الوحدة السابعة والعشرون: أنواع مختلفة من المسائل الكلاميّة

الدرس الأوّل: مسائل كلاميّة

متغيّر واحد أم اثنان؟

خرجت مجموعة من المتنزهين مكوّنة من 40 بالغًا في السن وطفلًا في رحلة.
كانت تكلفة الرحلة لجميع الأطفال 640 شاقلًا، وتكلفة الرحلة لجميع كبار السن 1,320 شاقلا.
دفع كلّ واحد من كبار السن 15 شاقلًا أكثر من الطفل أو الطفلة.
كم طفلًا وكم بالغًا في السن خرج في الرحلة؟

نحلّ مسائل بطرق مختلفة.

نتطرّق في المهام 1 - 3 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. طريقة حلّ **أيمن**

رَمَز **أيمن**: x عدد الأطفال ($x < 40$, x عدد طبيعيّ), y تكلفة الرحلة للمشترك/ة بالشواقل ($y > 0$).

أ. انسخوا الجدول وأكملوه.

	عدد المشتركين	التكلفة للمشترك/ة (بالشواقل)	التكلفة الكليّة (بالشواقل)
أطفال	x	y	
كبار السن			

ب. سجّل **أيمن** هيئة المعادلات

$$\begin{cases} xy = 640 \\ (40 - x)(y + 15) = 1320 \end{cases}$$

صفوا كلّ معادلة بالكلمات.

ت. حلّوا هيئة المعادلات، وجدوا عدد الأطفال وعدد كبار السن الّذين اشتركوا في الرحلة.

2. طريقة حلّ **رنا**

رَمَزت **رنا**: x عدد الأطفال ($x < 40$, x عدد طبيعيّ), y عدد كبار السن ($y < 40$, y عدد طبيعيّ).

أ. انسخوا الجدول وأكملوه.

	عدد المشتركين	التكلفة للمشترك/ة (بالشواقل)	التكلفة الكليّة (بالشواقل)
أطفال	x		
كبار السن	y		

ب. سجّلت **رنا** هيئة المعادلات

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \frac{640}{x} + 15 = \frac{1320}{y} \end{cases}$$

صفوا كلّ معادلة بالكلمات.

ت. حلّوا هيئة المعادلات، وجدوا عدد الأطفال وعدد كبار السن الّذين اشتركوا في الرحلة.

3. طريقة حلّ **عماد**

رَمَز **عماد** كالتالي: x عدد الأطفال ($x < 40$, x عدد طبيعيّ).

أ. انسخوا الجدول وأكملوه..

	عدد المشتركين	التكلفة للمشترك/ة (بالشواقل)	التكلفة الكليّة (بالشواقل)
أطفال	x		
كبار السن			

ب. سجّل **عماد** المعادلة $\frac{640}{x}+15=\frac{1320}{40-x}$

صفوا المعادلة بالكلمات.

ت. حلّوا المعادلة، وجدوا عدد الأطفال وعدد كبار السن الّذين اشتركوا في الرحلة.

4. أ. هل طُرق حل **أيمن**، **رنا** و**عماد** صحيحة؟

ب. أيّ طريقة تُفضلون؟ اشرحوا.

للتذكير

يمكن أن نحلّ مسألة كلاميّة بمساعدة معادلة أو بمساعدة هيئة معادلات.

يمكن أن نسجّل قسم من المعادلات بطريقة سهلة، ويمكن أن نحلّ قسم منها بطريقة سهلة.

نحصل في كلّ طريقة حلّ، مسألة كلاميّة، على الإجابة نفسها.

5. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} x+y=8 \\ (x+4)(y-1)=28 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2x+y=10 \\ (x-1)(y-1)=6 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} x \cdot y=8 \\ (x+3)(y+1)=25 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} x-y=6 \\ x(x-3)+y(y-1)=10 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x(x+2)+y(y-2)=3 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x-2y=4 \\ (x-3)(y+5)=18 \end{cases}$

6. اشترت السيدة هند لأولادها 85 دفترًا من نوعين: دفاتر رقيقة ودفاتر سميكة.
الدفتر السميك أغلى بـ 3 شواقل من الدفتر الرقيق.
دفعت السيدة هند 140 شاقلًا مقابل الدفاتر الرقيقة، وَ 350 شاقلًا مقابل الدفاتر السميك.
نرمز بـ x إلى عدد الدفاتر الرقيقة التي اشترتها السيدة هند، ونرمز بـ y إلى عدد الدفاتر السميكة.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. هيئة المعادلات I والمعادلة II مناسبة لوصف المسألة.
صفوا كلّ معادلة بالكلمات.

I. $\begin{cases} x + y = 85 \\ \frac{140}{x} + 3 = \frac{350}{y} \end{cases}$ II. $\frac{140}{x} = \frac{350}{85 - x} - 3$

ت. حلّوا المعادلة أو هيئة المعادلات (في بند ب)، وجدوا:
- كم دفترًا اشترت السيدة هند من كلّ نوع؟
- ما هو سعر الدفتر الرقيق، وما هو سعر الدفتر السميك؟

مجموعة مهامّ

1. يوزع المصنع منتجاته على الدكاكين بواسطة شاحنات كبيرة وشاحنات صغيرة، مجموعها 25 شاحنة.
يمكن أن تحمل الشاحنة الكبيرة 3 أطنان أكثر من الشاحنة الصغيرة.
يمكن أن تحمل جميع الشاحنات الكبيرة 105 أطنان، وجميع الشاحنات الصغيرة 40 طنًا.

أ. كم شاحنة كبيرة، وكم شاحنة صغيرة لدى المصنع؟

ب. كم طنًا يمكن أن تحمل كلّ شاحنة؟

2. بمناسبة قدوم العطلة الصيفيّة، اشتروا في النادي كراسات عمل باللغة الإنجليزيّة وباللغة العربيّة.
عدد كراسات اللغة الإنجليزيّة أكثر بـ 3 من عدد كراسات اللغة العربيّة.
سعر كراس اللغة العربيّة أقلّ بشاقل واحد من سعر كراس اللغة الإنجليزيّة.
كانت تكلفة جميع كراسات اللغة الإنجليزيّة 90 شاقلًا، وكراسات اللغة العربية 60 شاقلا.
كم كراسًا في اللغة الإنجليزيّة، وكم كراسًا في اللغة العربيّة اشتروا في النادي؟

3. طلبت صاحبة قاعة أفراح 60 كغم من التفاح والأجاص لحفلة معيّنة.
سعر كيلوغرام تفاح واحد أقلّ بـ 2.5 شاقل من سعر كيلوغرام أجاص واحد.
كانت التكلفة الكليّة للتفاح 144 شاقلًا، وللأجاص 156 شاقلًا.
كم كيلوغرامًا من كلّ نوع فاكهة اشترت صاحبة قاعة الأفراح؟

4. اشترى تاجر نوعين من البضاعة.
دفع مقابل النوع الأوّل 770 شاقلًا، ودفع مقابل الثاني 700 شاقل.
وزن البضاعة من النوع الأوّل أقلّ بـ 6 كغم من وزن البضاعة من النوع الثاني.
سعر كيلوغرام واحد من النوع الأوّل أغلى بـ 3.5 من النوع الثاني.
كم كيلوغرامًا اشترى من كلّ نوع بضاعة؟

5. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ x^2 - xy = 6 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} y = x - 4 \\ x^2 + 5y = 4 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x^2 + y^2 = 114 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} y = x - 1 \\ xy + y^2 = 55 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x + y = 6 \\ (x + 2)(y - 3) = 4 \end{cases}$

6. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + 2x - y = 33 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} x + y = 30 \\ (x + 2)(y + 3) = 300 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy + y^2 = 24 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x(x + 1) + y(y - 1) = 6 \end{cases}$

7. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 4x^2 + 3y^2 = 45 + 2xy \end{cases}$

ث. $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x^2 - y^2 + 10x = 8 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} xy + 7 = 0 \\ (x + 1)(y - 3) + 32 = 0 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3y^2 - 4x^2 + 5xy = 2 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} xy = 10 \\ (x - 4)(y + 1) = 12 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x^2 + xy = 2y^2 - 32 \end{cases}$

الدرس الثاني: مسائل عامة (تكملة)

قرّر موظفون في مكتب معيّن أن يجمعوا مبلغ 1,500 شاقل لشراء هدية بمناسبة زواج زميلتهم.
غاب 3 موظّفين في اليوم الّذي تمّ فيه جمع النقود.
دفع كلّ واحد من الموجودين 25 شاقلًا إضافيًّا كي يتمكّنوا من شراء الهدية.
نرمز بـ x إلى عدد الموظفين في المكتب، وبـ y إلى المبلغ الأصليّ الّذي أرادوا أن يجمعوه من كلّ موظف/ة (بالشواقل).

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. ماذا يصف كلّ تعبير من التعابير التالية؟

$\frac{1500}{x}$ $\quad xy \quad$ $\frac{1500}{x-3}$ $\quad \frac{1500}{y} \quad$ $\frac{1500}{y+25}$

نحلّ مسائل كلاميّة إضافيّة بمساعدة معادلات.

1. نتطرّق إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. أمامكم معادلات وهيئات معادلات، كلّ واحدة منها مناسبة لوصف المسألة. اشرحوا كلّ معادلة.

I. $\frac{1500}{x}+25=\frac{1500}{x-3}$

II. $\begin{cases} xy = 1500 \\ (x-3)(y+25) = 1500 \end{cases}$

III. $\frac{1500}{y}-3=\frac{1500}{y+25}$

IV. $\begin{cases} xy = 1500 \\ xy = (x-3)(y+25) \end{cases}$

ب. حلّوا معادلة أو هيئة معادلات (من بند أ)، وجدوا عدد الموظفين في المكتب.

2. خطّط تلاميذ الصفّ التاسع أن يجمعوا مبلغ 2,800 شاقل للرحلة السنويّة.
لم يشترك 8 تلاميذ في الرحلة؛ لذا دفع كلّ تلميذ، من التلاميذ المشتركين في الرحلة، 40 شاقلًا أكثر من المخطّط له.

أ. أي قيم يمكن أن تكون مناسبة لعدد التلاميذ في الصف؟ اشرحوا.

ب. سجّلوا معادلة، حلّوا وجدوا عدد تلاميذ الصفّ.

3. طلب صاحب دكان عددًا من الكراسات بمبلغ 600 شاقل.
ارتفع سعر كلّ كراس بـ 0.5 شاقل؛ لذا أرسلت دار النشر عدد كراسات أقلّ باثنين من عدد الكراسات الّتي طلبها صاحب الدكان.

أ. كم كراسًا طلب صاحب الدكان؟

ب. كم كان سعر كلّ كراس قبل الغلاء؟

4. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

أ. $\frac{9}{8-x}=23-2x$ $\quad$ ت. $\frac{6}{x-2}+\frac{9}{x+4}=3$ $\quad$ ج. $\frac{9}{x-8}-\frac{8}{x-7}=1$

ب. $\frac{8}{x}+\frac{11}{x+3}=2$ $\quad$ ث. $\frac{24}{x-4}-\frac{15}{x-1}=1$ $\quad$ ح. $\frac{13}{x-8}-\frac{10}{x+4}=9$

مجموعة مهامّ

1. اشتغل موظف عددًا معيّنًا من الساعات مقابل 600 شاقل.
لو كانت أجرته للساعة الواحدة أكثر بـ 6 شواقل، لاشتغل الموظف 5 ساعات أقلّ مقابل المبلغ نفسه.
كم ساعة عمل الموظف؟

2. اشترى تاجر آلات حاسبة بمبلغ 1,200 شاقل.
باع التاجر 15 آلة حاسبة بربح 8 شواقل لكلّ آلة حاسبة، أمّا باقي الآلات الحاسبة، فقد ربح مقابل كلّ واحد منها 5 شواقل. باع التاجر الآلات الحاسبة الّتي اشتراها بمبلغ 1,445 شاقلًا.
كم آلة حاسبة اشترى التاجر؟

3. طلب تاجر أثاث طاولات بمبلغ 44,000 شاقل. تضررت 5 طاولات خلال نقلها.
باع التاجر كلّ طاولة، من الطاولات الّتي بقيت، بـ 200 شاقل أكثر من سعر الشراء، وربح 6,000 شاقل.
كم طاولة طلب التاجر؟

4. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

أ. $(x+2)(x-3)+x=19$ ت. $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$ ج. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$

ب. $(x+3)^2=2(x+7)$ ث. $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+3}=1$ ح. $\frac{3}{x}-\frac{5}{x-2}=1$

5. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

أ. $\frac{x}{x+4}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-16}$ ت. $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x}$ ج. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+1}{3-x}=\frac{1}{x}$

ب. $\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+1}$ ث. $\frac{x-2}{x+2}=\frac{2x-1}{2x+3}$ ح. $\frac{x}{2x-1}+2x+1=1$

6. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا المعادلات.

أ. $\frac{7}{2x+3}-\frac{x-2}{2x-3}=1$ ت. $\frac{x+3}{x+1}-\frac{x-3}{3x-4}=0$ ج. $\frac{2x-3}{x-5}-\frac{6-5x}{5-x}=2x+1$

ب. $\frac{3}{x-4}+\frac{4}{x-2}=\frac{10}{x}$ ث. $\frac{5x-1}{x-3}+\frac{8x}{3-x}=3-4x$ ح. $\frac{2x+5}{x-2}-\frac{1-2x}{2-x}=\frac{x+5}{3}$

الدرس الثالث: النسب المئويّة

ظهرت اللافتة التالية في شباك عرض دكان ملابس.

20% تخفيض على كل منتج

وُضعت بجانب الملابس بطاقات سُجّلت عليها الأسعار قبل التخفيض، وهي لا تشمل ضريبة القيمة الإضافيّة (18%). سعر القميص بعد التخفيض، بما في ذلك ضريبة القيمة الإضافية هو 94.40 شاقلا.
خمّنوا: أيّ عدد من بين الأعداد التالية يمكن أن يكون السعر المسجّل على البطاقة المجاورة للقميص.

100 شاقل 90 شاقلا 120 شاقلا 96.40 شاقلا

نحلّ مسائل كلاميّة تتناول النسب المئويّة.

إيجاد الكمّيّة الابتدائيّة

1. نتطرّق إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
نرمز بـ x إلى السعر قبل التخفيض، وإضافة ضريبة القيمة الإضافيّة.
أ. أمامكم معادلات، أيّ منها يمكن أن تكون مناسبة لوصف المسألة؟ اشرحوا.

I. $x \cdot 0.8 \cdot 1.18 = 94.40$
II. $x \cdot 0.2 \cdot 0.18 = 94.40$
III. $(x - 0.2x) \cdot 1.18 = 94.40$
IV. $x \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 94.40$
V. $x - 0.2x + 0.18x = 94.40$
VI. $x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{118}{100} = 94.40$

ب. حلّوا إحدى المعادلات المناسبة للمسألة.
ت. كم كان السعر المسجّل على البطاقة المجاورة للقميص؟

للتذكير

- يمكن أن نحسب التخفيض أو الغلاء بطرق مختلفة.
  الطريقة I: نحسب مقدار التخفيض أو مقدار الغلاء، وعندئذٍ نطرحه أو نضيفه إلى السعر الأصليّ.
  الطريقة II: نجد النسبة المئويّة من السعر التي يجب أن ندفعها بعد التغيير، ونحسب قيمة النسبة المئويّة.
- إذا كانت هناك سلسلة من عمليّات التكبير أو التصغير، فيمكن تنفيذ الحسابات في تمرين واحد.
- إذا كانت معطاة الكمّيّة النهائيّة بعد تكبيرين أو تصغيرين بالنسبة المئويّة نفسها، فيمكن الاستعانة بحلّ معادلة.

مثال:

لإيجاد السعر المسجّل على البطاقة، في مهمّة 1، ننفّذ المراحل التالية:

نحدد الكمّيّة الابتدائيّة كمتغيّر،
- السعر الابتدائيّ: x شواقل

نسجّل تعبيرًا جبريًّا "للتكبير" الأول،
- السعر بعد التخفيض بنسبة 20%: $0.8 \cdot x$ شواقل

نسجل تعبيرًا جبريًّا "للتكبير" الثاني،
- السعر بعد إضافة ضريبة القيمة الإضافيّة: $x \cdot 0.8 \cdot 1.18$ شواقل

نسجل معادلة مناسبة ونحلّ
- المعادلة:

$$x \cdot 0.8 \cdot 1.18 = 94.40$$
$$x = 100$$

2. سعر حذاء بعد التخفيض بنسبة 25% ، وبعد إضافة 18% هو 177 شاقلًا.
كم كان السعر الابتدائيّ للحذاء؟

3. حدّدوا، في كلّ بند، "صحيح" أو "غير صحيح". اشرحوا.
أ. إذا ارتفع سعر منتج بنسبة 10% ، وارتفع سعره مرّة أخرى بنسبة 10%، فسيكون سعره كسعر المنتج بعد الغلاء بنسبة 20%.
ب. إذا ارتفع سعر منتج بنسبة 20% ، وانخفض سعره بعد ذلك بنسبة 20% ، فلا يتغيّر سعره.
ب. إذا ارتفع سعر منتج بنسبة 10%، وارتفع سعره مرة أخرى بنسبة 20% ، فسيكون سعره كسعر المنتج بعد الغلاء بنسبة 20% وغلاء إضافي بنسبة 10%.

إيجاد النسبة المئويّة

4. معطى كتاب سعره 50 شاقلًا، ارتفع سعره بنسبة مئويّة معيّنة.
في أسبوع الكتاب، تمّ تخفيض سعر الكتاب بنفس النسبة المئويّة للغلاء الّتي كانت قبل أسبوع الكتاب، ونتيجة لذلك، تمّ بيعه بسعر 42 شاقلًا.
نرمز بـ x إلى الغلاء بالنسبة المئويّة، وإلى التخفيض بالنسبة المئويّة ($x > 0$).
أ. اشرحوا لماذا المعادلة المناسبة لوصف المسألة هي $50\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=42$ ؟
ب. حلّوا المعادلة، وجدوا النسبة المئويّة للغلاء، والنسبة المئويّة للتخفيض.

5. معطى كرسي سعره 800 شاقل، ارتفع سعره مرّتين بالنسبة المئويّة نفسها، ونتيجة لذلك كان سعره 968 شاقلا.
نرمز بـ x إلى الغلاء بالنسبة المئويّة، في كلّ مرة ($x > 0$).
أ. اكتبوا معادلة مناسبة "للقصة" وحلّوها.
ب. أمامكم ثلاثة حلول.

حلّت **هيام** كالتالي:

$800\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=968$

$800\cdot\left(1+\frac{x}{50}+\frac{x^2}{10000}\right)=968$

$800+16x+\frac{2x^2}{25}=968\ /\ -968$

$16x+\frac{2x^2}{25}-168=0\ /\cdot\frac{25}{2}$

$x^2+200x-2100=0$

الحلّ $x=10$ أو $x=-210$
(الحلّ $x=-210$ غير مناسب
لأنّ $x>0$)
لذا $x=10$

حلّ **حسام** كالتالي:

$800\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=968\ /:800$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=1.21$

$1+\frac{x}{100}=1.1$

أو $1+\frac{x}{100}=-1.1$

(المعادلة $1+\frac{x}{100}=-1.1$
غير مناسبة
لأنّ $x>0$)

الحلّ: $x=10$

حلّ **وسام** كالتالي:

رمزت: $y=1+\frac{x}{100}$ $(y>0)$

المعادلة: $800\cdot y^2=968$

$y^2=1.21$

$y=1.1$ أو $y=-1.1$

(الحلّ $y=-1.1$ غير مناسب، لأنّ $y>0$)

لذا: $1+\frac{x}{100}=1.1$

$x=10$

تناقشوا حول حلول **هيام، حسام ووسام**. أيّ حلّ تفضلون؟ اشرحوا.

إذا كانت معطاة الكمّيّة الابتدائيّة، والكمّيّة بعد تكبيرين أو تصغيرين بالنسبة المئويّة نفسها، فيمكن إيجاد القيمة المناسبة للنسبة المئويّة بعدّة طرق.

مثال: في المهمّة 5:

طريقة I: حسب طريقة حلّ **هيام** - نبسّط المعادلة حسب قوانين الضرب ونحلّ.

طريقة II: حسب طريقة حلّ **حسام** - نستعين بالعمليّات على الأطراف ونحلّ.

طريقة III: حسب طريقة حلّ **وسام** - نعرض النسبة المئويّة لسعر الدفع بعد الغلاء كمتغيّر جديد $y=1+\frac{x}{100}$ ، ونجد قيمة y بواسطة حلّ المعادلة التربيعيّة المناسبة ونحسب x.

6. سعر دفتر 10 شواقل.
ارتفع سعره، في بداية الشهر، بنسبة مئويّة معيّنة.
في نهاية الشهر، ارتفع سعر الدفتر، مرّة أخرى، بالنسبة المئويّة نفسها، وقد تمّ بيعه بسعر 12.10 شاقلًا.
بكم نسبة مئويّة ارتفع سعر الدفتر في كلّ مرة؟

مجموعة مهامّ

1. حصل عمال مصنع على علاوة في راتبهم بنسبة 2%.
بعد مرور سنة، حصل العمال على علاوة أخرى بنسبة 3%.
احسبوا، في كلّ بند، كم كان الراتب قبل العلاوتين؟

أ. حصل **أسعد** على راتب 10,506 شاقل بعد العلاوتين.

ب. حصل **أيوب** على راتب 8,930.10 شاقلًا بعد العلاوتين.

ب. حصل **مازن** على راتب 5,253 شاقلًا بعد العلاوتين.

2. بمناسبة نهاية الموسم، أعلنت شركة ملابس عن تخفيض بنسبة 10% على السعر المسجّل، وحصل الأعضاء المنتسبين للشركة على تخفيض إضافيّ بنسبة 10% على سائر الملابس.
رهام عضو في هذه الشركة، وقد اشترت في نهاية الموسم ثلاثة أغراض، ودفعت الأسعار التالية.
سُجّل، في كلّ بند، المبلغ الّذي دفعته **رهام**.
احسبوا السعر الابتدائيّ لكلّ غرض.

أ. تنورة: 162 شاقلا. ب. قميص: 48.60 شاقلا. ت. جارزة: 121.50 شاقلا.

3. سعر مكيف 2,000 شاقل، ارتفع سعره بنسبة معيّنة.
انخفض سعره، في نهاية الموسم، بالنسبة المئويّة نفسها الّتي ارتفع بها سعره، وعندئذٍ تمّ بيعه بمبلغ 1,980 شاقلًا.
أ. ارمزوا بـ x إلى الغلاء بالنسبة المئويّة وإلى التخفيض بالنسبة المئويّة ($x > 0$)، وسجّلوا معادلة مناسبة.
ب. حلّوا المعادلة، وجدوا النسبة المئويّة.

4. سعر كتاب 100 شاقل، ارتفع سعره مرّتين، الواحدة تلو الأخرى بـ $x\%$ ($x > 0$)، وقد تمّ بيعه بمبلغ 121 شاقلا.
بكم نسبة مئويّة ارتفع سعره في كلّ مرّة؟

5. سعر حقيبة 80 شاقلًا، ارتفع سعرها مرّتين، الواحدة تلو الأخرى، وقد تمّ بيعها بمبلغ 88.20 شاقلًا.
بكم نسبة مئويّة ارتفع سعرها في كلّ مرّة؟

6. سعر طاولة4,000 شاقل، ارتفع سعرها مرّتين، الواحدة تلو الأخرى، وقد تمّ بيعها بمبلغ 4,410 شاقلا.
بكم نسبة مئويّة ارتفع سعرها كلّ مرّة؟

7. سعر كتاب 50 شاقلًا، انخفض سعره مرّتين، الواحدة تلو الأخرى بـ $x\%$ ($x > 0$) ، وقد تمّ بيعه بمبلغ 40.50 شاقلا.
بكم نسبة مئويّة انخفض سعره كلّ مرّة؟

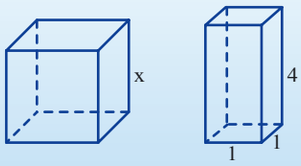
8. سعر بضاعة 2,500 شاقل، تمّ بيعها بعد تخفيض سعرها مرّتين بالنسبة المئويّة نفسها بمبلغ 1,600 شاقل.
بكم نسبة مئويّة انخفض سعرها كلّ مرّة؟

9. سعر ماكينة 20,000 شاقل.
بعد تخفيض قيمة سعر الماكينة مرّتين، كلّ مرّة بنسبة مئويّة مقدارها $x\%$، أصبح سعرها أكبر من 16,200 شاقل.
ماذا يمكن أن تكون قيمة x؟

10. اشرحوا لماذا هنالك حلان حقيقيان لكلّ قيمة m للمعادلة $x^2 + 4x = m^2 - 2mx$؟

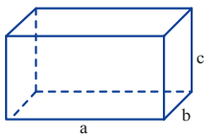
الدرس الرابع: مكعّب وصندوق

أمامكم صندوق قاعدته مربّعة الشكل، ومكعّب.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$).
ماذا يجب أن يكون طول ضلع المكعّب كي:
أ. يكون حجمه ضعفيْ حجم الصندوق؟
ب. تكون مساحة سطحه الخارجي ضعفي مساحة السطح الخارجي للصندوق؟



نحلّ مسائل تتناول حجم ومساحة السطح الخارجيّ للصناديق والمكعّبات.

للتذكير

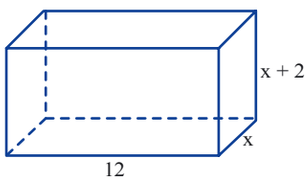


معطى صندوق.
($a > 0, b > 0, c > 0$، أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

- حجم الصندوق $a \cdot b \cdot c$ سنتمترًا مكعّبًا.
- مساحة السطح الخارجيّ للصندوق $2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ سنتمتر مربّع.

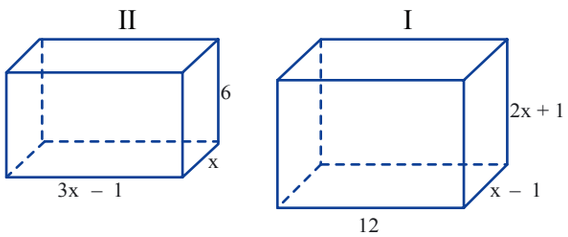
أُعِدّت الرسومات في مهامّ الدرس، وفي مجموعة المهام للتوضيح، وتمثّل الأعداد والتعابير الجبريّة قياسات الطول بالسم.

1. أمامكم رسمة صندوق ($x > 0$).
جدوا، في كلّ بند، قيمة x ، وسجّلوا أطوال أضلاع الصندوق.
افحصوا هل إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة؟



أ. حجم الصندوق 576 سنتمترًا مكعّبًا.
ب. مساحة السطح الخارجي للصندوق 768 سنتمترًا مربّعًا.
ما هو الصندوق الناتج؟

2. أمامكم صندوقان ($x > 1$).
أ. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لحجم كلّ صندوق.
ب. مجموع حجميِّ الصندوقين هو 948 سنتمترًا مكعّبًا.سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
ما هي قياسات كلّ صندوق؟
افحصوا هل إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة؟
ت. أيّ صندوق مساحة سطحه الخارجي أكبر؟ وبكم؟

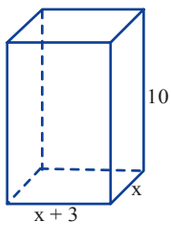


نفكّر بـ ...

3. أمامكم رسمة صندوق حجمه أصغر من 400 سنتمتر مكعّب.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب معطيات السؤال؟ اشرحوا.

ب. ماذا يمكن أن تكون قيمة x؟ اشرحوا.



نحلّ مسألة كلاميّة بمساعدة متباينة جبريّة حسب المراحل التالية:

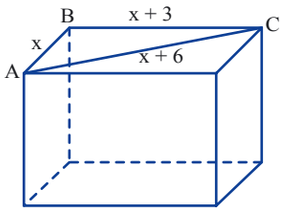
- نسجّل الشروط المحدّدة.
- نحلّ المتباينة.
- نفحص هل تُحقّق الأعداد الناتجة الشروط المحدّدة؟
- نسجّل حلّ المسألة.

مثال: نتجت، في المهمّة 3 ، المتباينة $10x(x + 3) < 400$ الّتي حلّها $-8 < x < 5$

الشروط المحدّدة للمتغير $x > 0$

لذا حلّ المسألة هو $0 < x < 5$ ، هذا يعني أنّ الحلّ هو كلّ الأعداد الأكبر من 0 والأصغر من 5.

4. أمامكم رسمة صندوق $(x > 0)$.



أ. اشرحوا لماذا ΔABC هو مثلّث قائم الزاوية؟

ب. احسبوا قيمة x.

افحصوا هل إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة؟

ت. ماذا يمكن أن يكون طول ارتفاع الصندوق، إذا:

- كان جم الصندوق أكبر من 540 سنتمترًا مكعّبًا؟
- كانت مساحة السطح الخارجيّ للصندوق أكبر من 510 سنتمترات مربّعة؟

5. حلّوا المعادلات.

أ. $(3x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 26$

ب. $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2 = 24$

ت. $(3x + 1)^2 = (x - 1)^2$

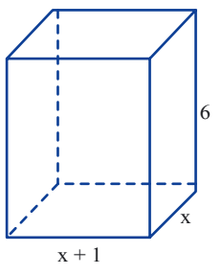
ث. $(x - 4)^2 + 24 = (x + 2)(2x - 1)$

ج. $(2x + 3)^2 + (x + 4)^2 = 25$

ح. $(2x + 3)^2 = (x + 4)^2 - 8$

مجموعة مهامّ

1. أمامكم رسمة صندوق.

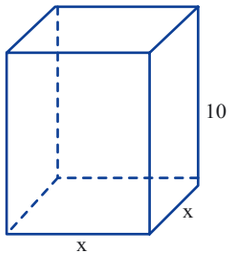


أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. حجم الصندوق 72 سنتمترًا مكعّبًا.
جدوا قيمة x، وسجّلوا أطوال أضلاع الصندوق.
افحصوا هل إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة؟

ت. احسبوا مساحة السطح الخارجيّ للصندوق.

2. أمامكم رسمة صندوق قاعدته مربّعة الشكل.



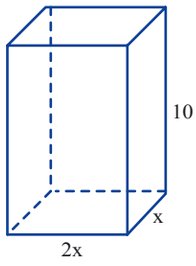
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة السطح الخارجيّ للصندوق.

ت. مساحة السطح الخارجيّ للصندوق هي 250 سنتمترًا مربّعًا.
سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
ما هي قيمة x؟

ث. احسبوا حجم الصندوق.

3. مساحة السطح الخارجيّ للصندوق الّذي أمامكم هي 1,000 سنتمترًا مربّعًا.



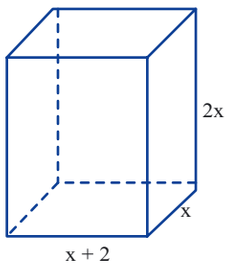
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

ب. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة السطح الخارجيّ للصندوق.

ت. سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها.
ما هي قيمة x؟ اشرحوا.

ث. احسبوا حجم الصندوق.

4. مساحة السطح الخارجيّ للصندوق الّذي أمامكم أصغر من 208 سنتمترات مربّعة.



أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

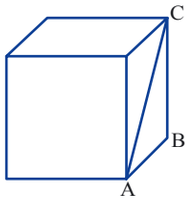
ب. ماذا يمكن أن تكون قيمة x؟ اشرحوا.

5. طول قُطر سطح المكعّب هو 12 سم.

أ. احسبوا طول ضلع المكعّب،
واستعينوا برسمة ΔABC.

ب. احسبوا حجم المكعّب.

ت. احسبوا مساحة السطح الخارجيّ للمكعّب.



6. حلّوا المعادلات.

أ. $2x - 16 + (x + 4)^2 = x + 10$

ب. $(2x - 1)^2 = (x + 7)^2 + 72$

ت. $(x + 1)^2 = x + 13$

ث. $2x(x + 2) + 3(x - 3) = 0$

ج. $(2x + 1)^2 = x(x + 8)$

ح. $2x^2 + (x - 3)^2 = 9$

7. حلّوا المعادلات.

أ. $(x - 4)^2 = 3(x + 2)(2x - 1)$

ب. $(x - 3)^2 = 10 + 2(x + 2)(x - 10)$

ت. $(2x + 5)^2 = x + 12 + (x + 5)^2$

ث. $(2x - 7)^2 - (x + 3)^2 = 100 - x^2$

ج. $(2x - 5)^2 + 3(x + 7)^2 = (x - 10)^2$

ح. $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = 25$

8. حلّوا المعادلات.

أ. $(4x - 1)(x + 2) + 2 = (x - 2)^2$

ب. $(3x - 2)^2 + x + 1 = (2x - 3)^2$

ت. $3(x - 2)^2 + 2(x + 3) = 50$

ث. $x^2 + (x - 8)^2 = (3x - 1)(x - 5) + 10$

ج. $(x - 6)(2x - 11) = (3x - 10)(x - 1)$

ح. $5(x + 2) + 8(x - 1) = 2(x + 2)(x - 1)$

9. كبّروا طول ضلع مكعّب بنسبة 20%.

أ. بكم نسبة مئويّة ازداد حجم المكعّب؟

ب. بكم نسبة مئويّة ازدادت مساحة السطح الخارجيّ للمكعّب؟

الدرس الخامس: مسافة التوقّف

مهمّة في التنوّر الرياضيّ

مسافة توقّف السيّارة، هي المسافة الّتي تقطعها السيّارة منذ لحظة تمييز الخطر وحتّى وقوفها التام.
تصف الدالّة f(x) مسافة توقف (بالأمتار)

سيّارة تسير بسرعة x كم في الساعة ($x \geq 0$): $f(x)=\frac{(x+10)^2}{25}-4$

سار **عمّار** بسرعة 50 كم في الساعة، وسار **يوسف** بسرعة 30 كم في الساعة.
خمّنوا: من منهما مسافة توقف سيارته أكبر؟

نبحث مسافة توقّف السفر بسرعات مختلفة.

نتطرّق في المهام 1 - 5 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. احسبوا مسافة توقف **عمّار** ومسافة توقف **يوسف**، ثمّ افحصوا تخمينكم.

2. أ. سرعة سفر **أمين** هي 100 كم في الساعة. ما هي مسافة توقف سيّارته؟
ب. سرعة سفر **أمين** ضعفي سرعة **عمار**.
كم ضعفًا مسافة توقّف سيّارة **أمين** أكبر من مسافة توقّف **عمّار**؟

3. تسير سائقة بسرعة 40 كم في الساعة، رأت خطرًا على بُعد 60 مترًا.
هل تستطيع أن توقف سيّارتها قبل الخطر؟ اشرحوا.

4. أ. في أيّ سرعة يجب أن نسير كي نستطيع أن نوقف السيّارة قبل خطر موجود على بُعد 32 مترًا عن النقطة التي ميّزنا فيها الخطر؟ (سجّلوا معادلة مناسبة وحلّوها).
ب. في أيّ سرعة يجب أن نسير كي نستطيع أن نوقف السيّارة قبل خطر موجود على بُعد117 مترًا أمامنا؟
ت. في أيّ سرعة يجب أن نسير كي نستطيع أن نوقف السيّارة قبل إشارة ضوئيّة موجودة على بُعد 60 مترًا أمامنا؟

5. أ. ارسموا هيئة محاور مناسبة، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة.
(محور x: كلّ تربيعة 5 كم في الساعة، محور y: كلّ تربيعة 10 أمتار).
ما هو شكل الخطّ البيانيّ؟ اشرحوا.
ب. استعينوا بالخطّ البيانيّ، وافحصوا هل يمكن أن تحدُث الإمكانيّات التالية:
- عندما تكبر السرعة ضعفين، تكبر مسافة التوقف ضعفين أيضًا.
- عندما تكبر السرعة3 أضعاف، تكبر مسافة التوقف أكثر من 3 أضعاف.

مسافة ردّ الفعل هي المسافة الّتي تقطعها السيّارة منذ أن رأى السائق خطرًا حتّى قرّر تنفيذ عمليّة معيّنة (مثلًا: الانحراف عن الخطر، الضغط على الفرامل). يستغرق زمن ردّ الفعل عند السائق حوالي $\frac{3}{4}$ الثانية، وتستمرّ السيّارة في تلك اللحظة، السير بسرعتها الأصليّة الّتي كانت قبل رد الفعل. بيّنت أبحاث إنجليزيّة أنّ قيادة السيّارة بعد تناول الكحول تؤدّي إلى ازدياد زمن ردّ الفعل بنسبة 15%، وأنّ استعمال السماعة خلال السفر يؤدّي إلى ازدياد زمن رد الفعل بنسبة 30%، أمّا استعمال الهاتف الخليوي باليد خلال السفر، فإنّه يؤدّي إلى ازدياد زمن رد الفعل بنسبة 50%.

6. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الّتي تحقّق $f(x) = g(x)$.

أ. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، $g(x) = 12 - 4x$

ت. $f(x) = (x - 5)(x - 2)$ ، $g(x) = 10$

ج. $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3$ ، $g(x) = 4x + 23$

ب. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، $g(x) = -x^2 + 6x - 9$

ث. $f(x) = (x - 5)(x - 2)$ ، $g(x) = 2x^2 - 5x + 7$

ح. $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3$ ، $g(x) = (x - 3)(x + 1)$

مجموعة مهامّ

1. معطى دالتان: $f(x)=\frac{(x+10)^2}{25}-4$ ، $g(x)=\frac{(x+5)^2}{20}-6$ في المجال $x \geq 0$.

تصف الدالّة $f(x)$ مسافة التوقف (بالأمتار) لسيّارة تسير بسرعة مقدارها x كم في الساعة.

تصف الدالّة $g(x)$ مسافة التوقف (بالأمتار) لشاحنة تسير بسرعة مقدارها x كم في الساعة.

أ. صعدت سيّارة وشاحنة من طرفيْ جسر له مسار سفر واحد، وهما تبعدان عن بعضهما 60 متراً.
تسير السيّارة بسرعة 20 كم في الساعة، والشاحنة بسرعة 25 كم في الساعة.
هل يمكن أن يقفا قبل أن يصطدما؟ اشرحوا.

ب. في أيّ سرعة تساوي مسافة توقّف السيّارة مسافة توقّف الشاحنة؟

ت. في أيّ سرعات تكون مسافة توقّف الشاحنة أكبر من مسافة توقّف السيّارة؟ اشرحوا.

2. معطاة الدالّة: $f(x) = (x - 5)^2 - 4$

أ. احسبوا: $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f(8)$

ب. ما هي قيمة x إذا كان $f(x) = 0$؟ إذا كان $f(x) = 12$؟

ت. في أيّ مجال الدالّة تصاعديّة؟

ث. في أيّ مجال الدالّة موجبة؟

3. معطى دالتان: $f(x) = x^2 - 6x$ ، $g(x) = 8 - x^2$

أ. انسخوا، وأكملوا إشارة ترتيب مناسبة.

$g(0) \quad \bigcirc \quad f(0)$ ، $g(1) \quad \bigcirc \quad f(1)$ ، $g(3) \quad \bigcirc \quad f(3)$ ، $g(5) \quad \bigcirc \quad f(5)$

ب. جدوا إحداثيّات النقاط الّتي تحقّق $f(x) = g(x)$.

4. معطى دالتان: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

أ. انسخوا، وأكملوا إشارة ترتيب مناسبة.

$f(0) \bigcirc g(0)$ $f(2) \bigcirc g(2)$ $f(3) \bigcirc g(3)$ $f(-1) \bigcirc g(-1)$

ب. جدوا إحداثيّات النقاط الّتي تحقّق $f(x) = g(x)$.

5. معطى دالتان: $f(x) = x^2 + 4x - 5$ $g(x) = -x^2 + 6x - 8$

أ. انسخوا، وأكملوا إشارة ترتيب مناسبة.

$f(0) \bigcirc g(0)$ $f(1) \bigcirc g(1)$ $f(3) \bigcirc g(3)$ $f(-1) \bigcirc g(-1)$

ب. هل يتحقّق $f(x) = g(x)$؟ اشرحوا.

6. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الّتي تحقّق $f(x) = g(x)$.

أ. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $g(x) = 8 - x$

ب. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $g(x) = -x^2 - 6x + 16$

ت. $f(x) = (x - 1)(x - 6)$, $g(x) = x + 6$

ث. $f(x) = (x - 1)(x - 6)$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 10$

ج. $f(x) = (x + 1)^2 + 4$, $g(x) = 2x + 1$

ح. $f(x) = (x + 1)^2 + 4$, $g(x) = (x - 3)(x + 1)$

7. معطى دالتان: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $g(x) = 2(x + 4)(x - 1)$

جدوا، في كلّ بند، قيمًا مناسبة لـ x.

أ. $f(x) > 0$ ب. $g(x) > 0$ ت. $f(x) = g(x)$ ث. $f(x) > g(x)$

ج. $f(x) < 3$ ح. $g(x) < 12$ خ. $f(x) > 8$ د. $g(x) > -8$

8. معطى ثلاث دوال: $f(x) = -x^2 + x + 12$ $g(x) = x^2 + 2x - 3$ $h(x) = 1.5x + 4.5$

جدوا، في كلّ بند، قيمًا مناسبة لـ x.

أ. $f(x) = g(x)$ ب. $f(x) = h(x)$ ت. $g(x) = h(x)$

تعابير، معادات ودوال

1. بسّطوا التعابير.

أ. $x(x + 8) - 2(4x + 1)$

ب. $(x + 3)^2 - 6x - 9$

ت. $x(x + 4) - 4x - 3x^2$

ث. $x^2 + x(x + 3)$

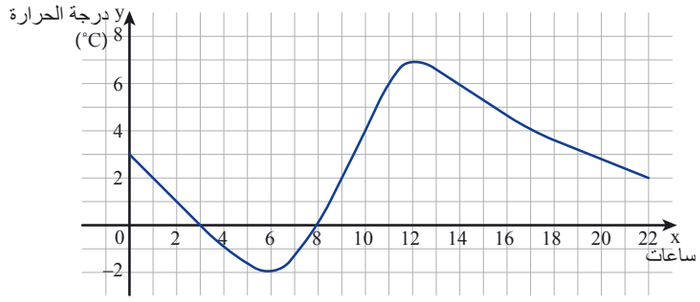
ج. $(x + 1)(x + 2) - 2x^2 - 3x$

ح. $(x + 2)^2 + (x + 3)^2$

خ. $2x(x - 2) - 4(x - 2)$

د. $x(x - 1) + x(x + 2)$

2. أمامكم رسم بيانيّ يصف تغيّرات درجة الحرارة بدرجات مئوية (°C) ، وقد تمّ قياسها في مدينة القدس، في يوم بارد.



أ. كم كانت درجة الحرارة عند الساعة الـ 4؟ الساعة الـ 11؟ الساعة الـ17؟

ب. في أي ساعات تمّ قياس درجة الحرارة 2°C؟

ت. في أي ساعة تمّ قياس أعلى درجة حرارة؟ كم كانت درجة الحرارة؟

ث. في أي ساعة تمّ قياس أقلّ درجة حرارة؟ كم كانت درجة الحرارة؟

ج. كم كانت درجة الحرارة عندما بدأوا القياس؟

ح. في أي ساعات تمّ قياس درجة الحرارة 0°C؟

خ. بين أيّ ساعات تمّ قياس درجة حرارة موجبة؟ بين أيّ ساعات تمّ قياس درجة حرارة سالبة؟

د. تقع النقطة (19, 3) على الخط البياني للدالة. اشرحوا معناها.

ذ. بين أيّ ساعات ارتفعت درجة الحرارة؟ بين أيّ ساعات انخفضت درجة الحرارة؟

3. حلّوا المعادلات.

أ. $(x - 6)(x + 6) = 0$

ب. $(16 - x^2)x = 0$

ت. $3x^2 + 6 = 0$

ث. $x^2 - 6x - 7 = 0$

ج. $(4x - 1)^2 = 0$

ح. $x^2 - 11x + 30 = 0$

4. معطاة الدالّة $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

أ. احسبوا $f(0)$ وَ $f(1)$ وَ $f(-1)$؟

ب. ما هي قيمة x إذا كان $f(x) = 0$؟ إذا كان $f(x) = 1$؟

5. معطاة الدالّة $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

في أيّ مجال يتحقق أ. $f(x) > 0$؟ ب. $f(x) < 0$؟ ت. $f(x) < 3$؟