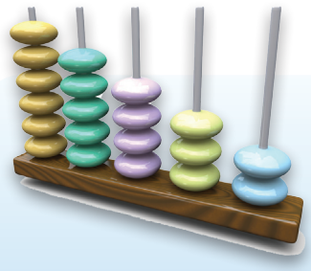
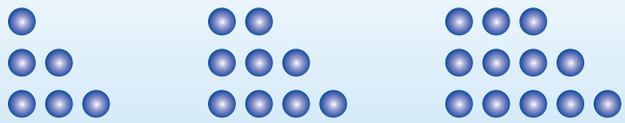
الوحدة الثامنة والعشرون: التعميم والتعليل الجبريّ

الدرس الأوّل: متواليات أعداد متتالية



أمامكم متوالية مبانٍ من دوائر.



كم نقطة توجد في المبنى الثاني؟ كم نقطة توجد في المبنى الرابع؟كم نقطة توجد في المبنى العاشر؟

نبحث صفات متواليات أعداد.

ثلاثة أعداد متتالية

1. أ. سجّلوا متواليات بحيث يكون في كلّ منها ثلاثة أعداد متتالية، واحسبوا مجموع كلّ ثلاثة أعداد.

مثال: $9 + 10 + 11 = 30$

ب. قال **ضرار**: مجموع ثلاثة أعداد متتالية هو 3 أضعاف العدد الأوسط.
هل قول **ضرار** صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ت. قال **جمال**: في كلّ ثلاثة أعداد متتالية، العدد الأوسط هو المعدّل الحسابي للأعداد الثلاثة.
هل قول **جمال** صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ث. جدوا صفة إضافيّة لمتوالية مكوّنة من ثلاثة أعداد متتالية، وبرهنوها.

2. رأينا في المهمّة 1 أنّ مجموع 3 أعداد متتالية هو من مضاعفات العدد 3.
استعينوا بمبنى الدوائر الّذي وَرَدَ في مهمّة الافتتاحيّة، وبرهنوا هذه الصفة ببرهان بصري لكلّ ثلاثة أعداد موجبة متتالية.

3. أمامكم قائمة أعداد: 12 45 67 105 24
أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمجموع ثلاثة أعداد متتالية؟
اكتبوا الأعداد التي وجدتموها كتمارين جمع مناسبة.
اشرحوا لماذا لا يمكن تسجيل الأعداد الأخرى بهذه الكتابة؟

خمسة أعداد متتالية

4. أ. اكتبوا متواليات أعداد بحيث يكون في كلّ منها خمسة أعداد متتالية، واحسبوا مجموع كلّ متوالية.

ب. صوغوا ادعاءً حول مجموع متوالية مكوّنة من خمسة أعداد متتالية.
افحصوا ادعاءكم على الأمثلة الّتي سجلتوها، وبرهنوه.

ت. صوغوا ادعاءً حول العدد الأوسط في متوالية مكوّنة من خمسة أعداد متتالية.
افحصوا ادعاءكم على الأمثلة الّتي سجّلتموها، وبرهنوه.

5. أمامكم قائمة أعداد: 73 15 2145 94 50
أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمجموع خمسة أعداد متتالية؟
اكتبوا الأعداد التي وجدتموها كتمارين جمع مناسبة.
اشرحوا لماذا لا يمكن تسجيل الأعداد الأخرى بهذه الكتابة؟

أربعة أعداد متتالية

6. أ. هل مجموع أربعة أعداد متتالية يقبل القسمة على 4؟ إذا كانت الإجابة نعم، فبرهنوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ب. هل مجموع أربعة أعداد متتالية هو عدد زوجيّ؟ إذا كانت الإجابة نعم، فبرهنوا. وإذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ت. صوغوا ادعاءً حول مجموع أربعة أعداد متتالية.

7. أمامكم قائمة أعداد: 216 1414 100 54 26
أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمجموع أربعة أعداد متتالية؟
اكتبوا الأعداد التي وجدتموها كتمارين جمع مناسبة.
اشرحوا لماذا لا يمكن تسجيل الأعداد الأخرى بهذه الكتابة؟

8. أ. أمامكم متوالية أربعة أعداد متتالية: 15, 14, 13, 12
ما هو معدّل العددين الوسطين في المتوالية؟ ما هو معدّل كلّ متوالية؟

ب. صوغوا ادعاءً حول معدّل أربعة أعداد متتالية، وبرهنوه.

9. أمامكم قائمة أعداد: 26 26.5 26.25 37.5
أيّ أعداد، من بين هذه الأعداد، يمكن أن نسجّلها كمعدّل أربعة أعداد متتالية؟
اكتبوا المتواليات المناسبة للمعدّلات الّتي وجدتموها. اشرحوا لماذا الأعداد الأخرى غير مناسبة؟

1. أ. افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة:

$3 + 5 = 2 \cdot 4$

$4 + 6 = 2 \cdot 5$

$9 + 11 = 2 \cdot 10$

ب. أعطوا أمثلة إضافيّة لثلاثة أعداد متتالية تحقّق هذه الصفة:
مجموع عددين خارجيين ضعفي العدد الأوسط.

2. أ. حدّدوا هل يمكن تسجيل كلّ عدد كمجموع 3 أعداد متتالية.
إذا كانت الإجابة نعم، فاكتبوا الأعداد. وإذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا لماذا؟

13 33 63

ب. حدّدوا هل يمكن تسجيل كلّ عدد كمجموع 5 أعداد متتالية.
إذا كانت الإجابة نعم، فاكتبوا الأعداد. وإذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا لماذا؟

85 98 215

ت. حدّدوا هل يمكن تسجيل كلّ عدد كمجموع 4 أعداد متتالية.
إذا كانت الإجابة نعم، فاكتبوا الأعداد. وإذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا لماذا؟

94 146 310

3. أمامكم أعداد: 15, 30, 60

أ. حاولوا أن تكتبوا كلّ عدد من هذه الأعداد (إذا كان الأمر ممكنًا) كمجموع 3 أعداد متتالية.

ب. حاولوا أن تكتبوا كلّ عدد من هذه الأعداد (إذا كان الأمر ممكنًا) كمجموع 5 أعداد متتالية.

ت. أعطوا مثالًا إضافيًّا لعدد يمكن كتابته كمجموع 3 أعداد متتالية وكمجموع 5 أعداد متتالية أيضًا.

ث. أيّ أعداد يمكن أن نكتبها كمجموع 3 أعداد متتالية وكمجموع 5 أعداد متتالية؟ اشرحوا.

4. أ. سجّلوا متواليتين كلّ واحدة منهما مكوّنة من سبعة أعداد متتالية. احسبوا مجموع كلّ متوالية.

ب. قال **ضرار**: مجموع سبعة أعداد متتالية هو عدد يقبل القسمة على 7.
اشرحوا ادعاء **ضرار** وبرهنوه (يمكنكم الاستعانة بتعابير جبريّة).

ت. قال **جمال**: في كلّ متوالية مكوّنة من سبعة أعداد متتالية، العدد الأوسط هو المعدّل الحسابيّ لسبعة أعداد.
اشرحوا ادعاء **جمال** وبرهنوه.

5. أ. ما هو العدد الأقرب للعدد 600 الّذي يمكن أن نسجّله كمجموع 3 أعداد متتالية وكمجموع 5, 7 وَ 9 أعداد متتالية؟

ب. اكتبوا العدد الّذي وجدتموه، في بند أ، كمجموع أعداد مناسبة.

الدرس الثاني: صفات أعداد

افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة:

$0.6^2 + 0.4 = 0.4^2 + 0.6$

$(-3)^2 + 4 = 4^2 + (-3)$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$

خمّنوا صفات مشتركة لكلّ زوج، من الأعداد، يحقّق المساواة: $a^2 + b = b^2 + a$

نبحث صفات إضافيّة.

نتطرّق في المهمّتين 1 وَ 2 إلى الأمثلة الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. حاول **أكرم** أن يجد الشرط المناسب لزوج الأعداد a وَ b $(a \neq b)$ الّذي يحقّق المساواة $a^2 + b = b^2 + a$

سجّل:

$a^2 - b^2 = a - b$

$(a - b)(a + b) = a - b \quad / : (a - b)$

استمرّوا في حلّ **أكرم**، وسجّلوا الشرط المناسب لزوج الأعداد a وَ b الّذي يحقّق المساواة.

ب. هل الادّعاء صحيح في الحالات الّتي فيها $a = b$؟ اشرحوا.

ت. اكتبوا مثالًا إضافيًّا لزوج الأعداد الّذي يحقق المساواة.

2. جدوا حلّ المعادلات.

أ. $x^2 + (1 - x) = (1 - x)^2 + x$

ب. $(2x - 3)^2 + (4 - 2x) = (4 - 2x)^2 + (2x - 3)$

3. أ. افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة:

$21 \cdot 22 - 20 \cdot 23 = 2$

$100 \cdot 101 - 99 \cdot 102 = 2$

$78 \cdot 79 - 77 \cdot 80 = 2$

ب. اكتبوا مثالًا إضافيًّا للقانونيّة نفسها، وافحصوا هل هي صحيحة؟

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي وجدتموها. برهنوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

4. جدوا حلّ المعادلة، واشرحوا.

$(x + 6)(x + 7) - (x + 5)(x + 8) = 2$

5. أ. يوجد في كلّ تمرين أربعة أعداد متتالية. افحصوا هل الحسابات صحيحة؟

$5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2 + 3 + 4 + 5$

$21 \cdot 20 - 19 \cdot 18 = 18 + 19 + 20 + 21$

ب. اكتبوا مثالًا إضافيًّا للقانونية نفسها، وافحصوا هل هي صحيحة؟

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي وجدتموها. برهنوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

مجموعة مهامّ

1. أ. افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة:

$10^2 - 9^2 = 10 + 9$

$22^2 - 21^2 = 21 + 22$

$88^2 - 87^2 = 88 + 87$

ب. اكتبوا مثالًا إضافيًّا للقانونيّة نفسها، وافحصوا هل هي صحيحة؟

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي وجدتموها. برهنوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

2. معطى، في كلّ بند، زوج من الأعداد المتتالية.

اكتبوا كلّ تمرين كفرق مربّع عددين متتاليين (انظروا مهمّة 1).

أ. $8 + 7$ ب. $16 + 15$ ت. $75 + 74$

3. اكتبوا، في كلّ بند، العدد المعطى كفرق مربّع عددين متتاليين (انظروا مهمة 1).

أ. 7 ب. 25 ت. 47

4. أمامكم قائمة أعداد: 36 25 17 14 9

أ. أيّ أعداد يمكن أن نسجّلها كفرق مربّع عددين متتاليين؟

ب. اكتبوا الأعداد الّتي اخترتموها كفرق مربّع عددين متتاليين.

5. أ. افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة.

$(2^2 + 5^2) - (3^2 + 4^2) = 4$

$(8^2 + 11^2) - (9^2 + 10^2) = 4$

ب. اكتبوا مثالًا إضافيًّا للقانونيّة نفسها، وافحصوا هل هي صحيحة؟

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي وجدتموها. برهنوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

6. أ. افحصوا هل كلّ مساواة صحيحة.

$5^2 - 4 \cdot 6 = 1$

$9^2 - 8 \cdot 10 = 1$

$11^2 - 10 \cdot 12 = 1$

ب. اكتبوا مثالًا إضافيًّا للقانونيّة نفسها، وافحصوا هل هي صحيحة؟

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي وجدتموها. برهنوا أو بيّنوا مثالًا مضادًّا.

الدرس الثالث: الجبر والهندسة

براهين بواسطة الرسم

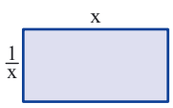
ادّعاء: مجموع عدد موجب ومقلوبه هو عدد أكبر من 2 أو يساوي 2.
هذا يعني أنّه لكلّ $x > 0$ يتحقّق: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

اختاروا أعدادًا موجبة، كما ترغبون، وافحصوا هل يتحقّق الادّعاء؟
حاولوا أن تشرحوا، لماذا الادّعاء صحيح؟

نبرهن ادّعاءات جبريّة بمساعدة رسومات.

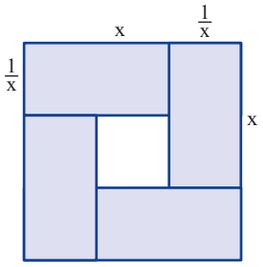
نتطرّق في المهمّتين 1 وَ 2 إلى الادّعاء الّذي وَرَدَ في مهمّة الافتتاحيّة.

1. نبرهن بمساعدة رسمة المتباينة الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.



أ. أمامكم رسمة مستطيل أطوال أضلاعه x وَ $\frac{1}{x}$ (x بوحدات الطول، $x > 0$).
قال **يوسف**: جميع هذه المستطيلات لها المساحة نفسها.
هل قول **يوسف** صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فما هي مساحة المستطيل؟ إذا كانت الإجابة لا، فجدوا مستطيلات مناسبة لها مساحات مختلفة.

ب. نضع أربعة مستطيلات متساوية، كما يظهر في الرسمة.
ما هو الشكل الناتج في أعقاب ترتيب المستطيلات بهذا الشكل؟ اشرحوا.

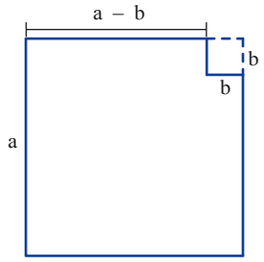


ت. اكتبوا متباينة تصف الادّعاء: مساحة المربّع الخارجي أكبر من مجموع مساحة المستطيلات الأربعة.

ث. اكتبوا العلاقة بين المتباينة الّتي سجّلتموها في بند ت ومهمّة الافتتاحيّة.

2. ما هو مجموع الأعداد عندما يتحقّق $x = \frac{1}{x}$ ؟
ارسموا رسمة مناسبة، واكتبوا تعميمًا مناسبًا.

نظرة هندسيّة على قانون الضرب



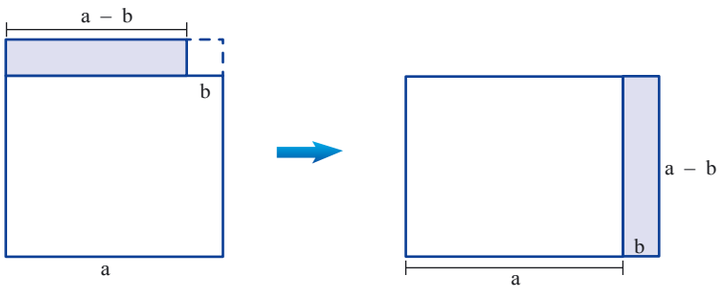
3. نبرهن، بمساعدة الرسم، قانون الضرب المختصر: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

أ. أعطوا أمثلة مناسبة لهذه المساواة.

ب. أمامكم رسمة مربّع طول ضلعه a، قصّوا منه مربّعًا صغيرًا طول ضلعه b (a وَ b وحدات طول).

أيّ قيم مناسبة لـ a، وأيّ قيم مناسبة لـ b حسب الرسمة؟

ت. قصّوا المستطيل الملوّن، وضعوه إلى جانب المربّع المقصوص، كما يظهر في الرسمة.



عبّروا عن مساحة الشكل السداسيّ الأصليّ (قبل القص)، ومساحة المستطيل الناتج (بعد القصّ وضعوه إلى جانب المربّع المقصوص) بمساعدة a وَ b.

ث. اشرحوا العلاقة بين قانون الضرب المختصر، في بداية المهمّة، ومساحة الأشكال في الرسمة.

1. أ. افحصوا هل تتحقّق كلّ مساواة:

$(2 + 5)^2 \geq 4 \cdot 2 \cdot 5$

$(7 + 3)^2 \geq 4 \cdot 7 \cdot 3$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$

ب. اكتبوا أمثلة إضافيّة للقانونيّة نفسها.

ت. اكتبوا تعميمًا للقانونيّة الّتي تظهر في المتساويات المعطاة.

ث. نبرهن الادّعاء بمساعدة رسمة.

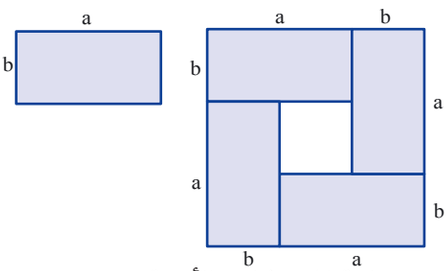
أمامكم رسمة مستطيل أطوال أضلاعه a وَ b.

($a > 0$,$b > 0$ وَ a وَ b وحدات طول).

نضع أربعة مستطيلات بجانب بعضها، كما يظهر في الرسمة.

ما هو الشكل الناتج في أعقاب ترتيب المستطيلات بهذا الشكل؟

اشرحوا.



ج. اكتبوا متباينة تصف الادّعاء: مساحة المربّع الخارجيّ أكبر من مجموع مساحة المستطيلات الأربعة.

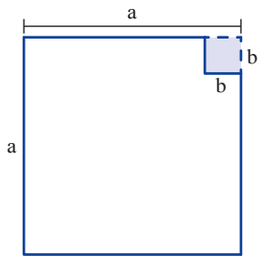
ح. اشرحوا العلاقة بين المتباينة الّتي سجّلتموها في بند ج والتعميم الّذي سجّلتموه في بند ت.

خ. هل تتحقّق المساواة عندما يكون $a = b$؟

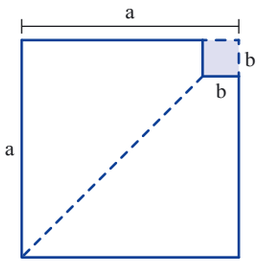
ارسموا رسمة مناسبة، واكتبوا التعميم المناسب.

2. نبرهن، بمساعدة الرسم (بطريقة إضافيّة)، قانون الضرب المختصر $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $(a > b > 0)$.

أ. أعطوا أمثلة مناسبة لهذه المساواة.



ب. أمامكم رسمة مربّع طول ضلعه a، قصّوا منه مربّعًا صغيرًا طول ضلعه b (a وَ b وحدات طول).
أيّ قيم مناسبة لـ a، وأيّ قيم مناسبة لـ b حسب الرسمة؟

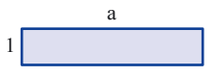


ت. رسموا قُطرًا في الشكل السداسي، كما يظهر في الرسمة.
قال **أمين**: يقسّم القُطر الشكل السداسيّ إلى شكلين متطابقين، كلّ واحد منهما شبه منحرف قائم الزاوية.
اشرحوا قول **أمين**.

ث. عبّروا عن مساحة الشكل السداسيّ الأصليّ، ومساحة كلّ شبه منحرف بمساعدة a وَ b.

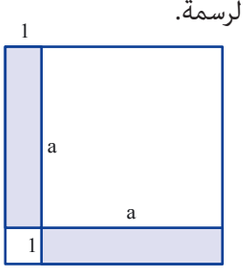
ج. اشرحوا العلاقة بين قانون الضرب المختصر، في بداية المهمّة، ومساحة الأشكال في الرسمة.

3. برهنتم في مجموعة المهام في الدرس السابق الادّعاء: $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$.



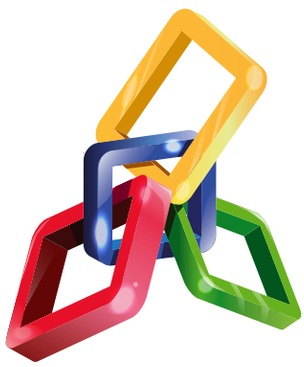
أ. اختاروا أعدادًا موجبة، وبيّنوا أنّ الادّعاء صحيح.

ب. نبرهن هذا الادّعاء بمساعدة رسمة.
أمامكم رسمة مستطيل طول ضلعه a سم $(a > 0)$ ، وطول الضلع الثاني 1 سم.
نضع رؤوس المستطيلين المتساويين الواحد بجانب الآخر، ونُكمل إلى مربّع، كما يظهر في الرسمة.



عبّروا عن مساحة المربّع الخارجيّ، وعن مساحة المستطيلات والمربّعات الداخليّة بمساعدة a وَ b.

ت. اشرحوا العلاقة بين المساواة في افتتاحيّة المهمّة ومساحة الأشكال الرباعيّة في الرسمة.



نحافظ على لياقة رياضيّة

معادلات تربيعية

1. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب. $2x^2 - 5x = 0$

ت. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

ث. $(x + 2)(x - 5) = 0$

ج. $(x - 2)^2 - x(x + 1) = 0$

ح. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

خ. $(x + 6)(2x - 1) = 0$

د. $(x + 4)(x - 2) - x^2 = 0$

2. حلّوا المعادلات، ورتبوا الحروف المناسبة للنتائج على محور الأعداد الذي يظهر أمامكم.:

ל $x^2 + 4x - 5 = 0$

א $(x - 12)(x - 5) = 0$

נ $x^2 + 28 = 11x$

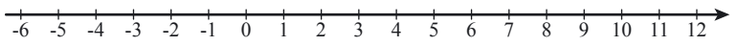
א $\frac{x - 9}{3} = 0$

ק $x \neq 9 \ , \ \frac{3}{x - 9} = 0$

י $x(x^2 - 5x - 24) = 0$

מ $(x + 2)(2x - 22) = 0$

י $x \neq -4 \ , \ \frac{x^2 + 3x - 18}{x + 4} = 0$



3. حلّوا المعادلات.

أ. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$

ب. $(x + 2)^2 = 20 - x^2$

ت. $46 - 5(8 - x) = x^2$

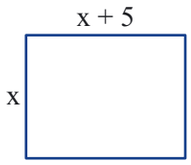
ث. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 10)$

4. اخترت عددًا. أضفت له 4. طرحت 2 من العدد الذي اخترته.
ضربت النتيجتين اللتين حصلت عليهما في المرحلتين السابقتين وحصلت على 72.
ارمزوا إلى العدد الّذي اخترته بالحرف x.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. أيّ عدد اخترت؟ كم إمكانيّة كهذه وجدتم؟ اشرحوا.

5. مساحة المستطيل في الرسمة 374 سنتمترًا مربّعًا.
(أُعدت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$.)



أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. احسبوا أطوال أضلاع المستطيل ومحيطه.

6. طول الضلع الطويل للمستطيل أكبر بـ 3 سم من ضعفيّ طول الضلع القصير.
مساحة المستطيل تساوي 119 سنتمترًا مربّعًا.

أ. أيّ قيم مناسبة لأطوال أضلاع المستطيل؟

ب. جدوا أطوال أضلاع المستطيل.