الوحدة الثالثة عشرة: نميّز مثلّثات حسب الصفات

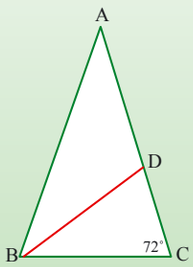
الدرس الأوّل: تمييز مثلّث متساوي الساقين

أمامكم رسمة المثلّث ΔABC المتساوي الساقين (AB = AC).

$\measuredangle C = 72^\circ$.

BD ينصّف $\measuredangle B$.

كم مثلثًا متساوي الساقين يوجد في الرسمة؟



نتعلّم كيفيّة تمييز مثلّثات متساوية الساقين حسب الصفات.

للتّذكير

نسمّي الزاويتين اللّتين تقعان إلى جانب قاعدة المثلّث المتساوي الساقين **"زاويتا القاعدة"**.

نسمّي الزاوية الّتي تقع بين الساقين **"زاوية الرأس"**.

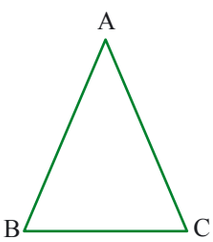
برهنّا في الصفّ الثامن الـ نظريّة

إذا **كان المثلّث متساوي الساقين فإنّ زاويتيّ القاعدة** متساويتان.

1. أ. اكتبوا المعطيات والاستنتاج، بكتابة رياضيّة، للـ نظريّة في الإطار.

ب. اكتبوا **الادّعاء العكسيّ** للـ نظريّة في الإطار.

ت. اكتبوا المُعطيات والمطلوب برهانه في **النظريّة العكسيّة**.



2. في المثلّث ABC

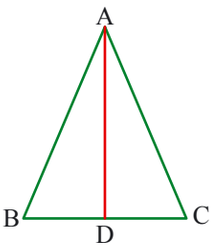
مُعطى $\measuredangle B = \measuredangle C$

بناء مساعد: AD ينصّف زاوية الرأس في ΔABC.

أ. أشيروا إلى أزواج من الزوايا المتساوية.

ب. ΔADB ≅ ΔADC. علّلوا.

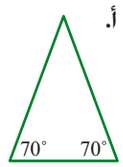
ت. استنتاج AB = AC. علّلوا.



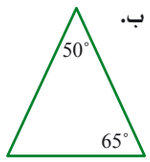
ادّعاء عكسيّ لـ نظريّة في الإطار (في الصفحة السابقة):
إذا كانت في مثلّث **زاويتين متساويتين** فإنّ المثلّث **متساوي الساقين**.
برهنّا في مَهمّة 2 أنّ هذا الادّعاء صحيح.

3. حدّدوا هل المثلّثات التالية متساوية الساقين؟ إذا كانت الإجابة نعم، عيّنوا الساقين.

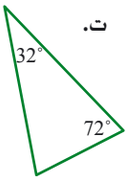
أ.



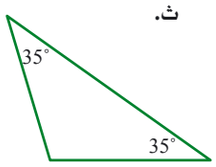
ب.



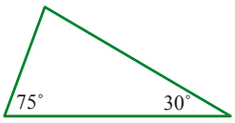
ت.



ث.

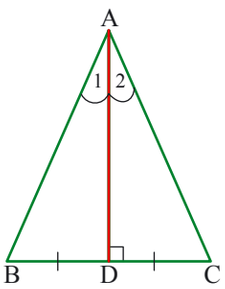


ج.



للتذكير
برهنّا في الصفّ الثامن الـ نظريّة
إذا كان **المثلّث متساوي الساقين** فإنّ المتوسّط للقاعدة، الارتفاع للقاعدة ومنصّف زاوية الرأس هي **القطعة نفسها** (تتحد).

4. أ. اكتبوا المُعطيات والاستنتاج، بكتابة رياضيّة، لـ نظريّة في الإطار.



ب. اكتبوا **الادّعاء العكسيّ** لـ نظريّة في الإطار.

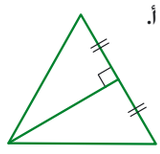
ت. اكتبوا المُعطيات والمطلوب برهانه، بكتابة رياضيّة، كي تبيّنوا أنّ **الادّعاء العكسيّ** صحيح (استعينوا بالمُعطيات المشار إليها في الرسمة).

ث. حسب أيّ نظريّة تَطابق $\Delta ADC \cong \Delta ADB$؟ (هنالك نظريّتان مناسبتان).

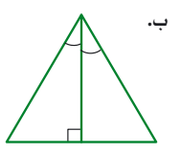
ج. استنتاج $AB = AC$. علّلوا.

5. علّلوا لماذا المثلّثات التالية متساوية الساقين؟ أشيروا إلى الساقين.

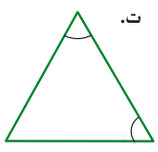
أ.



ب.



ت.



الادّعاء العكسيّ للـ نظريّة في الإطار (حسب المهمّة 4) هو:

إذا كان المتوسّط لضلع المثلّث، الارتفاع للضّلع نفسه ومنصّف الزاوية المقابلة لهذا الضلع جميعها **القطعة نفسها** (تتّحد) فإنّ **المثلّث متساوي الساقين**.

برهنّا في المَهمّة 4 أنّ الادّعاء العكسيّ صحيح.

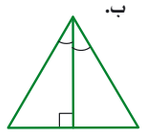
يكفي أنْ يتحقّق أحد الشروط التالية في المثلّث كي نبيّن أنّ المثلّث متساوي الساقين:

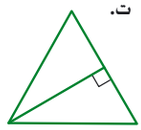
- **إذا** كانت في مثلّث زاويتين متساويتين **فإنّ** المثلّث متساوي الساقين.
- **إذا** كان في مثلّث منصّف زاوية وهو متوسّط أيضًا للضّلع المقابل **فإنّ** المثلّث متساوي الساقين.
- **إذا** كان في مثلّث متوسّط وهو ارتفاع للضّلع نفسه **فإنّ** المثلّث متساوي الساقين.

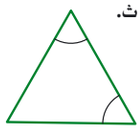
مجموعة مهام

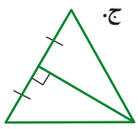
1. حدّدوا هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثات التالية متساوية الساقين؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأشيروا إلى الساقين. إذا كانت الإجابة لا، فاكتبوا "لا" داخل المثلّث.

أ.

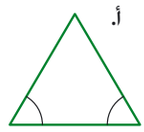
ب. 

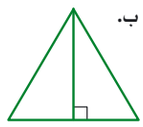
ت. 

ث. 

ج. 

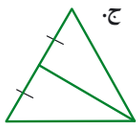
2. حدّدوا هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثات التالية متساوية الساقين؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأشيروا إلى الساقين. إذا كانت الإجابة لا، فاكتبوا "لا" داخل المثلّث.

أ. 

ب. 

ت.

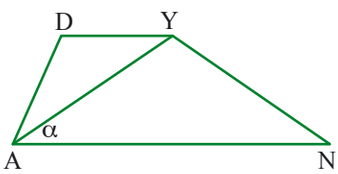
ث.

ج. 

3. **مُعطى** في الشكل الرباعيّ DANY: DY || AN

AY ينصّف الزاوية A

$\measuredangle YAN = \alpha$



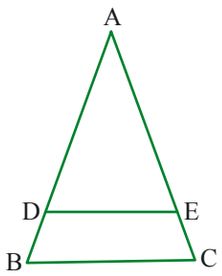
أ. سجّلوا، في الرسمة، زوايا أخرى مقدارها α.

ب. جِدوا، في الرسمة، مثلّث متساوي الساقين. وعلّلوا.

4. **مُعطى** $AB = AC$

$DE \parallel BC$

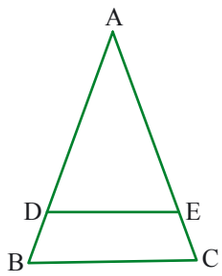
$BB = 70^\circ$



أ. اِحسبوا مقدار الزوايا التالية: $\measuredangle A$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$, $\measuredangle E$.

ب. جِدوا، في الرسمة، مثلّث متساوي الساقين آخر بالإضافة للمثلّث ABC.

5. **نظريّة** إذا كان المثلّث ΔABC متساوي الساقين، والقطعة DE توازي القاعدة BC فإنّ المثلّث ΔADE هو مثلّث متساوي الساقين أيضًا.



أ. سجّلوا المُعطيات والمطلوب برهانه بكتابة رياضيّة.

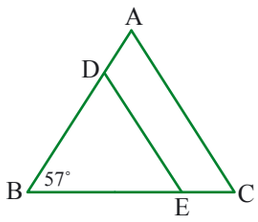
ب. أُرمُزوا: $\measuredangle B = \beta$ وعبّروا عن الزوايا الأخرى بواسطة β.

ت. اِشرحوا لماذا المثلّث ΔADE هو مثلّث متساوي الساقين؟

6. **مُعطى** $AB = AC$

$DE \parallel AC$

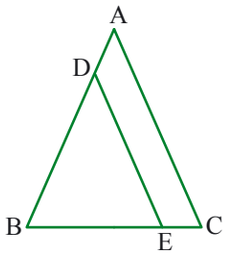
$\measuredangle B = 57^\circ$



أ. اِحسبوا مقدار الزوايا التالية: $\measuredangle A$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$, $\measuredangle E$.

ب. جِدوا، في الرسمة، مثلّث متساوي الساقين آخر بالإضافة للمثلّث ABC.

7. **نظريّة** **إذا** كان المثلّث ΔABC متساوي الساقين، والقطعة DE توازي الساق AC فإنّ المثلث ΔBDE هو مثلّث متساوي الساقين أيضًا.



أ. سجّلوا المُعطيات والمطلوب برهانه بكتابة رياضيّة.

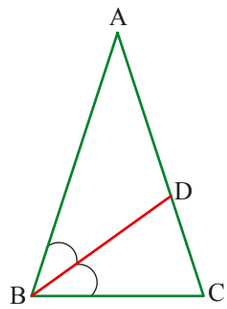
ب. أُرمُزوا: $\measuredangle B = \beta$ وعبّروا عن الزوايا الأخرى بواسطة β.

ت. اِشرحوا لماذا المثلّث ΔDBE هو مثلّث متساوي الساقين؟

8. **مُعطى** ΔABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AB = AC)$

BD ينصّف الزاوية B

$\measuredangle ABC = 72^\circ$



أ. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.

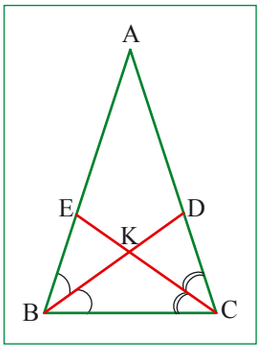
ب. كم مثلّثًا متساوي الساقين يوجد في الرسمة؟

9. مُعطى ΔABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AB = AC)$

BD ينصّف الزاوية B

CE ينصّف الزاوية C

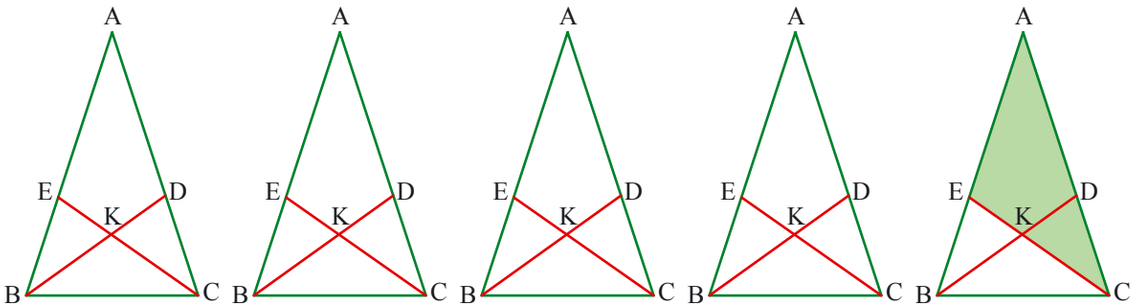
$\measuredangle ABC = 72^\circ$



أ. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.

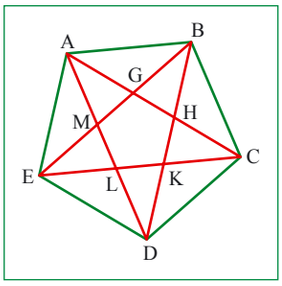
ب. أمامكم 5 رسومات متماثلة. لوّنوا، في كلّ رسمة، مثلّث متساوي الساقين آخر.

مثال:



ت. كم مثلّثًا متساوي الساقين يوجد في المثلّث الّذي يظهر في الإطار؟
سجّلوا المثلّثات.

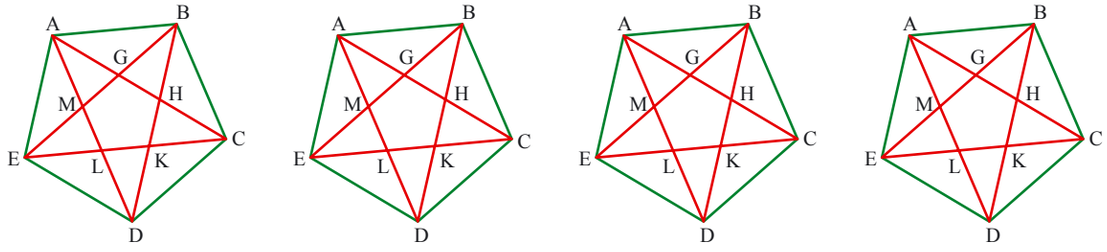
10. أمامكم رسمة مخمّس منتظم وخمسة أقطاره.



أ. اِحسبوا مقدار الزوايا في المخمّس المنتظم.

للتّذكير: مقدار كلّ زاوية في المخمّس المنتظم هو 108°.

ب. أمامكم 4 رسومات متماثلة. لوّنوا، في كلّ رسمة، مثلّث متساوي الساقين آخر.



ت. كم مثلّثًا متساوي الساقين يوجد في المثلّث الّذي يظهر في الإطار؟ سجّلوا 10 مثلّثات كهذه على الأقلّ.

ث. سجّلوا زوجين مختلفين مِنَ المثلّثات **المتشابهة**.

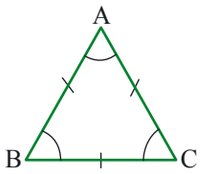
الدرس الثاني: نميّز مثلّثات متساوية الأضلاع

أمامكم رسمة مسدّس منتظم وستة أقطاره.
كم مثلّثًا متساوي الأضلاع يوجد في الرسمة؟

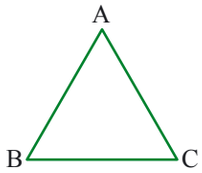
سنتعلّم كيفية تمييز مثلّثات متساوية الأضلاع حسب الصفات.

للتّذكير

برهنّا في الصفّ الثامن الـ نظريّة
إذا **كان المثلّث متساوي الأضلاع** فإنّ **جميع زواياه متساوية** بالمقدار.
مقدار كلّ زاوية 60°.



1. أ. اكتبوا المُعطيات والاستنتاج، بكتابة رياضيّة، للـ نظريّة في الإطار.



ب. صوغوا **نظريّة عكسيّة** للنظريّة الّتي تظهر في بَند أ.

ت. اكتبوا المُعطيات والمطلوب برهانه، بكتابة رياضيّة، **كادّعاء عكسيّ**.

ث. أكملوا البرهان الّذي يبيّن أنّ **الادّعاء العكسيّ** صحيح:

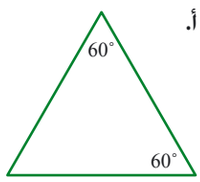
مُعطى $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ $\Leftarrow$ _____ $= AB$ تعليل: _____

مُعطى $\sphericalangle C = \sphericalangle A$ $\Leftarrow$ _____ $=$ _____

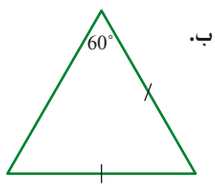
استنتاج: _____

2. أكملوا، في كلّ بَند، مقدار زوايا المثلّث بناء على المُعطيات، وحدّدوا هل المثلّث متساوي الأضلاع؟

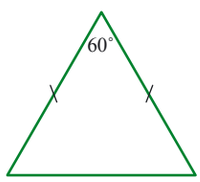
أ.



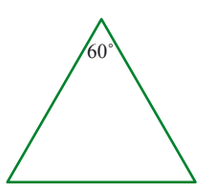
ب.



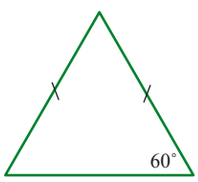
ت.



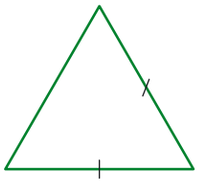
ث.



ج.



ح.



3. حدّدوا، في كلّ بَند، هل المثلّث متساوي الأضلاع؟ اِشرحوا.

أ. المثلّث متساوي الساقين، ومقدار زاوية الرأس 60°.

ب. المثلّث متساوي الساقين، ومقدار زاوية القاعدة 60°.

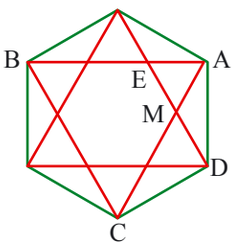
ت. مقدار إحدى زوايا المثلّث هو 60°.

ث. يوجد في المثلّث زاويتان، ومقدار كلّ واحدة منهما 60°.

يمكن أنْ نميّز مثلّثات متساوية الأضلاع بمساعدة مقدار زوايا كالتالي:

- إذا كان في مثلّث زاويتان مقدار كلّ واحدة مِنْهما 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.
- إذا كان في مثلّث متساوي الساقين زاوية واحدة مقدارها 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

4. أمامكم رسمة مسدّس منتظم وستّة أقطاره.



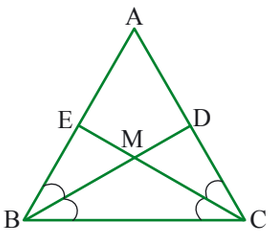
أ. ما مقدار زاوية واحدة في المسدس المنتظم؟

للتّذكير: مجموع الزوايا في الشكل السداسيّ هو 720°.

ب. اِحسبوا مقدار الزوايا في المثلّثات AEM, AMD وَ ABC.

كم مثلّثًا متساوي الأضلاع يوجد في الرسمة؟ علّلوا.

5. رُسم في مثلّث متساوي الأضلاع ABC منصّفا زاويتان.



أ. جِدوا مقدار زوايا المثلّث ΔBMC.

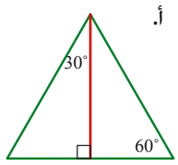
ب. أيّ نظريّة استعملتموها لتنفيذ الحسابات؟

مجموعة مهامّ

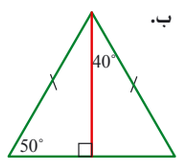
1. في كلّ بَند

- اِحسبوا مقدار زوايا المثلّث حسب المُعطيات المشار إليها.
- أشيروا إلى الأضلاع المتساوية بالطول، وحدّدوا هل المثلّث متساوي الأضلاع؟

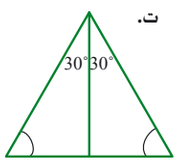
أ.



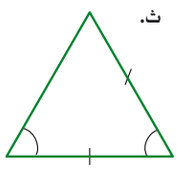
ب.



ت.

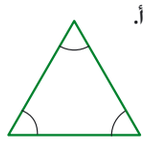


ث.

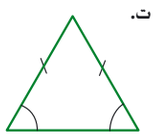


2. حدّدوا، في كلّ بَند، بناء على المُعطيات المشار إليها في الرسمة هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّث متساوي الأضلاع؟

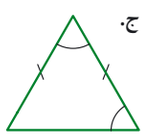
أ.



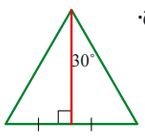
ت.



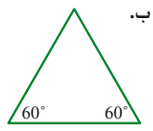
ج.



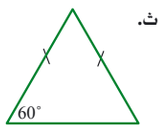
خ.



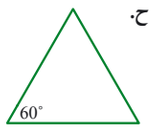
ب.



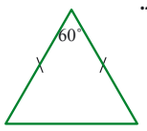
ث.



ح.



د.



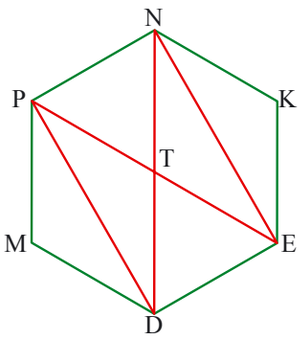
3. المضلّع **الأخضر** مسدّس منتظم. (مقدار كلّ زاوية في المسدّس المنتظم 120°).

أ. اِحسبوا مقدار الزوايا في كلّ المثلّثات الّتي تظهر في الرسمة.

ب. كم مثلّثًا متساوي الأضلاع يوجد في الرسمة؟ سجّلوها.

ت. كم مثلّثًا متساوي الساقين ليس متساوي الأضلاع يوجد في الرسمة؟ سجّلوها.

ث. كم مثلّثًا قائم الزاوية يوجد في الرسمة؟ سجّلوها.

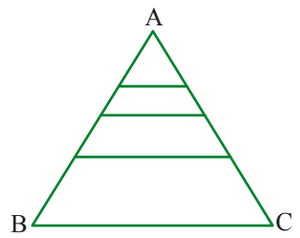


4. أمامكم رسمة مثلّث متساوي الأضلاع ومستقيمات متوازية للضلع BC.

أ. كم مثلثًا نَتَجَ؟

ب. اِشرحوا لماذا جميع المثلّثات متساوية الأضلاع؟

ت. هل المثلّثات متشابهة؟ علّلوا.



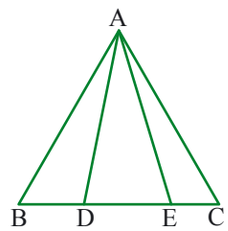
5. **مُعطى** ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.

$BD = CE$

أ. **المطلوب برهانه** $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

ب. اِشرحوا لماذا ΔADE متساوي الساقين؟

ت. هل يمكن أنْ يكون المثلّث ΔADE متساوي الأضلاع؟ علّلوا.

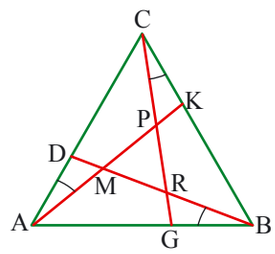


6. ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.

مقدار كلّ زاوية مشار إليها بقوس هو 15°.

أ. اِحسبوا مقدار الزوايا الأخرى في الرسمة.

ب. هل المثلّث PMR متساوي الأضلاع؟ اِشرحوا.



الدرس الثالث: صفات مثلّث قائم الزاوية

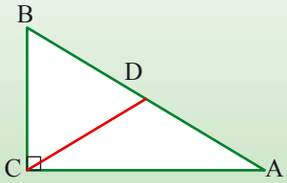
ΔABC هو مثلّث قائم الزاوية $\measuredangle BCA = 90^\circ$.

10 سم = AB

CD متوسّط للوتر AB.

هل يمكن أنْ نحسب طول CD؟

نتعلّم نظريّات عن مثلّث قائم الزاوية.

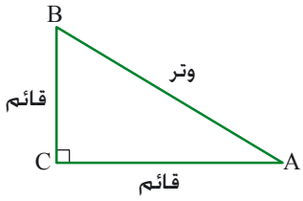


أُعِدّت الرسومات في هذا الدرس وفي مجموعة المَهامّ للتّوضيح، وقياسات الطول مُعطاة بالسم.

المتوسّط للوتر

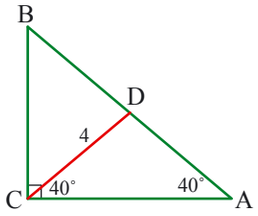
للتّذكير

نسمّي الضلعين اللّذين يحصران الزاوية القائمة، في المثلث القائم الزاوية، **"قائمان"**، ونسمّي الضّلع المقابل للزاوية القائمة **"وتر"**.



1. **مُعطى** ΔABC هو مثلّث قائم الزاوية.

4 سم = CD



أ. اِحسبوا مقدار الزوايا حسب المُعطيات المشار إليها في الرسمة.

جِدوا مثلّثين متساويي الساقين في الرسمة.

ب. علّلوا الاستنتاجات التالية.

استنتاج: $CD = BD = AD$

CD متوسّط للوتر

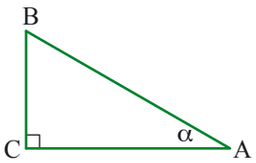
ت. ما طول الوتر؟ اِشرحوا.

رأينا في مَهمّة 1 مثال يتحقّق فيه:

في المثلّث القائم الزاوية المتوسّط للوتر (في الرسمة: CD) يساوي طول نِصف الوتر (في الرسمة $\frac{AB}{2}$).

نبيّن فيما بعد (في المَهمّة 2) أنّ هذا الادعاء صحيح دائمًا.

2. **مُعطى** ΔACB هو مثلّث قائم الزاوية.

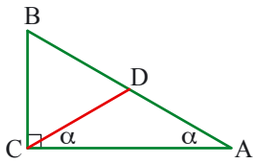


أ. عبّروا عن $\sphericalangle B$ بواسطة α.

ب. **بناء مساعد:** أُرسموا قطعة CD بحيث أنّ $\sphericalangle ACD = \alpha$.

نبيّن أن CD متوسّط للوتر ويساوي طول نِصف الوتر.

عبّروا عن $\sphericalangle BCD$ بواسطة α.



ت. أشيروا في الرسمة (بَند ب) إلى قطع متساوية في الطول.

ث. علّلوا الاستنتاجات التالية:

استنتاج: $CD = BD = AD$

CD متوسّط للوتر

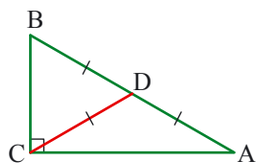
$CD = \frac{1}{2}AB$

برهنّا في المَهمّة 2 الـ **نظريّة**

في المثلّث القائم الزاوية طول المتوسّط للوتر يساوي نِصف طول الوتر.

مثال: في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة CD متوسّط للوتر.

$CD = BD = AD$

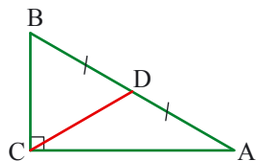


3. **مُعطى** المثلّث ACB قائم الزاوية ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$)

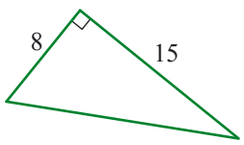
$AB = 10$ سم

CD متوسّط للوتر AB

ما طول CD؟ علّلوا.



4. سُجّلت مُعطيات في الرسمة.



أ. اِحسبوا طول الوتر.

(يمكن الاستعانة بنظريّة فيثاغوروس).

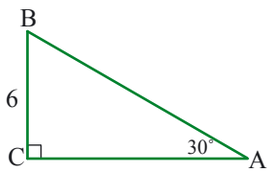
ب. اِحسبوا طول المتوسّط الوتر.

القائم مقابل زاوية مقدارها 30° في مثلّث قائم الزاوية

5. **مُعطى** ΔACB هو مثلّث قائم الزاوية ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$)

$\sphericalangle BAC = 30^\circ$

$BC = 6$ سم

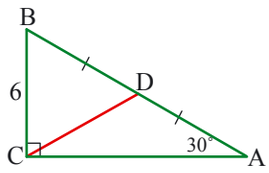


أ. اِحسبوا مقدار الزاوية $\sphericalangle ABC$.

ب. أُرسموا CD متوسّط للوتر AB.

أكملوا القطع المتساوية في الطول.

$CD =$ _____ $=$ _____



ت. قال **ماجد:** $\sphericalangle CBA = 60^\circ$ والمثلّث CBD هو متساوي الساقين.

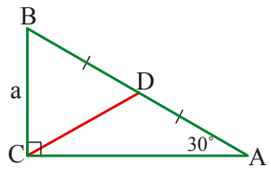
لذا؛ المثلّث CBD متساوي الأضلاع.

هل قول **ماجد** صحيح؟

ث. ما طول الوتر؟

ج. عبّروا عن طول الوتر AB بواسطة a (طول BC).

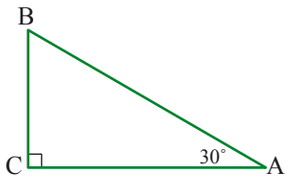
اشرحوا.



برهنّا في المَهمّة 5 ال **نظريّة**

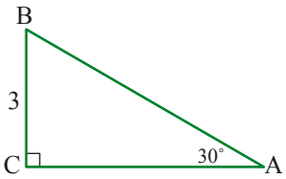
إذا كان مقدار إحدى الزوايا الحادّة، في مثلّث قائم الزاوية، هو 30° فإنّ طول القائم المقابل لهذه الزاوية يساوي نِصف طول الوتر.

مثال: في المثلّث الّذي يظهر في الرسمة $CB = \frac{AB}{2}$



6. اِحسبوا أطوال أضلاع المثلّث حسب المُعطيات المشار إليها في الرسمة.

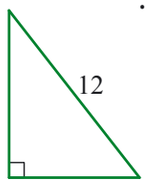
(يمكن الاستعانة بنظريّة فيثاغوروس).



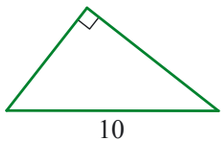
مجموعة مهامّ

1. أُرسموا، في كلّ مثلّث، متوسّط للوتر، وسجّلوا طوله.

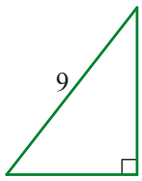
أ.



ب.



ت.

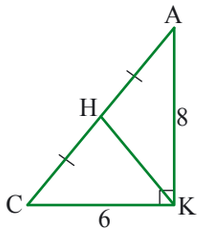


2. مُعطى مثلّث قائم الزاوية. جِدوا بناءً على المُعطيات المسجّلة في الرسمة:

أ. ما طول الوتر AC (استعينوا بنظريّة فيثاغوروس)؟

ب. ما طول المتوسّط KH؟

ت. هل توجد، في الرسمة، قِطَع طولها يساوي طول KH؟
إذا كانت الإجابة نعم فسجّلوها.

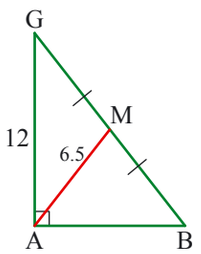


3. مُعطى ΔABG قائم الزاوية.
AM متوسّط للوتر.

أ. اِحسبوا طول الوتر.

ب. اِحسبوا طول AB.

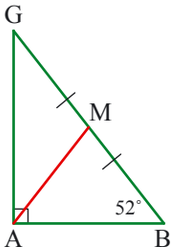
ت. اِحسبوا مساحة المثلّث.



4. مُعطى ΔABG قائم الزاوية.
AM متوسّط للوتر.

أ. اِشرحوا لماذا المثلّث ΔAMB متساوي الساقين؟

ب. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.



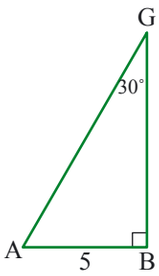
5. **مُعطى** ΔABG قائم الزاوية ($\measuredangle B = 90^\circ$).

$\measuredangle G = 30^\circ$

$AB = 5$ سم

أ. اِحسبوا أطوال أضلاع المثلّث.

ب. أُرسموا متوسّط للوتر (BM). ما طوله؟



6. **مُعطى** ΔABG قائم الزاوية.

AM متوسّط للوتر

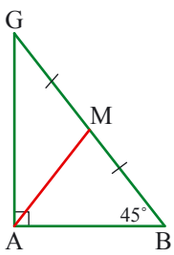
$\measuredangle B = 45^\circ$

أ. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.

ب. ما نوع المثلّث GAM؟

ما نوع المثلّث MAB؟

ما نوع المثلّث ABG؟



7. **مُعطى** ΔABG قائم الزاوية.

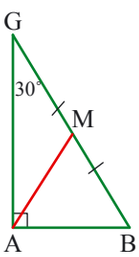
AM متوسّط للوتر

$\measuredangle G = 30^\circ$

أ. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.

ب. ما نوع المثلّث GAM؟

ما نوع المثلّث MAB؟



8. **مُعطى** ΔABC قائم الزاوية ($\measuredangle A = 90^\circ$)

$\measuredangle ACB = 30^\circ$

AD متوسّط للوتر

$AB = 6$ سم

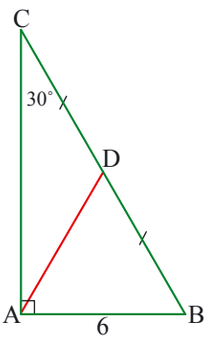
أ. اِحسبوا طول BC.

ب. اِحسبوا طول CD.

ت. اِحسبوا طول AD.

ث. جِدوا مقدار الزاويتين: $\measuredangle DAC$, $\measuredangle DAB$.

ج. جِدوا في الرسمة مثلّث متساوي الساقين ومثلّث متساوي الأضلاع. سجّلوهما.

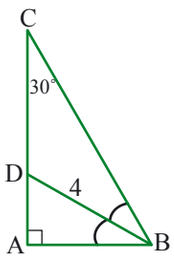


9. **مُعطى** ΔABC قائم الزاوية ($\measuredangle A = 90^\circ$)

$\measuredangle BCA = 30^\circ$

BD ينصّف الزاوية $\measuredangle ABC$

$BD = 4$ سم



أ. اِحسبوا مقدار زوايا المثلّثين DBC وَ ABD ، وسجّلوها في الرسمة.

ب. جِدوا طول CD.

ت. اِحسبوا طول AC.

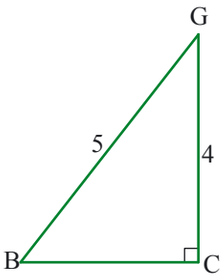
10. ΔBCG قائم الزاوية .

أ. اِحسبوا طول القائم BC بناءً على المُعطيات المسجّلة في الرسمة.

ب. اِحسبوا مساحة المثلّث.

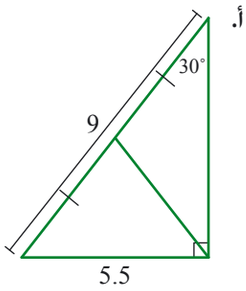
ت. أُرسموا متوسّطًا للوتر. ما طوله؟

ث. أيّ قطعة أطول: الارتفاع للوتر أم المتوسّط للوتر؟ علّلوا.

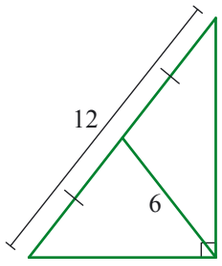


11. أمامكم مثلّثات، في أيّ مِنْها يوجد خطأ في المُعطيات؟

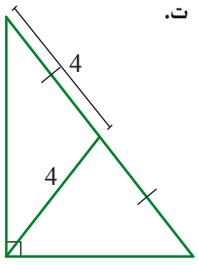
أ.



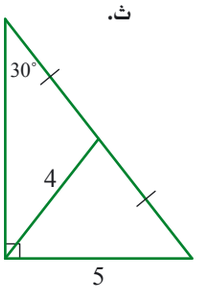
ب.



ت.



ث.



12. المثلّث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

CD متوسّط للوتر.

قال **نعيم:** $\Delta BCD \cong \Delta ACD$ حسب القائم والوتر.

سجّلوا المُعطيات الّتي استعملها **نعيم.**

قال **رائد:** $\Delta BCD \cong \Delta ACD$ حسب ض.ض.ض.

سجّلوا المُعطيات الّتي استعملها **رائد.**

قال **جواد:** $\Delta BCD \cong \Delta ACD$ حسب ض.ز.ض.

سجّلوا المُعطيات الّتي استعملها **جواد.**

يمكن أنْ نبرهن تَطَابُق المثلّثين حسب ز.ض.ز أيضًا. اِشرحوا كيف؟