الوحدة السادسة والعشرون: معادلات تربيعيّة ومسائل كلاميّة

الدرس الأوّل: معادلات تربيعيّة مع مقامات

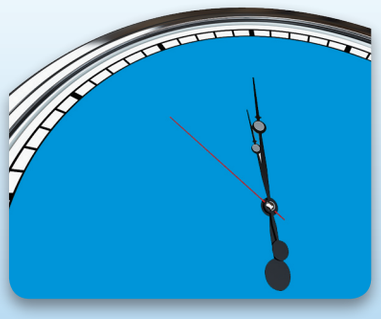
معطاة المعادلة $\frac{x^2+5x+6}{x+3}=3$

جدوا مجال تعويض المعادلة، وحلّوها.

قال **سامر**: هذه المعادلة لها حلّان $x=1$, $x=-3$.

قال **جمال**: هذه المعادلة لها حلّ واحد $x=1$.

من منهما قوله صحيح؟ اشرحوا.



نحلّ معادلات مع مقامات.

1. حلّوا المعادلات التالية. انتبهوا إلى مجال التعويض.

مثال: نحلّ المعادلة $\frac{x^2-15x+26}{x-2}=-11$ ، مجال التعويض $x\neq 2$

الطريقة أ: نضرب في المقام، ونحصل على:

$$x^2-15x+26=-11(x-2)$$
$$x^2-15x+26=-11x+22\ /\ +11x-22$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

الطريقة ب: نحلّل إلى عوامل، ونحصل على:

$$\frac{(x-13)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=-11$$
$$x-13=-11\ /\ +13$$
$$x=2$$

حصلنا في الطريقتين على $x=2$، لكن $x=2$ لا يقع في مجال التعويض؛ لذا لا يوجد حلّ للمعادلة.

أ. $\frac{2x^2-5x+3}{x-1}=0$

ب. $\frac{(x-3)^2-4}{x+1}=0$

ت. $\frac{x^2+5x-36}{x+9}=0$

ث. $\frac{(x+4)(x+1)}{x+5}=0$

ج. $\frac{x^2-3x+10}{x-4}=0$

ح. $\frac{x^2-3x}{x-3}=2$

خ. $\frac{x^2+4x}{x+4}=-2$

د. $\frac{x^2+16x}{x+1}=12$

ذ. $\frac{x(x-3)-1}{x-2}=3$

2. طلب صاحب دكان أثاث كراسي من مصنع بمبلغ 9,000 شاقل.

أ. هل يمكن أن يكون سعر الكرسي 150 شاقلًا؟ إذا كانت الإجابة نعم، كم كرسيًّا طلب؟ إذا كانت الإجابة لا، اشرحوا لماذا.

ب. هل يمكن أن يكون سعر الكرسي 144 شاقلًا؟ إذا كانت الإجابة نعم، كم كرسيًّا طلب؟ إذا كانت الإجابة لا، اشرحوا لماذا.

ت. أيّ قيم مناسبة لعدد الكراسي؟ أيّ قيم مناسبة لسعر الكرسي؟ اشرحوا.

ث. بما أنّ سعر كلّ كرسي ارتفع بـ 5 شواقل، فقد أرسل المصنع، مقابل المبلغ ذاته، 3 كراسي أقلّ من عدد الكراسي الّتي طلبها صاحب الدكان.

كم كرسيًّا طلب صاحب الدكان قبل ارتفاع الأسعار؟

ما هو سعر الكرسي بعد الغلاء؟

3. سجّلوا، في كلّ بند، مجال تعويض المعادلة، وحلّوا.

أ. $\frac{x-6}{3x-10}=\frac{x-1}{2x-11}$ ب. $\frac{3x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$ ت. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$

مجموعة مهامّ

1. سجّلوا، في كلّ بند، مجال تعويض المعادلة، وحلّوا.

أ. $\frac{x^2-5x}{x-5}=0$ ت. $\frac{x^2-5x}{x-5}=5$ ج. $\frac{x^2+6x}{2x}=0$

ب. $\frac{x^2-5x}{x-5}=3$ ث. $\frac{x^2+6x}{2x}=8$ ح. $\frac{x^2+6x}{2x}=3$

2. سجّلوا، في كلّ بند، مجال تعويض المعادلة، وحلّوا.

أ. $\frac{2x^2-7x}{x}=1$ ت. $\frac{x(x+2)-3}{x-1}=5$ ج. $\frac{x^2-3x+10}{2x-4}=\frac{1}{2}$

ب. $\frac{3x^2-6x}{x-2}=12$ ث. $\frac{x(x-9)+20}{x-4}=1$ ح. $\frac{x^2+9x+8}{x}=3$

3. سجّلوا، في كلّ بند، مجال تعويض المعادلة، وحلّوا.

أ. $\frac{2x^2-4x-3}{x}=1$ ت. $\frac{x(x+1)-12}{x-2}=0$ ج. $\frac{2x^2-5x-3}{2x-6}=\frac{1}{2}$

ب. $\frac{x(2x-1)-10}{x+2}=0$ ث. $\frac{(x-4)^2-x+4}{x-4}=0$ ح. $\frac{(x-5)^2-4}{x-3}=2$

4. تنظمت مجموعة أطفال لشراء كرة قدم.
سعر الكرة 120 شاقلًا، وقد تقاسم الأطفال السعر بالتساوي.
انضم، في اللحظة الأخيرة، 5 أطفال؛ لذا دفع كلّ واحد منهم شاقلين أقلّ من المبلغ المخطّط له.
كم طفلًا كان في المجموعة، في البداية؟

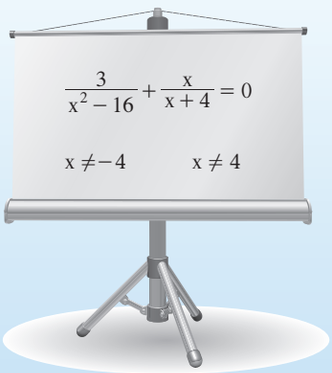
5. اشترت السيدة كريمة، بمناسبة العيد، 12 قنينة من العصير: عصير برتقال وعصير رمان.
سعر قنينة عصير البرتقال أقلّ بشاقلين من سعر قنينة الرمان.
دفعت السيدة كريمة مقابل عصير الرمان 60 شاقلًا، ومقابل عصير البرتقال 70 شاقلا.
أ. كم قنينة اشترت السيدة كريمة من كلّ نوع؟
ب. ما هو سعر قنينة عصير الرمان؟
وما هو سعر قنينة عصير البرتقال؟

6. اشترى تاجر قماشًا بمبلغ 1,500 شاقل.
أخذ 4 أمتار لذاته، وباع ما تبقى من القماش.
باع التاجر كلّ متر بسعر أعلى بـ 10 شواقل من السعر الّذي دفعه.
المبلغ الّذي حصل عليه هو 1,560 شاقلًا.
أ. كم مترًا من القماش اشترى؟
ب. بأيّ سعر باع المتر الواحد؟

تصوير: عميت فرندلندر

الدرس الأوّل: معادلات تربيعيّة مع مقامات (تكملة)

معطاة المعادلة $\frac{3}{x^2-16}+\frac{x}{x+4}=0$ ، مجال التعويض $x \neq 4,\ x \neq -4$



ضرب **نعيم** الطرفين في المقام المشترك $(x^2-16)\cdot(x+4)$.
حاولوا أن تحلّوا بطريقة **نعيم**. هل توصلتم إلى حلّ؟

حلّل **جمال** المقام إلى عوامل بمساعدة قانون الضرب المختصر.
سجّل المعادلة كالتالي: $\frac{3}{(x-4)(x+4)}+\frac{x}{x+4}=0$
وعندئذٍ ضرب طرفيِّ المعادلة في المقام المشترك $(x-4)\cdot(x+4)$
استمرّوا في حلّ **جمال**.
كم حلًّا يوجد للمعادلة المعطاة؟ افحصوا هل تقع الأعداد في مجال التعويض؟

نستعين بالتحليل إلى عوامل كي نختار المقام المشترك.

1. سجّلوا، في كلّ بند، مجال تعويض المعادلة وحلّوا.

مثال:

معطاة المعادلة $\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\frac{x}{2x+6}$

نحلّل كلّ مقام إلى عوامل $\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{x}{2(x+3)}$

مجال تعويض المعادلة هو $x \neq 1,\ x \neq -3$

نختزل $\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+3)}=\frac{x}{2(x+3)}$

نحصل على $\frac{1}{x+3}=\frac{x}{2(x+3)}$

نضرب في المقام المشترك $2\cdot(x+3)$ / $\frac{1}{x+3}=\frac{x}{2(x+3)}$

ونحصل على حلّ المعادلة $x = 2$. يقع الحلّ في مجال التعويض.

أ. $\frac{14}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=1$

ب. $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{x}{x-2}$

ت. $\frac{5}{x^2-2x+1}-\frac{3}{x-1}=2$

ث. $\frac{2x+1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$

ج. $\frac{5}{4x^2-9}-\frac{1}{2x-3}=0$

ح. $\frac{2}{x^2-6x+9}=3-\frac{x}{x-3}$

خ. $\frac{1}{x-5}-\frac{5}{3(x+5)}=\frac{8}{x^2-25}$

د. $\frac{x^2-4}{x+2}+3x=x^2-14$

2. معطاة المعادلة $\frac{5}{x}+\frac{3}{x-2}=\frac{1}{2-x}$ $(x \neq 0,\ x \neq 2)$.

أ. حلّوا المعادلة. انتبهوا إلى مجال التعويض.

ب. سجّلت **سلوى** المعادلة كالتالي: $\frac{5}{x}-\frac{3}{2-x}=\frac{1}{2-x}$

اشرحوا لماذا التعبيرين $\frac{3}{x-2}$ وَ $-\frac{3}{2-x}$ متساويين؟

استمرّوا في حلّ **سلوى**. قارنوا مع الحلّ الّذي حصلتم عليه في بند أ.

تمييز قالب

3. حلّوا المعادلة $x^2-2x-8=0$.

استعينوا بحلّ المعادلة، وجدوا حلول المعادلات التالية:

إرشاد: جدوا علاقة بين كلّ معادلة والمعادلة $x^2-2x-8=0$.

أ. $5x^2-10x-40=0$

ب. $\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\left(\frac{x}{2}\right)-8=0$

ت. $(x+1)^2-2(x+1)-8=0$

ث. $x^4-2x^2-8=0$

بدلوا x في المعادلة الأصليّة بمتغيّر آخر (في البنود ب -ث)، وسجّلوا معادلة إضافيّة لها المقام نفسه. حلّوا المعادلة الّتي سجّلتموها.

مجموعة مهام

1. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{5}{x}+\frac{25}{x^2}=2$

ب. $\frac{1}{(x-6)^2}=\frac{5}{x^2-36}$

ت. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{x+1}{2(x+1)}$

ث. $\frac{x}{2(x-5)}+\frac{1}{x+5}=\frac{2x}{x^2-25}$

2. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{2}{(x+3)^2}=\frac{3}{x^2-9}$

ب. $\frac{x-1}{2x-1}-\frac{x-1}{2x+1}=2$

ت. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$

ث. $\frac{1}{x-5}-\frac{5}{3(x+5)}=\frac{8}{x^2-25}$

3. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{5x-10}{x+2}-\frac{1}{2x-4}=\frac{5}{2x+4}$ ت. $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{7}{x^2-4}=\frac{3}{x-2}$

ب. $\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{5}{x-3}=\frac{x+2}{x^2-9}$ ث. $\frac{1}{x^2-25}-\frac{2x+1}{5-x}=1+\frac{x-2}{x+5}$

4. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{3x^3}{x+4}=6x$ ب. $\frac{2x^3-32x}{x-4}=64$

5. أ. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

(i) $\frac{7}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{14}{x^2-1}$ (ii) $\frac{7}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{6}{x^2-1}$ (iii) $\frac{7}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{18}{x^2-1}$

ب. جميع المعادلات في البند السابق صورتها: $\frac{7}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{m}{x^2-1}$

في أيّ قيم m يوجد حلّ لهذه المعادلات؟

في أيّ قيم m لا يوجد حلّ لهذه المعادلات؟

6. حلّوا المعادلة التربيعيّة $x^2+2x-3=0$.

استعينوا بالحلّ لإيجاد حلول المعادلات التالية.

أ. $(x-2)^2+2(x-2)-3=0$ ب. $(5x)^2+2(5x)-3=0$ ت. $x^4+2x^2-3=0$

7. حلّوا المعادلة التربيعيّة $x^2-4x-21=0$.

استعينوا بالحلّ لإيجاد حلول المعادلات التالية.

أ. $(2x+1)^2-4(2x+1)-21=0$ ب. $\left(\frac{x}{3}\right)^2-4\left(\frac{x}{3}\right)-21=0$ ت. $x^3-4x^2-21x=0$

8. جدوا، في كلّ بند، المعادلات الّتي يوجد لها نفس حلّ المعادلة في الإطار.

أ.

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{4}=5$$

$\frac{x+1}{2}-5=\frac{x-1}{4}$ $\quad$ $\frac{x+1}{2}=5-\frac{x-1}{4}$ $\quad$ $\frac{x+1}{2}=5+\frac{1-x}{4}$

ب.

$$(x\neq 2,\ x\neq -2)\quad \frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$$

$\frac{3x+1}{x+2}-1=\frac{x-1}{x-2}$ $\quad$ $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}+1$ $\quad$ $\frac{3x+1}{x+2}+1=\frac{x-1}{x-2}$

ت.

$$(x\neq 2,\ x\neq 5)\quad \frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-5}=\frac{1}{2}$$

$\frac{3}{x-2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x-5}$ $\quad$ $\frac{3}{x-2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{x-5}$ $\quad$ $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{x-5}$

ث.

$$(x\neq 2)\quad \frac{1}{2x-4}-\frac{1}{2-x}=\frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2x-4}=\frac{1}{2-x}+\frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2x-4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{x-2}$

9. حلّوا كلّ معادلة بطريقتين مختلفتين.

أ. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{6x}{x+1}+8=0$ $\quad$ ب. $\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+8=0$

الدرس الثالث: مسائل في الحركة

يقود **موسى** درّاجته الناريّة.
خرج **موسى** يوم الأربعاء صباحًا من تل أبيب متوجّهًا إلى شمال البلاد، وقد قطع مسافة 175 كم بسرعة ثابتة.
في طريق عودته، سار بسرعة أكبر بـ 20 كم في الساعة؛ لذا كان زمن سفر **موسى** إيابًا أقلّ من زمن سفره ذهابًا.
جدوا سرعة **موسى** صباحًا يوم الأربعاء.

نحلّ مسائل في الحركة بمساعدة معادلات تربيعيّة مع مقامات.

للتذكير

- في السرعة الثابتة، السرعة هي النسبة بين المسافة والزمن.
- نرمز، عادةً، إلى السرعة بالحرف v، الزمن بالحرف t والمسافة بالحرف s.

نسجّل العلاقات بين السرعة، الزمن والمسافة بمساعدة المعادلة $s = v \cdot t$.

نتطرّق في المهام 1 - 3 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. حلّوا بمساعدة متغيّر واحد.

أ. ارمزوا بـ x إلى سرعة **موسى** ذهابًا (بالكم في الساعة).
أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اقترحوا طرقًا مختلفة لإيجاد سرعة **موسى** صباحًا يوم الأربعاء.
يمكنكم الاستعانة بجدول وبرسم تخطيطيّ للمعادلة.

	المسافة (بالكم)	الزمن السفر (بالساعة)	السرعة (كم في الساعة)
ذهابًا			
إيابًا			

$$\text{زمن السفر إيابًا} + 1 = \text{زمن السفر ذهابًا}$$

ت. جدوا سرعة **موسى** صباحًا يوم الأربعاء.
افحصوا هل السرعة الّتي وجدتموها مناسبة لإجابتكم في بند أ؟

2. الحلّ بمساعدة متغيّرين.

أ. ارمزوا بـ t إلى زمن سفر **موسى** ذهابًا (بالساعات).

v سرعة سفر **موسى** ذهابًا (بالكيلومترات في الساعة).

أيّ قيم مناسبة لـ t وأيّ قيم مناسبة لـ v حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. انسخوا الجدول وأكملوه.

	المسافة (بالكم)	زمن السفر (بالساعة)	السرعة (كم في الساعة)
ذهابًا			
إيابًا			

ت. سجّلوا هيئة معادلات مناسبة حسب الجدول، وحلّوها.

ث. جدوا سرعة **موسى** صباحًا يوم الأربعاء.

افحصوا هل إجابتكم مناسبة لشروط المسألة؟

نفكّر بـ ...

3. أ. هل حصلتم في المهمّتين 1 وَ 2 على الإجابة نفسها للمسألة الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة؟ اشرحوا.

ب. تناقشوا في حسنات وسيئات كلّ طريقة حلّ. أيّ طريقة حلّ تفضلونها؟ اشرحوا.

نجد، في حالات كثيرة، إجابة لمسألة كلاميّة بمساعدة حلّ معادلة (أو هيئة معادلات).
عادةً، يمكن حلّ مسألة بواسطة معادلات مختلفة. يمكن أن تمثّل المتغيّرات مقادير مختلفة، في المعادلات المختلفة.
لذا؛ عندما نحلّ مسائل بطريقة جبريّة، من المهمّ أن نذكر ماذا يمثّل كلّ متغيّر؟

لا نعرف بالضبط الشخص الأوّل الّذي أضاف محركًا للدراجة الهوائيّة، وهكذا اخترع الدراجة الناريّة. على ما يبدو، تمّ تطوير الدرّاجة الناريّة الأولى الّتي عملت بواسطة محرّك بخار سنة 1867 في الولايات المتّحدة. اختُرعت الدرّاجة الناريّة المعروفة لنا اليوم سنة 1894 في ألمانيا. اعتُبر جوطليب ديملر (Gottlieb Daimler) المؤسس الأوّل للدراجة الناريّة، وقد كان صاحب شركة ديملر الّتي تحوّلت فيما بعد إلى مصنع لصناعة المرسيدس. اتّضح مع مرّ السنين أن الدرّاجة الناريّة مريحة جدًّا، لكنها خطيرة جدًّا أيضًا. حسب معطيات جمعية "ضوء أخضر"، قُتل 45 شخصًا في إسرائيل، سنة 2010 ، بسبب حوادث سير دراجات ناريّة، ويُعتبر عدد القتلى ارتفاع بنسبة 30% مقارنة بسنة 2009. رُبع المتورطين في حوادث سير الدراجات الناريّة هم شباب أعمارهم من 19-24. في معظم الحالات، الإصابات الّتي تحدُث لسائقو الدراجات الناريّة تكون بالغة الخطورة، لأنّهم غير محمين كما هو الأمر في السيّارات.

4. خرج **الجدّ اسحاق** عند الساعة الـ 8:00 صباحًا لزيارة حفيدته. تسكن حفيدته على بُعد 10 كم عن بيته.
سار الجد 2.5 كم ببطء، لأنّ المسافة التي قطعها كانت في صعود، أما المسافة 7.5 فقد كانت في نزول؛ لذا فقد قطعها بسرعة أكبر بـ 2 كم في الساعة مقارنة بالصعود.
وصل **الجدّ اسحاق** بيت حفيدته عند الساعة الـ 1:00 ظهرًا.

أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة سير الجد؟

ب. جدوا سرعة سير الجدّ في الصعود. اشرحوا.

5. يقطع قطار مسافة 600 كم كلّ يوم بسرعة ثابتة.
قطع القطار، يوم الثلاثاء، مسافة 225 كم بسرعة أقل بـ 10 كم في الساعة مقارنة بسرعته العاديّة، ثم استمرّ، بعد ذلك، بسرعة أكبر بـ 8 كم في الساعة مقارنة بسرعته العاديّة. وهكذا وصل القطار في الزمن المحدّد.

أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة القطار؟ اشرحوا.

ب. جدوا سرعة القطار في كلّ مقطع طريق. اشرحوا.

مجموعة مهامّ

1. يقطع راكب دراجة ناريّة مسافة 240 كم بسرعة x كم في الساعة.
هطل مطر، في أحد الأيام، لذا قللّ راكب الدراجة الناريّة سرعته بـ 20 كم في الساعة.
لذا؛ استغرق زمن السفر ساعة واحدة أكثر من العاديّ.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. ما هي السرعة الثابتة لراكب الدراجة الناريّة؟ كم كانت سرعته في اليوم الماطر؟

2. خرجت مجموعة من المتنزهين، في جولة، من المخيم إلى محمية طبيعيّة بسرعة x كم في الساعة.
المسافة بين المخيم والمحمية هي 15 كم.
عندما عادوا من المحمية، انخفضت سرعتهم بـ 2 كم في الساعة. لذا؛ استغرق زمن سيرهم إيابًا ساعتين أكثر من زمن سيرهم ذهابًا.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. بأيّ سرعة سار المتنزهين من المخيم إلى المحمية الطبيعيّة؟ اشرحوا.

3. المسافة بين A إلى B هي 80 كم.
خرج راكب دراجة هوائيّة من A باتجاه B ، وسار بسرعة ثابتة مقدارها x كم في الساعة.
بعد أن قطع نصف الطريق، حدث خلل في الدراجة الهوائيّة؛ لذا فقد استمر في سفره بالحافلة.
سرعة الحافلة أكبر بـ 60 كم في الساعة من سرعة ركوب الدراجة الهوائيّة.
لذا؛ وصل B قبل الزمن المخطط له بـ $1\frac{1}{2}$ ساعة.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. ما هي السرعة الثابتة لراكب الدراجة الهوائيّة؟ اشرحوا.

4. المسافة بين A إلى B هي 450 كم.
خرجت شاحنة من A ، وسارت باتّجاه B.
بعد أن سارت لمدّة ساعتين بسرعة ثابتة مقدارها x كم في الساعة، توقفت الشاحنة لمدّة 15 دقيقة بسبب خلل في الشاحنة. بعد ذلك، استمرّت الشاحنة بطريقها بسرعة أكبر بـ 5 كم في الساعة من سرعتها السابقة.
وصلت الشاحنة B بالوقت المخطّط له مسبقًا بالضبط.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. كم كانت سرعة الشاحنة قبل حدوث الخلل؟ اشرحوا.

5. المسافة بين القدس وإيلات هي 360 كم.
خرجت سيّارة من القدس إلى إيلات، وسارت بسرعة ثابتة.
عندما عادت السيّارة، سارت لمدة 3 ساعات بنفس سرعة الذهاب إلى إيلات.
بعد ذلك، ازدادت سرعتها بنسبة 20%.
وهكذا وصلت السيّارة القدس خلال مدّة زمنيّة أقلّ بنصف ساعة من المدّة الزمنيّة في الذهاب إلى إيلات.
في أيّ سرعة سارت السيّارة من القدس إلى إيلات؟ اشرحوا.

6. يتنافس **ضرار** و**سامي** في الركض على طول مسار ذهابًا وإيابًا.
سار **ضرار** بسرعة معيّنة ثابتة.
ركض **سامي** ذهابًا بسرعة مقدارها ضعفي سرعة **ضرار**، وركض إيابًا بسرعة تساوي نِصف سرعة ضرار.
من يفوز بالمسابقة؟ اشرحوا.

7. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{x+4}{7}=\frac{2}{x-1}$ ت. $\frac{2x-1}{x-3}=\frac{x+3}{2x+1}$

ب. $\frac{x+1}{2}=\frac{x+7}{x-1}$ ث. $\frac{8}{x}+\frac{4}{x+2}=5$

8. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{x-2}{x-5}=\frac{x^2-3}{2(x-5)}$ ت. $\frac{x}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{4x}{x^2-4}$

ب. $\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{x+2}=\frac{x+1}{4}$ ث. $\frac{1}{x+3}+\frac{x+1}{2x+6}=\frac{2x+1}{x^2+3x}$

9. سجّلوا مجال التعويض، وحلّوا.

أ. $\frac{2x-1}{x^2-3x}+\frac{x+2}{6-2x}=\frac{1}{2}$ ت. $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x}$

ب. $\frac{2}{x}+\frac{x^2+1}{x+3}=x$ ث. $\frac{x+3}{x^2-2x}+\frac{3-2x}{4-2x}=1$

10. أ. أمامكم ثلاثة كسور جبريّة $(x \neq 5)$.
اختزلوها.

$\frac{(5-x)^2}{x-5}$ $\frac{(5-x)^3}{x-5}$ $\frac{(5-x)^4}{x-5}$

ب. معطى تعابير صورتها $\frac{(5-x)^n}{x-5}$ $(n \neq 5,\ n$ عدد طبيعيّ)

لأيّ قيم n $\frac{(5-x)^n}{x-5}=x-5$؟ اشرحوا.

لأيّ قيم n $\frac{(5-x)^n}{x-5}=5-x$؟ اشرحوا.

الدرس الثالث: مسائل في الحركة (تكملة)

خرج قطاران عند الساعة الـ 9:00 صباحًا، وقد سار الواحد باتّجاه الآخر.
(سجّلنا، في الرسمة، المسافات، وأشرنا إلى اتّجاه الحركة).

يسير القطار، من **قرية السلام**، بسرعة أقلّ بـ 20 كم في الساعة من سرعة القطار من **مدينة السلام**.

وصل القطار، من **قرية السلام**، نقطة الالتقاء، وانتظر $\frac{1}{4}$ ساعة حتّى وصل القطار من **مدينة السلام**.

بأيّ سرعة سار كلّ قطار؟
نحلّ معادلات ومسائل في الحركة.

1. المسافة بين المحطتين A وَ B هي 160 كم.
خرج **قطار لنقل البضائع** عند الساعة الـ 7:00 من المحطة A إلى المحطة B.
خرج **قطار مسافرين** عند الساعة الـ 8:00 من المحطة C إلى المحطة B.
تبعد المحطة C مسافة 40 كم عن المحطة A.
سرعة **قطار المسافرين** أعلى بـ 30 كم في الساعة من سرعة **قطار نقل البضائع**.
سار القطاران بسرعة ثابتة.
وصل **قطار المسافرين** المحطة B قبل **قطار نقل البضائع** بـ 20 دقيقة.
أ. أيّ قيم مناسبة لسرعة القطارين؟ اشرحوا.
ب. جدوا سرعة سفر قطار نقل البضائع.

2. خرج **سامر** عند الساعة الـ 8:00 من القرية، راكبًا دراجته الهوائية، باتّجاه مدينة حيفا.
المسافة بين القرية ومدينة حيفا هي 35 كم.
خرج **عامر** عند الساعة الـ 9:00 من القرية نفسها، في الطريق نفسها إلى حيفا.
سرعة **عامر** أكبر من سرعة **سامر** بنسبة 20%.
التقى **عامر** مع سامر **سامر** على بُعد 5 كم عن مدينة حيفا.
أ. أيّ قيم مناسبة لسرعة راكبي الدراجتين الهوائيتين؟ اشرحوا.
ب. جدوا سرعة دراجة **سامر** وسرعة دراجة **عامر**.

3. خرج راكب دراجة هوائيّة من مكان سكنه للقاء في مدينة تبعد عن بيته 30 كم.
بعد أن سار بسرعة ثابتة لمدّة ساعة، اتّضح له أنّه إذا استمرّ بالسرعة ذاتها فسيتأخر $\frac{1}{4}$ ساعة. لذا ازدادت سرعة راكب الدراجة الهوائيّة بـ 5 كم في الساعة، وهكذا وصل مكان اللقاء بالزمن المطلوب بالضبط.
أ. أيّ قيم مناسبة لسرعة راكب الدراجة الهوائيّة؟ اشرحوا.
ب. كم كانت سرعة راكب الدراجة الهوائيّة في الساعة الأولى؟

4. المسافة بين مدينتين تقعان على الشاطئ، عبر النهر، هي 80 كم.
كانت سرعة تيّار الماء في النهر، في اليوم الأوّل، 4 كم في الساعة.
في ذلك اليوم، قطعت باخرة المسافة ذهابًا وإيابًا بين المدينتين خلال 8 ساعات وَ 20 دقيقة.
أ. أيّ قيم مناسبة لسرعة الباخرة؟ اشرحوا.
ب. جدوا سرعة الباخرة في المياه الساكنة. اشرحوا.

5. حلّوا.

أ. $\frac{1+2x}{3}=\frac{3x-1}{4}+\frac{1}{x+6}$

ب. $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=2x+12$

ت. $\frac{9}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x-2)}=2$

ث. $\frac{3}{x+1}+\frac{x+2}{x-1}+\frac{10}{x^2-1}=0$

مجموعة مهامّ

1. خرج راكب درّاجة هوائيّة بسرعة ثابتة.
بعد مرور نصف ساعة، خرج راكب دراجة هوائيّة آخر، من المكان نفسه وفي الاتجاه نفسه، وقد سار بسرعة أكبر بـ 5 كم في السّاعة من سرعة الراكب الأوّل.
وصل الراكب الثاني الراكب الأوّل على بُعد 30 كم عن نقطة الانطلاق.
أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة راكبيّ الدرّاجتين الهوائيّتين؟ اشرحوا.
جدوا سرعة راكبيّ الدرّاجتين الهوائيّتين.

2. المسافة بين المدينتين A وَ B هي 360 كم.
خرج تكسي وشاحنة عند الساعة الـ 8:00 صباحًا من A إلى B. سار التكسي بسرعة أكبر بـ 20 كم في السّاعة من الشاحنة، وقد وصل B قبل الشاحنة بـ $1\frac{1}{2}$ ساعة.
أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة المرْكَبتين؟ اشرحوا.
ب. جدوا سرعة التكسي وسرعة الشاحنة.

3. سرعة التكسي أكبر بـ 15 كم في السّاعة من سرعة الحافلة.
يقطع التكسي مسافة 300 كم خلال مدّة زمنيّة أطول بـ $1\frac{1}{2}$ ساعة من المدّة الزمنيّة المطلوبة للحافلة كي تقطع مسافة 150 كم.
أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة المرْكَبتين؟ اشرحوا.
ب. جدوا سرعة التكسي وسرعة الحافلة.

4. يقطع قطار مسافة 240 كم، كلّ يوم، بسرعة ثابتة.
انخفضت سرعة القطار، في أحد الأيام، بـ 40 كم في الساعة؛ لذا استغرق السفر مدّة زمنيّة أطول بساعة واحدة أكثر من المدّة الزمنيّة العاديّة.

أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لسرعة القطار؟ اشرحوا.

ب. جدوا سرعة القطار الثابتة.

5. المسافة بين A إلى B هي 60 كم.
خرج راكبا درّاجتين هوائيّتين من A إلى B في الزمن نفسه.
سار الراكب الأوّل بسرعة أكبر بـ 6 كم في الساعة من سرعة الراكب الثاني، ووصل B قبله بنصف ساعة.

أ. أيّ قيم يمكن أن تكون مناسبة لراكبيّ الدرّاجتين الهوائيّتين؟ اشرحوا.

ب. جدوا سرعة كلّ راكب دراجة هوائيّة.

6. خطّط سائق شاحنة أن يقطع مسافة 180 كم بين A إلى B بسرعة x كم في الساعة.
بعد أن قطع $\frac{1}{3}$ المسافة، ازدادت سرعته بـ 20 كم في الساعة، ووصل B نِصف ساعة قبل الزمن المخطّط له.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. احسبوا سرعة الشاحنة في البداية.

7. تسير سيّارة من ديمونا إلى طبريا بسرعة 80 كم في الساعة.
تسير شاحنة من طبريا إلى ديمونا بسرعة 50 كم في الساعة.
ما هي المسافة بين السيّارة والشاحنة قبل أن تلتقيا بساعة واحدة؟ اشرحوا.

8. حلّوا.

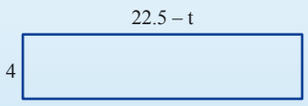
أ. $\frac{6}{x-1}-\frac{3}{x+1}=1$ ب. $\frac{x}{x+3}+\frac{x}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}$ ت. $\frac{2x}{x^2-25}+\frac{x}{3x-15}=\frac{1}{x+5}$

الدرس الخامس: حافظ شاشة الحاسوب

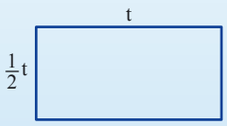
مهمّة في التنوّر الرياضيّ

طُلب من مهندسة برمجة أن تُبرمج "حافظ شاشة حاسوب" مكوّن من نوعين من المستطيلات، بحيث تتغيّر مساحتيهما كلّ الوقت.
خطّطت المهندسة النموذجين التاليين من المستطيلات. t يمثّل الزمن بالثواني.
(أُعدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

مستطيل نموذج I



مستطيل نموذج II



يتغيّر كلّ مستطيل بشكل متواصل، في دوريّة مقدارها 22 ثانية.
خطّطت المهندسة أن تتغيّر ألوان المستطيلات بالشكل التالي:
المستطيل الّذي مساحته أكبر لونه أحمر، والمستطيل الّذي مساحته أصغر لونه أزرق.
عندما تكون مساحة المستطيلين متساوية، يصدر صوتًا، ويتبادل المستطيلان لونيهما.

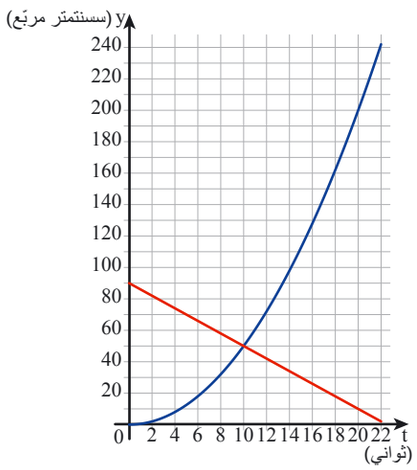
بعد مرور كم من الوقت منذ بداية الدورة يتبادل المستطيلين لونيهما؟ اشرحوا.

نبحث التغيّر في مساحة المستطيلين خلال دورة واحدة.

نتطرّق في المهمّتين 1 - 7 إلى المعطيات الّتي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. سجّلوا تعبيرًا جبريًّا لمساحة المستطيل من النموذج I، وتعبيرًا جبريًّا لمساحة المستطيل من النموذج II.
ب. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

2. أمامكم خطان بيانيّان يصفان التغيّر في مساحة المستطيلين من النموذجين.
أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ للنموذج المناسب.
ب. ما هي مساحة، وما هو لون كلّ مستطيل في نهاية الثانية السادسة؟



3. أ. بعد مرور كم ثانية مساحة المستطيل من النموذج I تصبح أقلّ من 40 سنتمترًا مربّعًا؟ اشرحوا.
ب. بعد مرور كم ثانية مساحة المستطيل من النموذج II تساوي 20 سنتمترًا مربّعًا؟ اشرحوا.

4. أمامكم عبارات، حدّدوا العبارة الصحيحة التي تصف مجرى دورة واحدة. اشرحوا.

أ. تكبر مساحة النموذجين من المستطيلات دائمًا.

ب. تصغر مساحة النموذجين من المستطيلات دائمًا.

ت. تكبر مساحة المستطيل من النموذج I دائمًا، وتصغر مساحة المستطيل من النموذج II دائمًا.

ث. تصغر مساحة المستطيل من النموذج I دائمًا، وتكبر مساحة المستطيل من النموذج II دائمًا.

5. حدّدوا "صحيح" أو "غير صحيح" واشرحوا.

أ. في نهاية 4 ثوانٍ منذ بداية الدورة، لون المستطيل من النموذج I هو أزرق.

ب. عند الاقتراب من نهاية الدورة يكون لون المستطيل من النموذج II أحمر.

ت. تصغر مساحة المستطيل من النموذج I بـ 4 سنتمترات مربّعة كلّ ثانية.

ث. تُغيّر المستطيلات لونها في الثانية الـ 22.

6. قال **يوسف**: تُغيّر المستطيلات لونها مرّتين كلّ دورة.

هل قول **يوسف** صحيح؟ اشرحوا.

7. اكتبوا تعابير جبريّة من عندكم لـ "حافظ شاشة الحاسوب". صفوا تبديل الألوان بالكلمات وبالرسم البيانيّ.

مجموعة مهامّ

أُعِدّت الرسومات في المهامّ التالية للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. معطى مربّع طول ضلعه x سم ($x > 2$).

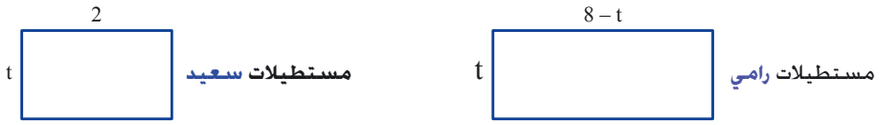
كبّروا طول أحد أضلاع المربّع بـ 6 سم، وصغّروا بـ 2 سم طول الضلع الثاني. ونتج مستطيل.

مجموع مساحتي المربّع الأصليّ والمستطيل هو 58 سنتمترًا مربّعًا.

أ. اكتبوا تعابير جبريّة لمساحة المربّع ومساحة المستطيل.

ب. اكتبوا معادلة، حلّوها وجدوا طول ضلع المربّع، وأطوال أضلاع المستطيل.

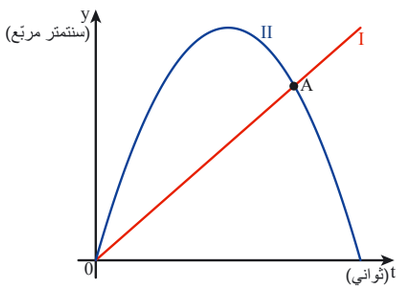
2. رسم **رامي** و**سعيد**، في الحاسوب، "حافظ شاشة حاسوب" مكوّن من مستطيلات، حيث تتغيّر هذه المستطيلات بشكل متتالٍ بدورية 8 ثواني. t يمثّل الزمن بالثواني.



أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا تعابير جبريّة لمساحة مستطيلات **رامي** و**سعيد**.

ت. أمامكم خطّان بيانيّان يصفان التغيّر في مساحة مستطيلات **رامي** و**سعيد**.



أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **رامي**؟

أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **سعيد**؟

ث. أيُّهما مستطيله أكبر في الزمن t = 3؟ في الزمن t = 7؟

ج. ما هما إحداثيّا النقطة A؟

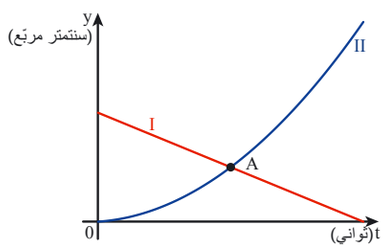
صفوا بالكلمات معنى إحداثيّا النقطة A.

3. رسم **أسعد** و**عماد**، في الحاسوب، "حافظ شاشة حاسوب" مكوّن من مستطيلات، حيث تتغيّر هذه المستطيلات بشكل متتالٍ بدوريّة 20 ثانية. t يمثّل الزمن بالثواني.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا تعابير جبريّة لمساحة مستطيلات **أسعد** و**عماد**.

ت. أمامكم خطّان بيانيّان يصفان التغيّر في مساحة مستطيلات **أسعد** و**عماد**.



أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **أسعد**؟

أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **عماد**؟

ث. أيُّهما مستطيله أكبر في الزمن t = 3؟في الزمن t = 4؟

ج. بعد كم ثانية تصبح مساحة مستطيلات **أسعد** 30 سنتمترًا مربّعًا؟

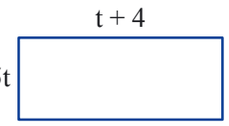
ح. بعد كم ثانية تصبح مساحة مستطيلات **عماد** 40 سنتمترًا مربّعًا؟

خ. ما هما إحداثيّا النقطة A؟

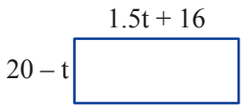
صفوا بالكلمات معنى إحداثيّا النقطة A.

4. رسم **نديم** و**أيوب**، في الحاسوب، "حافظ شاشة حاسوب" مكوّن من مستطيلات، حيث تتغيّر هذه المستطيلات بشكل متتالٍ بدوريّة 20 ثانية. t يمثّل الزمن بالثواني.

مستطيلات **نديم**



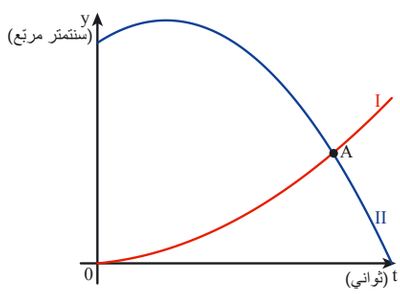
مستطيلات **أيّوب**



أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا تعابير جبريّة لمساحة مستطيلات **نديم** و**أيوب**.

ت. أمامكم خطّان بيانيّان يصفان التغيّر في مساحة مستطيلات **نديم** و**أيوب**.



أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **نديم**؟

أيّ خطّ بيانيّ يصف مساحة مستطيلات **أيوب**؟

ث. أيُّهما مستطيله أكبر في الزمن $t = 10$؟ في الزمن $t = 19$؟

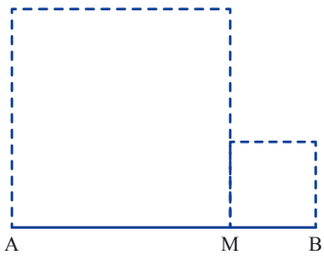
ج. بعد كم ثانية تكبر مساحة مستطيلات **نديم** إلى 198 سنتمترًا مربّعًا؟

ح. بعد كم ثانية تصبح مساحة مستطيلات **أيوب** 272 سنتمترًا مربّعًا؟

خ. ما هما إحداثيّا النقطة A؟

صفوا بالكلمات معنى إحداثيّا النقطة A.

5. تتحرّك النقطة M من A إلى B على قطعة AB طولها 40 سم.



تبني خلال، كلّ الحركة، مربّعات على القطعتين AM وَ MB.

x يمثّل طول القطعة AM بالسم.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. كم كان طول القطعة AM عندما كانت مساحة المربّعين 1,000 سم مربّع؟

ت. كم كان طول القطعة AM عندما كانت مساحة المربّعين 800 سم مربّع؟

ث. كم كان طول القطعة AM عندما كانت مساحة المربّعين هي الأصغر؟

6. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 24 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ xy = 15 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ xy = 40 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y^2 - xy = 6 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

7. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - 4y^2 = 17 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} xy = 24 \\ (x + 2)(y - 5) = 15 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} xy = 15 \\ (x + 7)(y + 4) = 2 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} xy = 12 \\ (x - 1)(y - 2) = 4 \end{cases}$

8. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 3x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = xy \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x(1 + y) = 44 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} xy = 20 \\ (x + 6)(y - 3) = 20 \end{cases}$

ج. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x(x + 2) = y + 33 \end{cases}$

ح. $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = 2 \\ (x - 1)(y - 4) = 2 \end{cases}$

9. حلّوا هيئات المعادلات.

أ. $\begin{cases} 3x^2 + 2y = 6 \\ 2x^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 4x^2 + 3y = 25 \\ 3x^2 - 4y = 0 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} xy = 35 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} xy = 8 \\ -25 + (x + 3)(y + 1) = 0 \end{cases}$

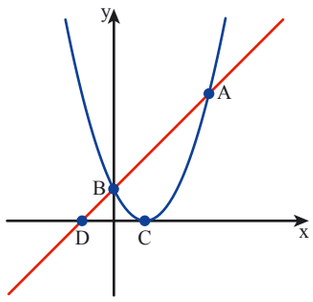
ج. $\begin{cases} y = x + 1 \\ xy + x = 2 + 2y \end{cases}$

ح. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x^2 + 5xy - 7y^2 = 77 \end{cases}$

10. أمامكم خطّان بيانيّان للدالّتين:

$f(x) = (x - 1)^2$

$g(x) = x + 1$



أ. جدوا إحداثيّات النقاط A, B, C, D.

ب. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) > 0$؟

ت. لأيّ قيم x يتحقّق $g(x) > 0$؟

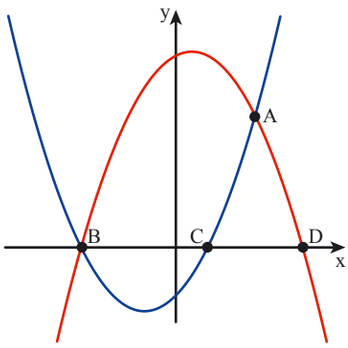
ث. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) > g(x)$؟

ج. احسبوا مساحة المثلّث ΔBCD.

11. أمامكم خطّان بيانيّان للدالّتين:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$g(x) = -x^2 + x + 12$



أ. جدوا إحداثيّات النقاط A, B, C, D.

ب. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) > 0$؟

ت. لأيّ قيم x يتحقّق $g(x) > 0$؟

ث. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) < g(x)$؟

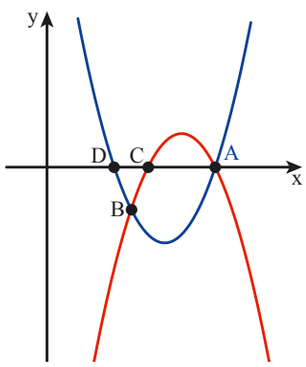
ج. احسبوا مساحة المثلّث ΔABD.

ح. احسبوا مساحة المثلّث ΔABC.

12. أمامكم خطّان بيانيّان للدالّتين:

$f(x) = x^2 - 7x + 10$

$g(x) = -x^2 + 8x - 15$



أ. جدوا إحداثيّات النقاط A, B, C, D.

ب. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) > 0$؟

ت. لأيّ قيم x يتحقّق $g(x) > 0$؟

ث. لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) < g(x)$؟

ج. احسبوا مساحة المثلّث ΔABD.

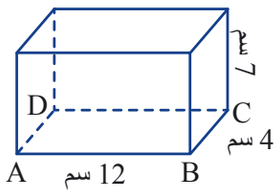
ح. احسبوا مساحة المثلّث ΔABC.

نحافظ على لياقة رياضيّة

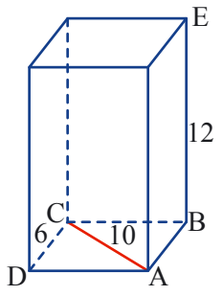
أُعدت الرسومات في المهامّ التالية للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

صناديق

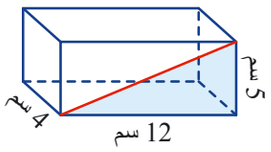
1. أ. جدوا حجم الصندوق.
ب. جدوا مساحة السطح الخارجيّ للصندوق.



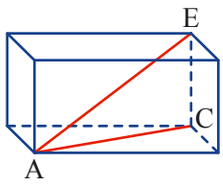
2. جدوا حجم الصندوق المعطى في الرسمة.



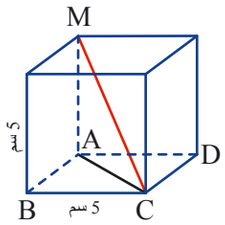
3. أمامكم قُطر أحد سطوح الصندوق (لُوّن **بالأحمر**).
جدوا طوله.



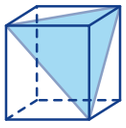
4. أمامكم رسمة صندوق:
طول ارتفاع الصندوق 60 سم = CE .
طول قُطر السطح 80 سم = AC.
جدوا طول قُطر الصندوق.

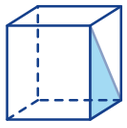


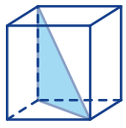
5. أمامكم رسمة مكعّب، طول كلّ ضلع 5 سم.
جدوا طول قُطر المكعّب.



6. رُسم، في كلّ بند، مكعّب. جدوا نوع المثلّث الملوّن.

أ. 

ب. 

ت. 

ث.

ج.