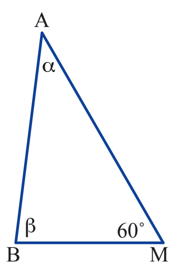
5. مقدار الزوايا في مثلّث متساوي الساقين هي: $120°, 30°$.
طول ضلعين من أضلاعه 15 سم وَ 8.66 سم.
ما هو طول الضلع الثالث؟ علّلوا.



6. معطى ΔABC متساوي الساقين.
D نقطة معيّنة على القاعدة BC.

أ. هل $AD < AB$ أم $AD > AB$ أم $AD = AB$؟ **برهنوا**.

ب. هل تتغيّر إجاباتكم إذا كانت النقطة D على امتداد BC على يمين النقطة B؟ اشرحوا.

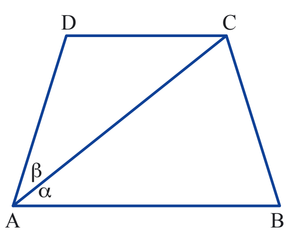


7. معطى $\measuredangle M = 60°$

$AB > BM$

هل $\alpha = \beta$؟ اشرحوا.

إذا كانت الإجابة لا، فأيّ زاوية أكبر α أم β؟ **برهنوا**.



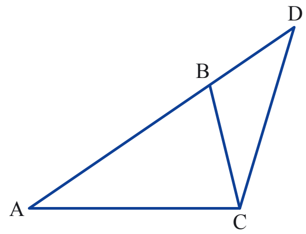
8. معطى $AB \parallel DC$

افحصوا، في كلّ بند، هل DC أكبر، أصغر أم يساوي طول AD؟ **برهنوا**.

أ. $\alpha = \beta$ ب. $\beta > \alpha$

.9 أ. معطى $BC < AB$

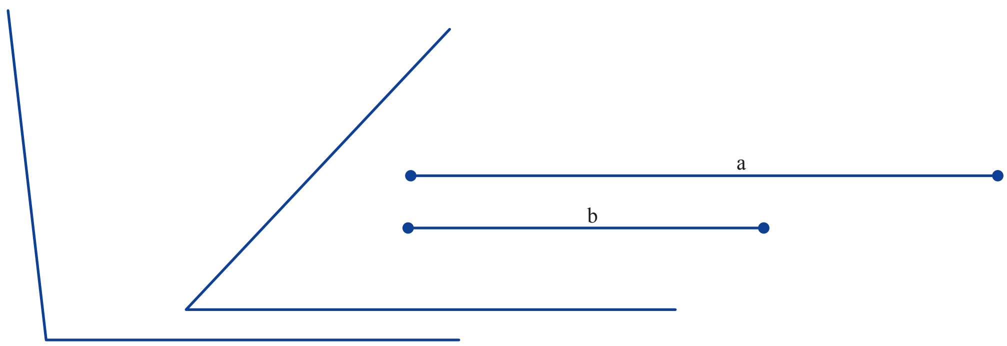
برهنوا: $AD > DC$



ب. اكتبوا ادّعاء عكسيًّا للادّعاء في بند أ.

ت. هل الادّعاء الّذي سجّلتموه في بند ب صحيح؟
إذا كانت الإجابة نعم، فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا، فأرسموا مثالًا مضادًّا.

***10.** معطى قطعتان وزاويتان.



نريد أن نبني المثلّث ABC حسب طول الضلعين المعطيين ومقدار الزاويتين المقابلتين لهما.

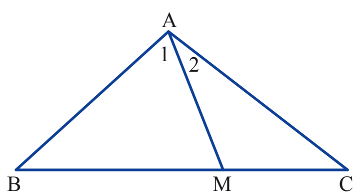
أ. - ارسموا رسمة لتوضيح المعطيات.
- أيّ زاوية يجب أن تكون مقابل الضلع a؟ اشرحوا. ارمزوا لها بالحرف α.
- ارمزوا للزاوية المقابلة للضلع b بالحرف β.

ب. ابنوا المثلّث. (**إرشاد**: ابنوا، في البداية، الزاوية الثالثة للمثلّث).

ت. افحصوا ما إذا كان المعطى الّذي لم تستعملوه مناسبًا للناتج في المثلّث.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "ضلعان وزاويتان" *"שתי צלעות ושתי זוויות"*

.11 معطى M نقطة على القطعة BC.

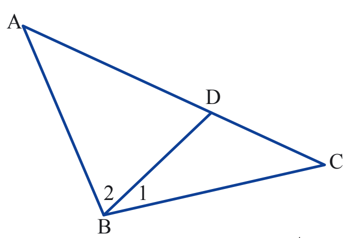


$BM = BA$

$\sphericalangle A_1 > \sphericalangle A_2$

برهنوا: أ. $AC > AM$ ب. $BC > AB$

.12 معطى $AD = AB$ (انظروا الرسمة).



أ. برهنوا: $\sphericalangle B_2 > \sphericalangle B_1$

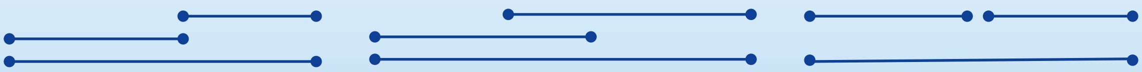
ب. هل يمكن الاستنتاج أن $BC > DC$؟
إذا كانت الإجابة نعم، فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا، فأرسموا مثالًا مضادًّا.

ت. هل يمكن الاستنتاج أن $AD > DC$؟
إذا كانت الإجابة نعم، فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا، فأرسموا مثالًا مضادًّا واشرحوا.

الدرس الثالث: أضلاع في المثلّث

أمامكم ثلاث مجموعات من القطع، في كلّ منها ثلاث قطع. حاولوا أن تبنوا مثلّثًا، بواسطة مسطرة وفرجار، من كلّ مجموعة قطع، بحيث تكون أطوال أضلاع المثلّث كأطوال القطع المعطاة.

أ. ب. ت.



نتناول العلاقة بين أطوال أضلاع المثلّث.

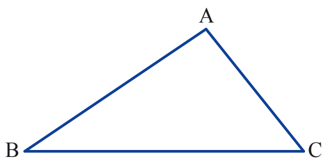
1. نتطرّق إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة. من أيّ ثلاث قطع نجحتم في بناء المثلّث؟ اشرحوا.

2. نظريّة مجموع طول ضلعين في المثلّث أكبر من طول الضلع الثالث.

نبرهن هذه النظريّة:

معطى ΔABC

المطلوب برهانه $AB + AC > BC$



البرهان:

بناء مساعد: $AD \perp BC$

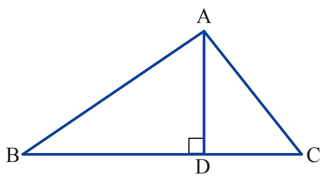
أ. سجّلوا تعليلات، وأكملوا البرهان.

$BD < AB$ ______

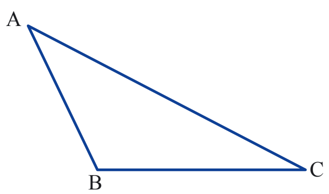
$CD < AC$ ______

$\Downarrow$

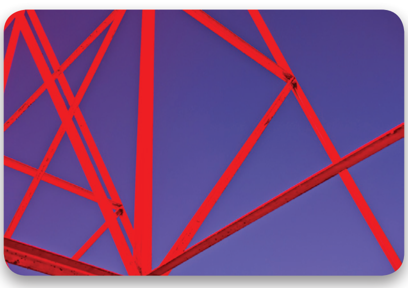
.
.
.

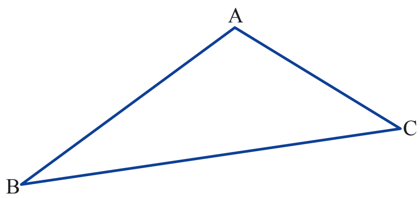


ب. افحصوا هل $AB + AC > BC$ عندما يكون المثلّث منفرج الزاوية أيضًا (ويقع الارتفاع خارج المثلّث)؟



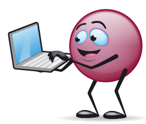
نظريّة مجموع طول ضلعين في المثلّث أكبر من طول الضلع الثالث.





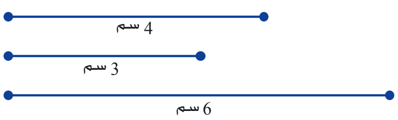
.3 أمامكم جدول. سُجلت في كل سطر أطوال أضلاع ومقدار زوايا، لا يمكن أن نبني منها مثلّثات. عللوا.
أطوال الأضلاع معطاة بالسم.
(يعرض المثلّث، في الرسمة، كل زاوية والضلع المقابل لها).

	BC	AC	AB	∢A	∢B	∢C
أ.	5	10	17	38°	60°	82°
ب.	35	22	30	125°	30°	40°
ت.	30	18	14	100°	30°	50°
ث.	25	30	25	100°	40°	40°
ج.	18	18	30	30°	40°	110°



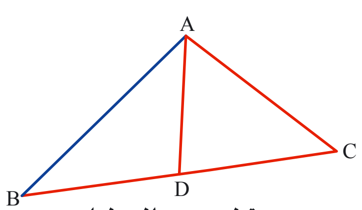
.4 ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة "مثلّث حسب ضلعين ومتوسّط" "משולש לפי שתי צלעות ותיכון". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة
في الحاسوب



.5 معطاة ثلاث قِطع.
ابنوا المثلث ABC ، بحيث يكون طول ضلعين فيه (AC وَ BC)
كطول قطعتين من القطع المعطاة، وطول المتوسط للضلع
BC كطول القطعة الثالثة.

حدّدوا، في البداية، أيّ قطعة من بين القطع الثلاثة المعطاة طولها كطول الضلع BC. اشرحوا وارمزوا له بالحرف a، وعندئذٍ ارمزوا إلى القطعتين الأخريتين بالحرفين b وَ c.



رسمة لتوضيح المعطيات

مجموعة مهامّ

ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهمّة بديلة للمهمّة 7 من مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

أُعِدّت الرسومات في مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

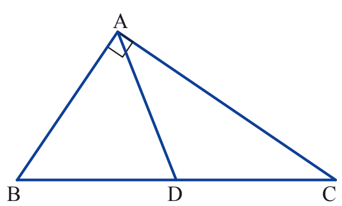
1. معطى، في كلّ بند، أطوال ثلاثة قطع.
أيّ ثلاث قطع يمكن أن تكون أضلاع مثلّث؟

أ. 18, 5, 15 ب. 5, 6, 12 ت. 12, 12, 4 ث. 10, 10, 30

2. معطى أطوال 5 قطع (بالسم): 2, 2, 3, 4, 5
جدوا أيّ 3 قطع يمكن أن تكون أضلاع مثلّث؟ (سجّلوا جميع الحلول الممكنة). اشرحوا.

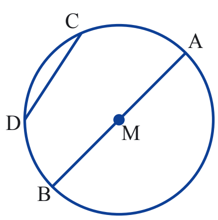
3. أ. في مثلّث متساوي الساقين، طول ضلعين هما: 14 سم وَ 28 سم.
أيّ ضلع هو القاعدة، وأي ضلع هو الساق؟ اشرحوا.
ب. في مثلّث متساوي الساقين، طول ضلعان هما: 15 سم وَ 7 سم.
أيّ ضلع هو القاعدة، وأيّ ضلع هو الساق؟ اشرحوا.

4. معطى AD متوسّط للوتر في المثلّث القائم الزاوية ABC.

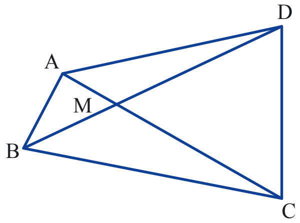


أ. **برهنوا:** $2AD = BC$
(**إرشاد:** استعملوا نظريّة المتوسّط للوتر في المثلّث القائم الزاوية).
ب. **برهنوا:** $2AD < AB + AC$.

5. **برهنوا:** القطر هو الأطول من بين جميع الأوتار في الدائرة.
اكتبوا، في البداية، المعطى والمطلوب برهانه.
(**إرشاد:** صلوا بين D وَ C ومركز الدائرة).



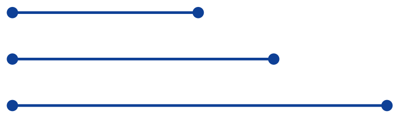
.6 أمامكم رسمة شكل رباعيّ محدّب ABCD.



أ. **برهنوا:** مجموع طولَي القطرين أكبر من نِصف محيط الشكل الرباعيّ.

ب. **برهنوا:** مجموع طولَي القطرين أصغر من محيط الشكل الرباعيّ.

***.7** معطاة ثلاث قطع a, b وَ c.

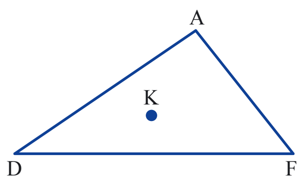


ابنوا مثلّثًا فيه ضلعان كطول قطعتين معطيتين، والارتفاع للضلع الثالث كطول القطعة الثالثة.

ارسموا، في البداية، رسمة لتوضيح المعطيات، وحدّدوا أيّ قطعة من بين القطع الثلاث يجب أن تكون كطول الارتفاع. اشرحوا، وارمزوا له بالحرف h.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "مثلث حسب ضلعين وارتفاع" *"משולש לפי שתי צלעות וגובה"*

.8 معطى K هي نقطة معيّنة داخل المثلّث DFA.



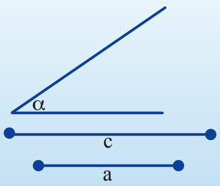
أ. **برهنوا:**
مجموع أبعاد النقطة K
عن رؤوس المثلّث أكبر من نِصف محيط المثلّث.

ب. افحصوا هل الادّعاء صحيح إذا كانت النقطة K على أحد الأضلاع.

ت. افحصوا هل الادّعاء صحيح إذا كانت النقطة K خارج المثلّث.

الدرس الرابع: نظريّة تطابق جديدة

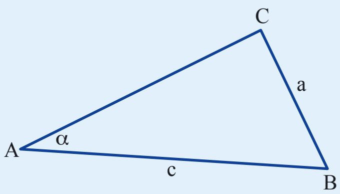
نبني مثلّثًا حسب طولَي ضلعين من أضلاعه (a وَ c) ومقدار الزاوية المقابلة لأحدهما (α).
كم مثلّثًا مختلفًا يمكن أن نبني بواسطة هذه المعطيات؟
ارسموا مثلّثًا يعرض جميع الإمكانيّات.



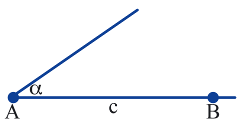
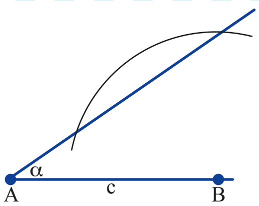
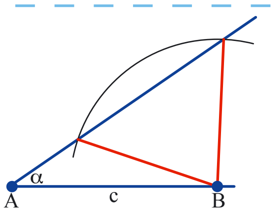
نبحث بناء مثلّث حسب طولَي ضلعين ومقدار الزاوية المقابلة لأحدهما.

نتطرّق في المهمّتين 1وَ 2 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمة الافتتاحيّة.

1. يجب أن نبني مثلّث ABC (انظروا إلى الرسمة التوضيحية) فيه:
- طول الضلع AB كطول القطعة المعطاة c،
- طول الضلع BC كطول القطعة المعطاة a،
- مقدار الزاوية A **المقابلة للضلع BC** كمقدار الزاوية α.



رسمة للتوضيح

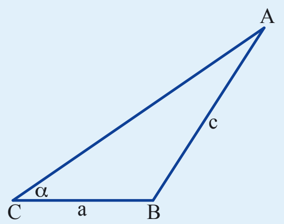
وصف البناء	البناء
• ننسخ القطعة المعطاة c على مستقيم، ونرمز لطرفيها بالحرفين A وَ B.	
• ننسخ الزاوية α في النقطة A على القطعة AB.	
• نرسم من النقطة B قوسًا نِصف قُطره يساوي طول القطعة a.	
• نوصل نقاط التقاطع مع B.	

أ. نفّذوا البناء حسب الوصف.

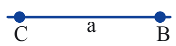
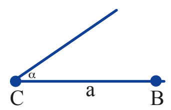
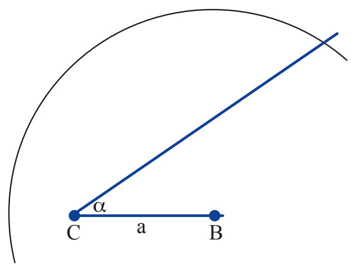
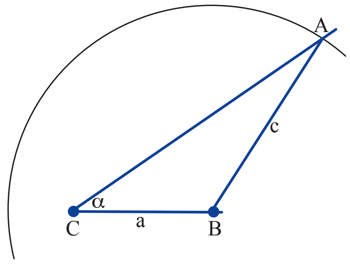
ب. كم مثلّثًا حصلتم؟ اشرحوا.

ت. أيّ ضلع أكبر: الضلع **المقابل** للزاوية α أم الضلع **المجاور** للزاوية α؟

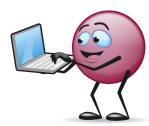
.2 يجب أن نبني مثلّث ABC (انظروا إلى الرسمة التوضيحية) فيه:
- طول الضلع AB كطول القطعة المعطاة c،
- طول الضلع BC كطول القطعة المعطاة a،
- مقدار الزاوية A **المقابلة للضلع BC** كمقدار الزاوية α.



رسمة للتوضيح

وصف البناء	البناء
• ننسخ القطعة المعطاة a على مستقيم، ونرمز لطرفيها بالحرفين A وَ B.	
• ننسخ الزاوية α في النقطة C على القطعة BC.	
• نرسم من النقطة B قوسًا نِصف قُطره يساوي طول القطعة c.	
• نرمز إلى نقطة التقاطع بالحرف A ونوصلها مع النقطة B.	

أ. نفّذوا البناء حسب الوصف.
ب. كم مثلّثًا حصلتم؟ اشرحوا.
ت. أيّ ضلع أكبر: الضلع **المقابل** للزاوية α أم الضلع **المجاور** للزاوية α؟



.3 ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة "مثلّث حسب ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما" "משולש לפי שתי צלעות וזווית מול אחת מהן". ستبحثون، في هذه الفعّاليّة، حالات مختلفة لبناء مثلّثات حسب هذه المعطيات. نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

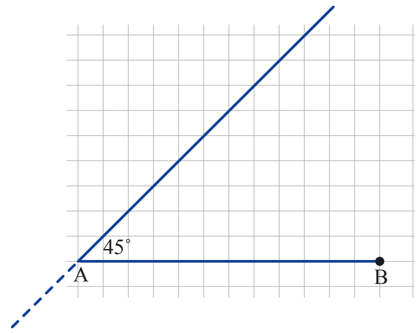
فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

4. رُسمت، في كلّ بند، القطعة AB طولها 10 وحدات طول تربيعيّة، وَ $\measuredangle A$ مقدارها °45.

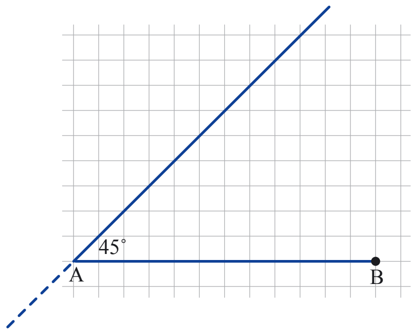
أ. انسخوا وارسموا قوسًا من النقطة B حسب نصف القُطر المعطى.

افحصوا هل يتقاطع القوس مع ساق الزاوية A؟ إذا كانت الإجابة نعم، فكم نقطة؟

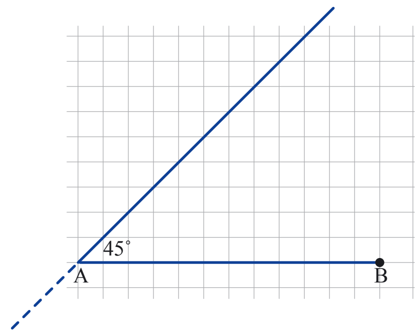
(i) قوس بنصف قطر طوله 6 وحدات طول تربيعيّة



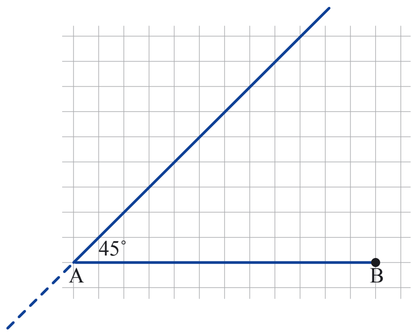
(iii) قوس بنصف قطر طوله 12 وحدة طول تربيعيّة



(ii) قوس بنصف قطر طوله 10 وحدات طول تربيعيّة



(iv) قوس بنصف قطر طوله 14 وحدة طول تربيعيّة



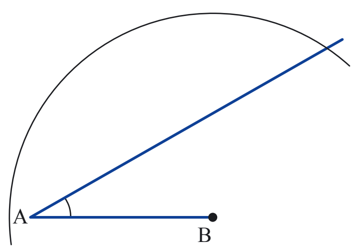
ب. أكملوا إلى مثلّثات في البنود الّتي فيها نقاط تقاطع، وحدّدوا عدد المثلّثات المناسبة للمعطيات. اشرحوا.

نفكّر بـ ...

5. استعينوا بالبناء وبالرسم اللذين نفّذتموهما هنا، ثمّ افحصوا واشرحوا:

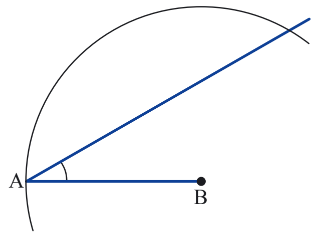
أ. - كم مثلثًا ينتج عندما يكون طول الضلع المقابل للزاوية **أكبر** من طول الضلع المجاور للزاوية؟

- هل تتطابق جميع المثلّثات الّتي تُبنى حسب هذه المعطيات؟



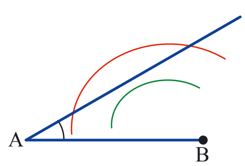
ب. - كم مثلثًا ينتج عندما يكون طول الضلع المقابل للزاوية **يساوي** طول الضلع المجاور للزاوية؟

- هل تتطابق جميع المثلّثات الّتي تُبنى حسب هذه المعطيات؟



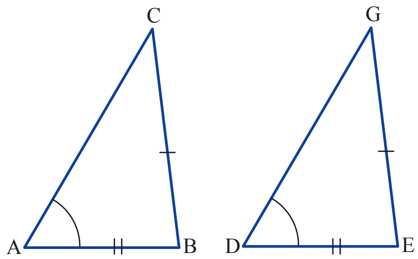
ت. - كم مثلثًا ينتج عندما يكون طول الضلع المقابل للزاوية **أصغر** من طول الضلع المجاور للزاوية؟

- هل نحصل على مثلّثات دائمًا؟
- هل نحصل على مثلّثات متطابقة؟



نظرية التطابق الرابعة

إذا كان ضلعان في مثلّث واحد متساويين، في الطول، مع ضلعين آخرين في مثلّث آخر، والزاوية المقابلة للضلع الأطول من بين الاثنين في المثلث الأوّل تساوي الزاوية المناظرة لها في المثلّث الآخر، فإنّ المثلّثين متطابقان.



مثال: معطى في الرسمة $BC > AB$

$GE > DE$

$BC = GE$

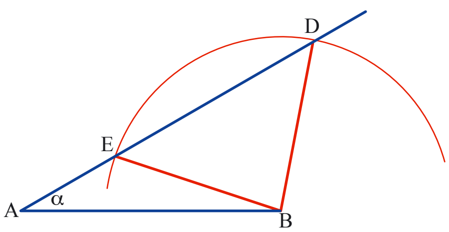
$AB = DE$

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle GDE$

رأينا حسب نظرية التطابق الرابعة أنّ $\Delta DEG \cong \Delta ABC$

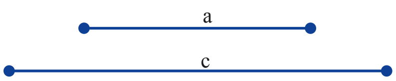
انتبهوا! رأينا في المهامّ السابقة أنّه إذا كانت الزوايا المتساوية، في مثلّثين، **مقابل** أضلاع أخرى متساوية في الطول، وهما أقصر من زوج الأضلاع الأخرى المتساوية في الطول، فعندئذٍ يمكن أن نبني من المعطيات مثلّثين مختلفين. في هذه الحالة، المثلّثان غير متطابقين بالضرورة.

مثال: نرى في الرسمة أنّه إذا كان الضلع المقابل للزاوية α أصغر من الضلع AB المجاور للزاوية α، عندئذ يمكن أن نبني مثلّثين مختلفين: ΔABE وَ ΔABD غيرَ متطابقين على الرغم من المساواة بين المعطيات.



6. أ. معطى القطعتان a وَ c.

ابنوا، بواسطة مسطرة وفرجار، مثلّثًا قائم الزاوية طول أحد القائمين a، وطول الوتر c.



ب. تعلّمتم في الصفّ الثامن عن نظريّة تطابق خاصّة لمثلّثين قائمَي الزاوية:

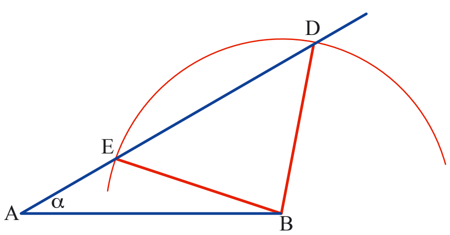
نظريّة إذا كان مثلّثان قائما الزاوية متساويين في طول أحد القائمين وطول الوتر، فإنّ المثلّثين متطابقان.

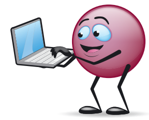
اشرحوا لماذا هذه النظريّة حالة خاصة من نظريّة التطابق الرابعة؟

في أعقاب...

7. رأينا، في المهمّة 5، أنّه إذا كانت الزوايا المتساوية، في المثلّثين، مقابل الأضلاع المتساوية في الطول، وهما أقصر من زوج الأضلاع الأخرى المتساوية في الطول، فعندئذ يمكن أن نبني من المعطيات مثلّثين مختلفين (ΔADB وَ ΔAEB في الرسمة). لذا في هذه الحالة، المثلّثان غير متطابقين بالضرورة.

برهنوا: $\sphericalangle AEB > \sphericalangle ADB$

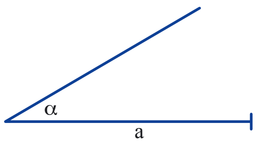




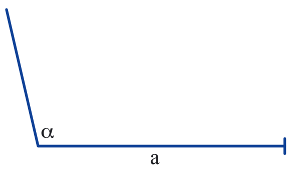
8. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، فعّاليّة "ضلعان متقابلان وزاويتان متقابلتان متساوية" "שתי צלעות נגדיות ושתי זוויות נגדיות שוות". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

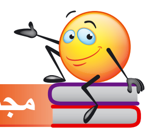
فعّاليّة بديلة في الحاسوب

9. أ. انسخوا الضلع a مع الزاوية α المجاورة له على ورقتين شفافتين.
جدوا بواسطة الورقتين الشفافتين أشكال رباعيّة فيها ضلعان متقابلان متساويان في الطول a ، وزاويتان متقابلتان متساويتان مقدار كلّ واحدة منهما α.
هل تكفي الصفات للحصول على شكل رباعيّ له اسم معروف؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا، وإذا كانت الإجابة لا فانسخوا المثال المضادّ الذي بنيتموه.



ب. كرّروا العمليّات الّتي نفّذتموها، في بند أ، عندما يكون معطى الضلع a والزاوية α منفرجة.
هل تكفي الصفات للحصول على شكل رباعيّ له اسم معروف؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا، وإذا كانت الإجابة لا فانسخوا المثال المضادّ الّذي بنيتموه.

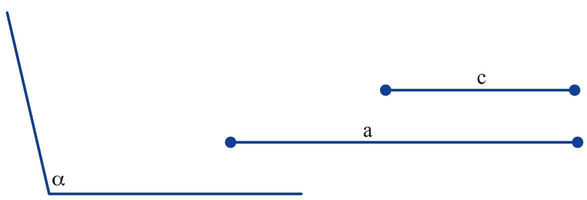




مجموعة مهامّ

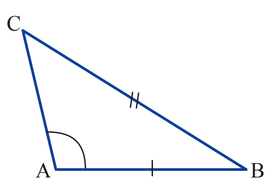
ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، مهمّة بديلة للمهمّة 2 في مجموعة المهامّ. أشرنا إلى المهمّة بـ * ، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

1. معطى قطعتان وزاوية.



أ. ابنوا ΔABC فيه طول الضلع AB كطول القطعة c، طول الضلع CB كطول القطعة a ومقدار الزاوية A كمقدار الزاوية α.

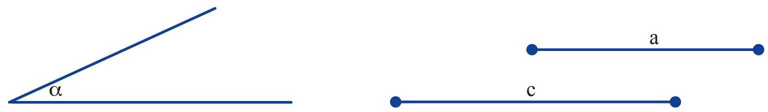
ب. كم مثلّثًا مختلفًا مناسبًا لهذه المعطيات؟ علّلوا.



رسمة توضيحيّة للمعطيات

2.* معطى قطعتان وزاوية.

أ. ابنوا ΔABC فيه طول الضلع AB كطول القطعة c، طول الضلع CB كطول القطعة a ومقدار الزاوية A كمقدار الزاوية α.



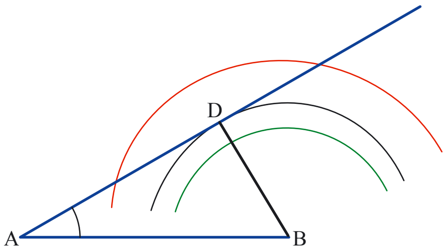
ب. كم مثلّثًا مختلفًا مناسبًا لهذه المعطيات؟ علّلوا.

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "ضلع *a*، ضلع *c* وزاوية α" "*צלע a, צלע c וזווית* α".

3. أ. يمكن أن نرسم قوسًا نصف قُطره أطول من نصف القُطر الأخضر، وأقصر من نصف القطر الأحمر، بحيث يتلامس القوس بساق الزاوية في النقطة D (انظروا الرسمة).

خمّنوا: ما هو نوع ΔABD؟ قيسوا الزوايا.

إذا أردتم أن تبرهنوا ذلك، فيمكنكم قراءة البرهان في البند التالي.

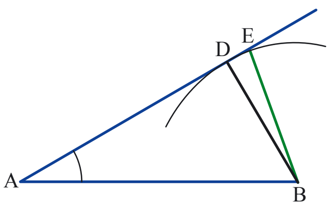


ب. حسب البناء، القطعة BD هي البُعد الأقصر بين النقطة والمستقيم. اشرحوا.

نبرهن أن ΔBDA هو زاوية قائمة.

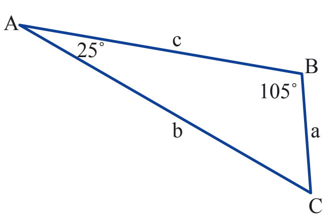
نفترض أن الزاوية غير قائمة، عندئذ يمكن أن نرسم من النقطة B عمودًا للمستقيم BE وللمستقيم AD، وهكذا ينتج المثلّث BED الّذي فيه BD هو الوتر.

حسب نظريّة فيثاغورس $BD > BE$، لكن BD هو البُعد الأقصر بين النقطة B والمستقيم AD. لذا؛ الافتراض الّذي افترضناه غير صحيح، والزاوية BDA هي زاوية قائمة وَ ΔADB هو مثلث قائم الزاوية.

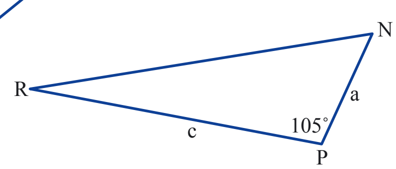


4. أمامكم ΔABC.

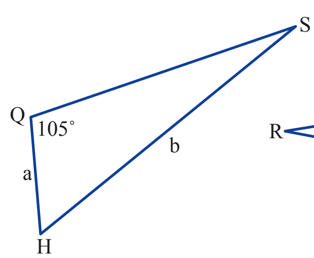
علّلوا، في كلّ بند، حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّث مع المثلّث ΔABC.



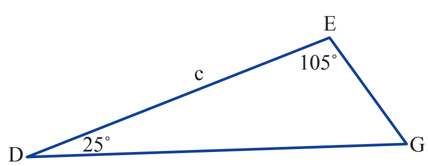
أ.



ب.

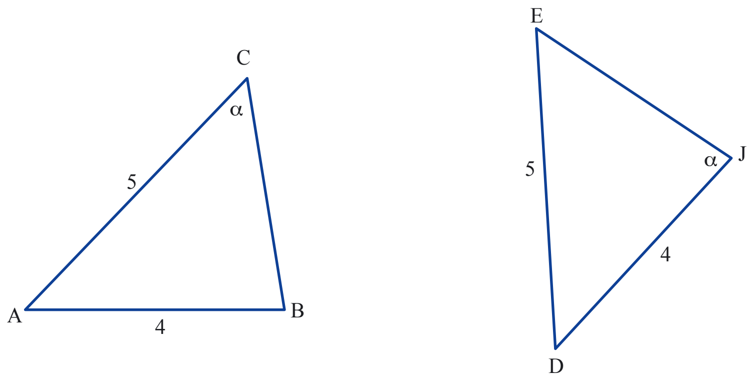


ت.

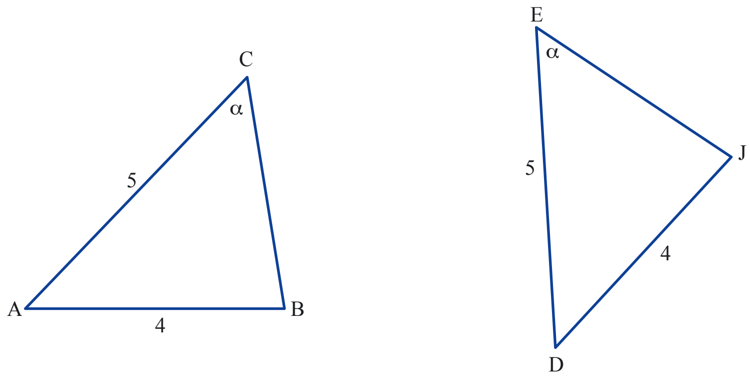


5. حدّدوا، في كلّ بند، حسب المعطيات المسجّلة في الرسمة ما إذا كان يمكن استنتاج أنّ المثلّثات متطابقة. علّلوا.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

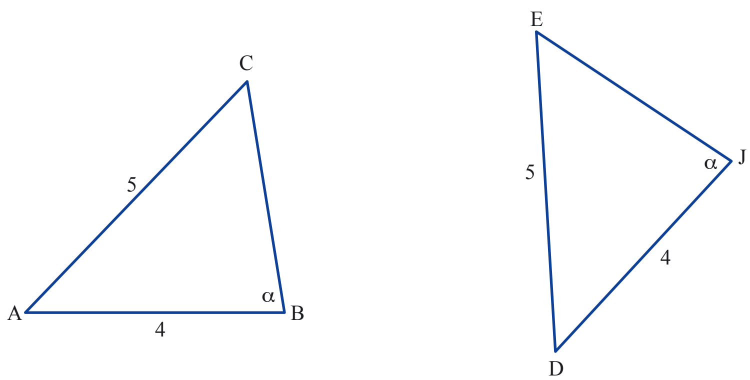
أ.



ب.

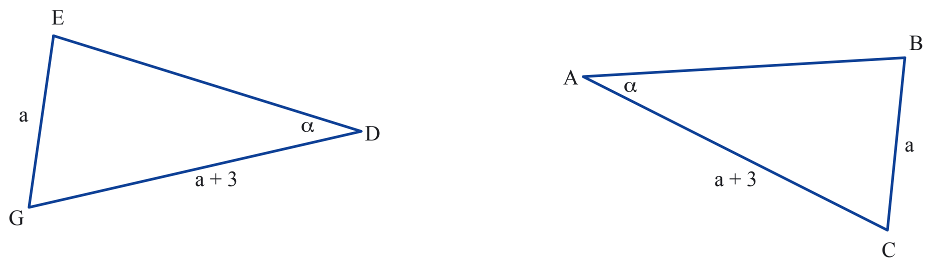


ت.

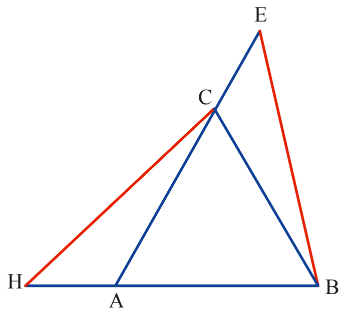


ث.

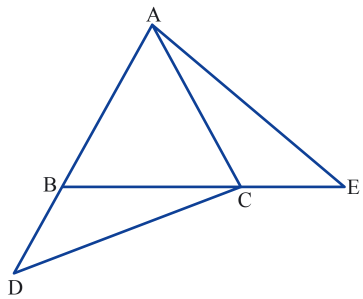
ج.



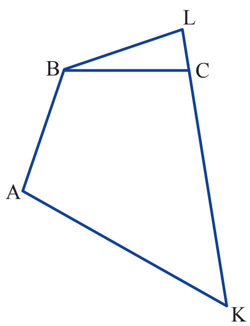
.6 معطى ΔABC مثلّث متساوي الأضلاع.
تقع النقطة H على امتداد الضلع BA والنقطة E على امتداد الضلع AC.
$EB = HC$
المطلوب برهانه $\sphericalangle H = \sphericalangle E$



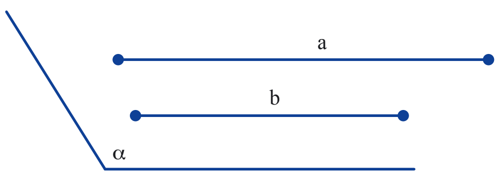
.7 معطى ΔABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AB = AC)$.
مدّوا BC وَ AB بحيث يكون: $CE = BD$
$AE = CD$
المطلوب برهانه ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.
(**إرشاد:** برهنوا، في البداية، أنّ $\Delta DCB \cong \Delta AEC$.)



.8 معطى $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BAK$
$BL = BC = BA$
المطلوب برهانه أ. $\sphericalangle BCK > 90°$
ب. الشكل الرباعيّ ABCK دالتون.



.9 ابنوا دالتون طول أحد أضلاعه كطول القطعة b،
طول القطر الرئيسيّ كطول القطعة المعطاة a ومقدار الزاوية
المقابلة للقطر الرئيسيّ كمقدار الزاوية α.
صفوا البناء.



.10 ابنوا دالتون طول قُطره الرئيسي كطول القطعة المعطاة a
والزوايا المقابلة لهذا القطر قائمة.
كم دالتون مناسبًا للمعطيات؟ اشرحوا.