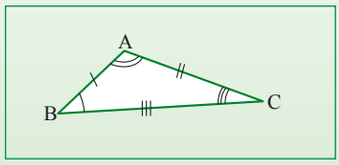
الوحدة الثانية عشرة: نشرح ونبرهن

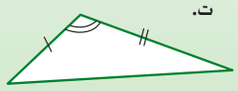
الدرس الأوّل: حسب أيّ نظريّة؟

حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّث ABC يتطابق مع المثلّث ؟



أ.

ب.

ت. 

ث.

نتعلّم كيفيّة استخلاص استنتاجات والتعليل بواسطة نظريّات.

1. أ. مُعطى $EA = DB$

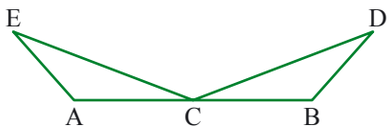
$\measuredangle A = \measuredangle B$

عيّنوا المعطيات في الرسمة.

هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟

إذا كانت الإجابة نعم، فحسب أيّ نظريّة؟

إذا كانت الإجابة لا، فارسموا **مثالاً مضادا.**



ب. مُعطى $EA = DB$

$\measuredangle A = \measuredangle B$

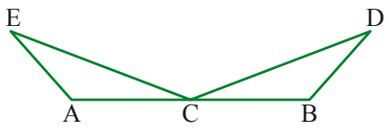
C منتصف AB

عيّنوا المُعطيات في الرسمة.

هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟

إذا كانت الإجابة نعم، فحسب أيّ نظريّة؟

إذا كانت الإجابة لا، فارسموا **مثالا مضادًا.**



فحصنا، في مَهمّة 1، هل ينتج الاستنتاج مِنَ المُعطيات؟

إذا كانت الإجابة نعم، علّلنا بواسطة نظريّة.

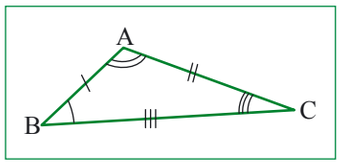
إذا كانت الإجابة لا، رسمنا مثالًا مضادًا يبيّن أنّ المُعطيات غير كافية لاستخلاص الاسستنتاج.

2. نتطرّق إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

اِفحصوا، في كلّ بند، هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّث يتطابق مع المثلّث ABC؟

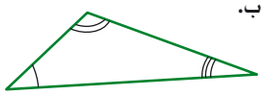
إذا كانت الإجابة نعم، فحسب أيّ نظريّة؟

إذا كانت الإجابة لا، فارسموا مثالًا مضادًّا.

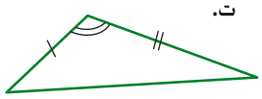


أ.

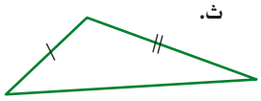
ب.



ت.



ث.

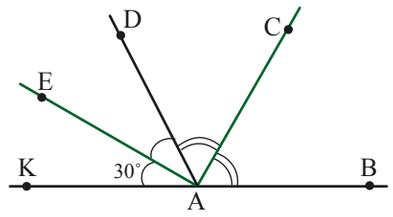


3. أ. **مُعطى** في كلّ رسمة: AE ينصّف الزاوية ∢KAD

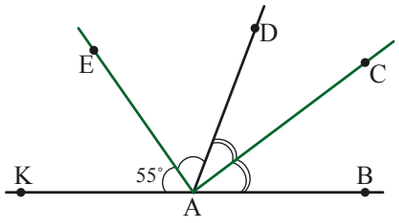
AC ينصّف الزاوية ∢DAB

- اِحسبوا مقدار كلّ الزوايا في الرسمة.
- جِدوا مقدار الزاوية (∢EAC) المحصورة بين منصّفيّ الزاويتين.

I



II

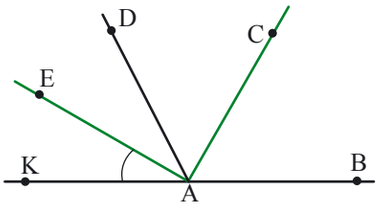


ب. اِختاروا مقدارًا أصغر من 90° للزاوية ∢KAE.

∢KAE = _____°

اِحسبوا مقدار كلّ الزوايا في الرسمة.

أكملوا: ∢EAC = _____°



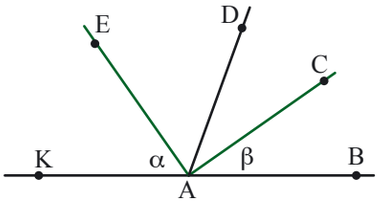
4. **مُعطى** AE ينصّف الزاوية ∢KAD.

AC ينصّف الزاوية ∢DAB.

أ. عبّروا عن الزاويتين ∢EAD وَ ∢DAC بواسطة α أو β.

ب. أكملوا: 2α + 2β = _____° علّلوا.

استنتاج ∢EAC = α + β = _____°

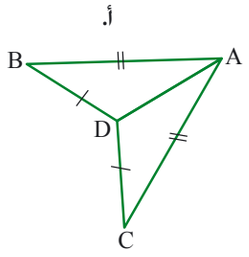


رأينا في المَهامّ السابقة أمثلة، وبرهنا **نظريّة** منصّفات الزوايا المُكملة متعامدة.

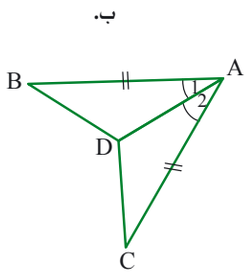
مجموعة مهامّ

1. عُيّنت، في كلّ بَند، مُعطيات يمكن الاستنتاج مِنْها أنّ المثلّثين متطابقان.
سجّلوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.
اذكروا نظريّة التطابق الّتي اعتمد عليها الاستنتاج.

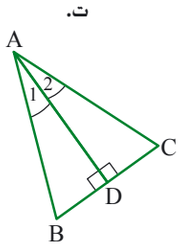
أ.



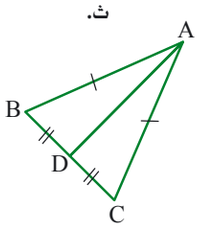
ب.



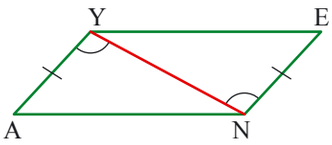
ت.



ث.



2. عُيّنت مُعطيات في الشكل الرباعيّ YENA.



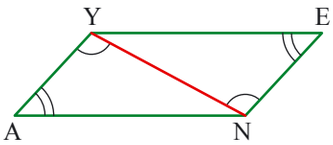
استنتاج $\Delta YAN \cong \Delta NEY$.

أ. سجّلوا المُعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثين؟

ت. $\measuredangle YNA = \measuredangle EYN$. علّلوا.

3. عُيّنت مُعطيات في الشكل الرباعيّ YENA.



استنتاج $\Delta YAN \cong \Delta NEY$.

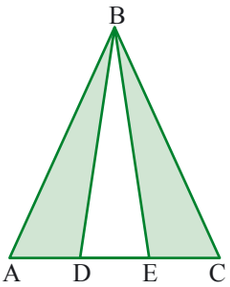
أ. سجّلوا المُعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثين؟

ت. YENA متوازي أضلاع. علّلوا.

4. **مُعطى** مثلّث ABC متساوي الساقين $(BC = AB)$
$AD = EC$

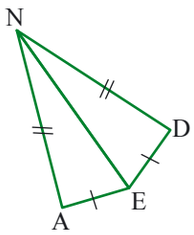
استنتاج $\Delta ABD \cong \Delta CBE$



أ. أشيروا حسب المُعطيات إلى قِطَع متساوية في الطول، وإلى زوايا متساوية بالمقدار.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثين؟

5. يوجد في الشكل الرباعيّ EDNA زوجان مِنَ الأضلاع المتساوية في الطول، كما يظهر في الرسمة.



استنتاج $\Delta EDN \cong \Delta EAN$

أ. سجّلوا المُعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثين؟

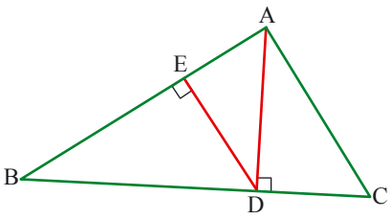
ت. اشرحوا لماذا NE ينصّف زاويتين في الشكل الرباعيّ؟

6. **مُعطى** AD ارتفاع في ΔABC.

DE ارتفاع في ΔBDA.

$\sphericalangle B = 35^\circ$

$\sphericalangle DAC = 35^\circ$



أ. اِحسبوا مقدار جميع الزوايا في الرسمة.

ب. كم مثلّثًا قائم الزاوية يوجد في الرسمة؟

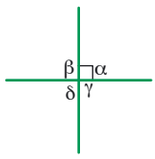
ت. هل جميع المثلّثات متساوية بمقدار زواياها؟

ث. هل توجد مثلّثات متطابقة في الرسمة؟ علّلوا.

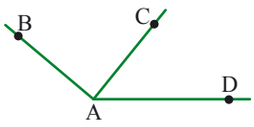
ج. هل يوجد في الرسمة مثلّثات متشابهة؟ علّلوا.

7. سجّلوا، في كلّ بَند، المُعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة، واشرحوا لماذا النظريّة صحيحة؟

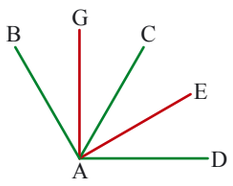
أ. إذا كانت إحدى الزوايا قائمة بين مستقيمين متقاطعين، فإنّ الزوايا الثلاث الأخرى قائمة أيضًا.



ب. إذا كان AC منصّفًا للزاوية المنفرجة $\sphericalangle BAD$، فإنّ الزاوية $\sphericalangle CAD$ أكبر من 45°.



ت. إذا كان AC منصّفًا للزاوية المنفرجة $\sphericalangle BAD$،
AE ينصّف الزاوية $\sphericalangle CAD$ وَ AG ينصّف الزاوية $\sphericalangle BAC$، فإنّ
$\sphericalangle GAE$ زاوية حادّة.



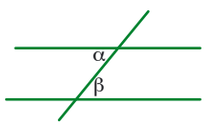
الدرس الثاني: نعلّل بواسطة زوايا بين متوازيات

أمامكم صورة القسم الأماميّ لبيت.
قِطَع الخشب الّتي تمّ تثبيتها بشكل أفقيّ متوازية.
ما مقدار الزاوية α المشار إليها في الصورة؟
أشيروا في الصورة إلى زاويتين آخرتين، بحيث
يكون مقدار كلّ واحدة منهما كمقدار الزاوية
α. أشيروا في الصورة إلى زاويتين ، بحيث
يكون مقدار كلّ واحدة منهما 60°.

سنتعلّم كيفيّة استخلاص استنتاجات والتعليل بواسطة نظريّات.

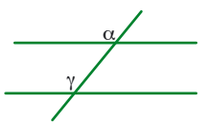
للتذكير

مُعطى مستقيمان ومستقيم ثالث يتقاطع معهما.
إذا كان المستقيمان متوازيين:
فإنّ الزوايا **المتبادلة** متساوية بالمقدار،



$\alpha = \beta$

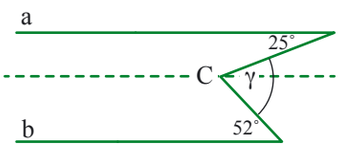
والزوايا **المتناظرة** متساوية بالمقدار.



$\alpha = \gamma$

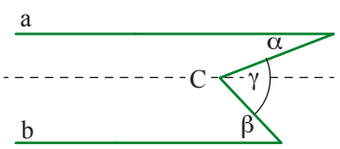
1. مُعطى a || b.

اِحسبوا مقدار الزاوية γ. علّلوا.
(استعينوا بالمستقيم المتقطّع الموازي للمستقيم a وللمستقيم b).



2. مُعطى a || b.

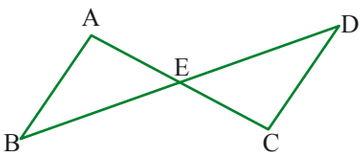
عبّروا عن مقدار الزاوية γ بمساعدة α وَ β. علّلوا.
(استعينوا بالمستقيم المتقطّع الموازي للمستقيم a وللمستقيم b).



3. مُعطى AB || CD.

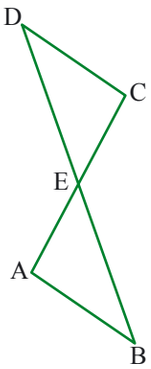
أ. أشيروا إلى زوايا متساوية في المثلّثين.

ب. هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟
إذا كانت الإجابة نعم، فأيّ نظريّة اعتمدتم عليها؟
إذا كانت الإجابة لا، فارسموا مثالًا مضادًّا.



4. مُعطى $AB \parallel CD$

$AB = CD$



أ. أشيروا إلى زوايا متساوية في المثلّثين.

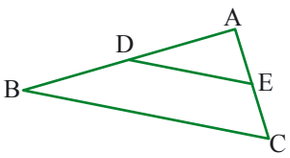
ب. هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟

إذا كانت الإجابة نعم، فأيّ نظريّة اعتمدتم عليها؟

إذا كانت الإجابة لا، فارسموا مثالًا مضادًّا.

5. المثلّث ABC هو مثلّث مختلف الأضلاع.

مِنْ منتصف الضلع AB للمثلّث رُسمت قطعة DE موازية للضّلع BC.



أ. أشيروا إلى زوايا متساوية.

ب. استنتاج $DABC \sim DADE$. علّلوا.

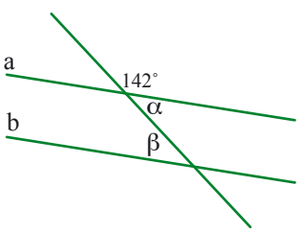
ت. ما هي نسبة التشابه $\left(\frac{AB}{AD}\right)$؟

ث. ما هي النسبة بين مساحتيّ المثلّثين؟

مجموعة مهامّ

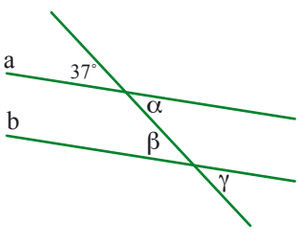
1. مُعطى $a \parallel b$.

اِحسبوا وعلّلوا.



أ. α = _____° تعليل: _____

β = _____° تعليل: _____



ب. α = _____° تعليل: _____

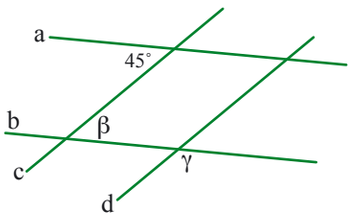
β = _____° تعليل: _____

γ = _____° تعليل: _____

2. أ. **مُعطى** a || b.

c || d.

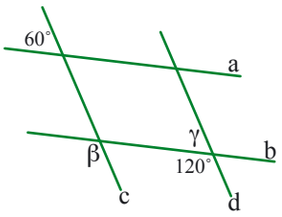
اِحسبوا مقدار الزاويتين β وَ γ وعلّلوا.



ب. **مُعطى** a || b.

c || d.

اِحسبوا مقدار الزاويتين β وَ γ وعلّلوا.



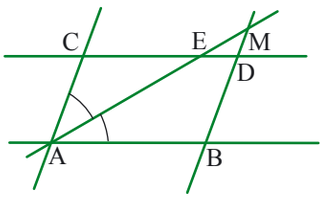
3. **مُعطى** AB || CD

AC || BD

AE ينصّف الزاوية CAB.

$\measuredangle EAB = \alpha$

سجّلوا، في الرسمة، 3 زوايا أخرى، بحيث تساوي كلّ واحدة مِنها الزاوية α. علّلوا.

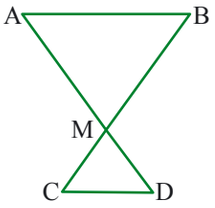


4. **مُعطى** AD وَ BC مستقيمان متقاطعان.

AB || CD

أ. سجّلوا في المثلّث ABM والمثلّث DCM ثلاثة أزواج مِنَ الزوايا المتساوية.

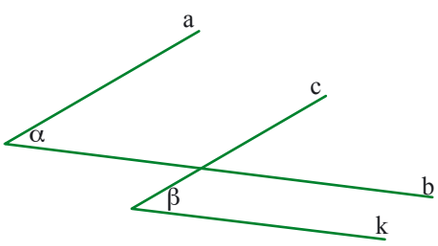
ب. هل $\Delta DCM \cong \Delta ABM$؟



5. **مُعطى** a || c.

b || k.

اِشرحوا لماذا $\alpha = \beta$؟

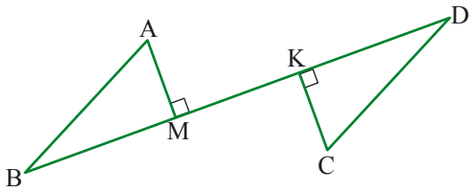


6. مُعطى $AB = CD$

$AB \parallel CD$

$CK \perp BD$

$AM \perp BD$



أ. أشيروا في المثلّثين إلى زوج آخر مِنَ الزوايا المتساوية.

ب. استنتاج $\Delta CDK \cong \Delta ABM$. علّلوا.

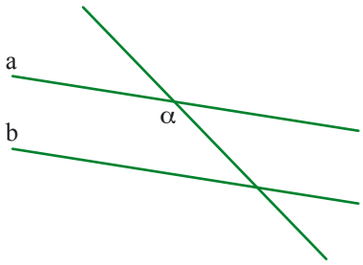
ت. استنتاج $CK = AM$. علّلوا.

ث. أُرسموا القطعتين AD وَ CB، واشرحوا لماذا مساحة ΔABD تساوي مساحة ΔDCB؟

7. أ. مُعطى $a \parallel b$.

عيّنوا في الرسمة زاوية β بالتبادل مع α.

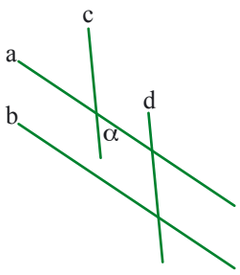
عيّنوا في الرسمة زاوية γ بالتناظر مع α.



ب. مُعطى $c \parallel d$.

عيّنوا في الرسمة زاوية β بالتبادل مع α.

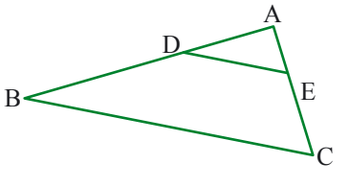
عيّنوا في الرسمة زاوية γ بالتناظر مع α.



8. المثلّث ABC هو مثلّث مختلف الأضلاع.

قُسّم الضلع AB للمثلّث ΔABC بحيث أنّ: $AD = \frac{1}{3}AB$,

ورُسمت قطعة DE موازية للضّلع BC.



أ. أشيروا إلى زوايا متساوية.

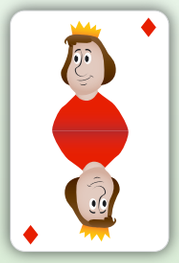
ب. استنتاج $DADE \sim DABC$. علّلوا.

ت. ما هي نسبة التشابه $\left(\frac{AB}{AD}\right)$؟

ث. ما هي النسبة بين مساحتيّ المثلّثين؟

الدرس الثالث: نبدّل بين المُعطيات والاستنتاجات

وردت محادثة في كتاب "أليس في بلاد العجائب" حول حفلة الشاي الّتي أجراها صانع القبّعات المجنون:



أ. قال أرنب الربيع:"إذا كان الأمر كذلك، فيجب أنْ تقولي ما تفكّري".
أجابت إليس بسرعة: "أنا أقول كذلك"، "على أيّ حال **أفكّر أنا فيما أقوله**، وهذا بالطبع الشيء نفسه".

ب. قال صانع القبّعات: "هذا ليس نفس الشيء بتاتًا"، "إذا كان الأمر كذلك يمكنك القول: **ترى عيناي ما آكله** مثل **أنا آكل ما تراه عيني!**".

ت. أضاف الأرنب: "إذا كان الأمر كذلك يمكنك القول: **"أنا أريد ما يعطوني** **مثل يعطوني ما أريد"**.

ماذا حاول الضيوف أنْ يشرحوا لإليس في احتفال الشاي؟

نفحص هل التبديل بين معطى واستنتاج في نظريّة أو جملة صحيحة يُنتج نظريّة أو جملة صحيحة أيضًا؟

1. نصوغ زوج ادّعاءات صانع القبّعات، في بَند ب في المَهمّة الافتتاحيّة، بواسطة "إذا - فإنّ".
"**إذا** أنا آكل **فإنني** أرى (الطعام) هذا مثل **إذا** أرى (شيء معيّن) **فإنّني** آكله".
إليس تفكر أنّ الادّعائين لهما المعنى نفسه. هل تفكيرها صحيح؟ اشرحوا.

2. أمامكم عدّة جُمل صحيحة.
بدّلوا بين المُعطى والاستنتاج وافحصوا هل الادّعاء الجديد هو ادّعاء صحيح أيضًا؟
أ. **إذا** كان يسكن شخص في تل أبيب **فإنّه** يسكن في دولة إسرائيل.
ب. **إذا** كان اليوم عيد الأم **فإنّ** الشهر هو نيسان.
ت. **إذا** كان اليوم الإثنين فإنّ البارحة كان يوم الأحد.

3. أمامكم عدّة جُمل صحيحة.
بدّلوا بين المُعطى والاستنتاج وافحصوا هل الادّعاء الجديد هو ادّعاء صحيح أيضًا؟
أ. **إذا** كان رقم آحاد عدد معيّن هو 5 **فإنّ** العدد يقبل القِسْمة على 5.
ب. **إذا** كان رقم آحاد عدد معيّن هو 0 **فإنّ** العدد يقبل القِسْمة على 10.
ت. **إذا** كانت الزوايا متقابلة بالرأس **فإنّها** متساوية في المقدار.
ث. **إذا** كان المثلّثان متطابقين **فإنّ** أضلاع المثلّث الأول تساوي أضلاع المثلّث الثاني.
ج. **إذا** كان المثلّثان متطابقين **فإنّ** زوايا المثلّثين متساوية بالمقدار.

عندما نبدّل بين مُعطيات النظريّة واستنتاجات النظريّة نحصل على **نظريّة عكسيّة**.
الادّعاء العكسيّ غير صحيح بالضرورة.

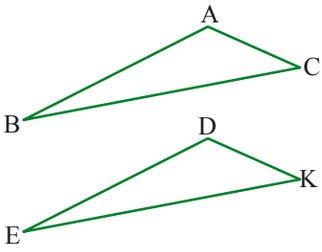
مثال: تظهر في مَهمّة 3 بَند ج نظريّة **إذا** كان المثلّثان متطابقين **فإنّ** زوايا المثلّثين متساوية بالمقدار.
ادّعاء عكسيّ للنظريّة: إذا كانت زوايا مثلّث واحد تساوي بالمقدار زوايا مثلّث آخر فإنّ المثلّثين متطابقان.
الادّعاء العكسيّ غير صحيح.

4. نظريّة إذا كان زوج مِنَ المثلّثات متطابقة فإنّ المساحتين متساوية.

أ. سجّلوا المُعطيات والمطلوب برهانه في النظريّة.

ب. بدّلوا بين المُعطيات واستنتاج النظريّة، وسجّلوا الادّعاء العكسيّ الناتج.

ت. هل الادّعاء العكسيّ صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا. إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

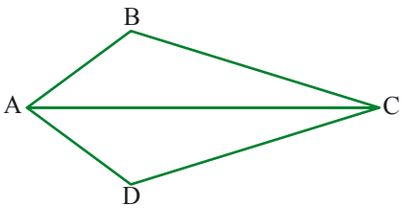


5. في الشكل الرباعيّ ABCD.

مُعطى $AB = AD$

$BC = DC$

استنتاج يقسّم القُطر AC الشكل الرباعيّ إلى مثلّثين متطابقين.



أ. حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثين؟

ب. بدّلوا بين المُعطيات والاستنتاج، وسجّلوا ادّعاء عكسيّ.

ت. قال **لؤي:** الادّعاء العكسيّ هو "إذا قسّم القُطر AC الشكل الرباعيّ إلى مثلّثين متطابقين، فإنّ الشكل الرباعيّ فيه زوج مِنَ الأضلاع المتجاورة المتساوية في الطول"، وهذا الادّعاء صحيح.

قال **يوسف:** الادّعاء العكسيّ غير صحيح.
رسمتُ الشكل الرباعيّ ABCD والقُطْر AC يقسّمه إلى مثلّثين متطابقين، ولا يوجد فيه زوج مِنَ الأضلاع المتجاورة المتساوية.

مَنْ مِنْهما قوله صحيح؟ اِشرحوا.

مجموعة مهامّ

1. أمامكم عدّة نظريّات. صوغوا ادّعاءً عكسيًّا لكلّ واحدة منها.
افحصوا هل الادّعاء العكسيّ للنّظريّة المُعطاة هو ادّعاء صحيح؟ اِشرحوا.

أ. **إذا** سقط مطر **فإنّه** يوجد غيوم في السماء.

ب. **إذا** كنتَ تسكن في مدينة القدس **فإنّك** تسكن في عاصمة إسرائيل.

ت. **إذا** كان مجموع أرقام عدد هو 3 **فإنّ** العدد يُقْسَم على 3.

ث. **إذا** كانت مُعطاة المعادلة $x + 3 = 11$ **فإنّ** حلّ المعادلة هو $x = 8$.

ج. **إذا** كان عدد يقبل القِسْمة على 10 **فإنّ** رقم آحاده صفر.

2. أمامكم عدّة نظريّات. صوغوا ادّعاءً عكسيًّا لكلّ واحدة منها.
اِفحصوا هل الادّعاء العكسيّ للنظريّة المُعطاة هو ادّعاء صحيح؟ اِشرحوا.

أ. **إذا** كان مثلّثان متطابقين **فإنّ** أضلاع المثلّث الأوّل تساوي أضلاع المثلّث الثاني.

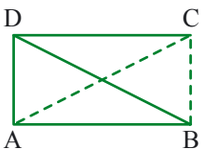
ب. **إذا** كان الشكل الرباعيّ مربّعًا **فإنّ** جميع زواياه قائمة.

ت. **إذا** كان الشكل الرباعيّ مستطيلًا **فإنّ** جميع زواياه قائمة.

ث. **إذا** كانت الزاويتان مُكملتين **فإنّ** مجموعهما $180°$.

ج. **إذا** كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس **فإنّهما** متساويتين.

3. نظريّة **إذا** كان الشكل الرباعيّ مستطيلاً فإنّ أقطاره متساوية في الطول.



أ. سجّلوا المُعطيات والمطلوب إثباته.

ب. صوغوا ادّعاءً عكسيًّا للنظريّة المُعطاة.

ت. الادّعاء العكسيّ غير صحيح. اُرسموا مثالًا مضادًّا (شكل رباعي أقطاره متساوية في الطول وليس مستطيلًا).

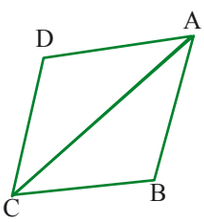
4. نظريّة إذا كانت جميع الأضلاع في الشكل الرباعيّ ABCD متساوية في الطول فإنّ $\measuredangle D = \measuredangle B$.

أ. سجّلوا المُعطيات والمطلوب إثباته.

ب. سجّلوا المُعطيات والمطلوب إثباته في الادّعاء العكسيّ.

ت. صوغوا الادّعاء العكسيّ بالكلمات.

ث. ارسموا مثالًا يبيّن أنّ الادّعاء العكسيّ غير صحيح.



5. أمامكم نظريّات.

- صوغوا كلّ نظريّة مِنَ النظريّات التالية بمساعدة "إذا - فإنّ".
- صوغوا ادّعاء عكسيًّا للنّظريّة المُعطاة.
- اِفحصوا هل الادّعاء العكسيّ هو ادّعاء صحيح؟ واشرحوا.

أ. محيطات المثلّثات المتطابقة متساوية.

ب. في المربّع جميع الأضلاع متساوية في الطول.

ت. في المربّع جميع الزوايا متساوية بالمقدار.

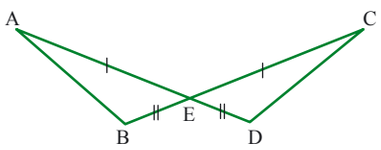
ث. في المستطيل جميع الزوايا متساوية بالمقدار.

6. مُعطى $AE = CE$

$BE = DE$

استنتاج $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

$\sphericalangle B = \sphericalangle D$



أ. اِشرحوا لماذا $\Delta ABE \cong \Delta CDE$؟

ب. هل الاستنتاج المسجّل ينتُجُ مِنْ تطابق المثلّثات في بَند أ؟ اشرحوا.

ت. سجّلوا ادّعاء عكسيًّا: بدّلوا بين المُعطيات والاستنتاجات وسجّلوها.

ث. هل الادّعاء العكسيّ صحيح؟

(هل الاستنتاجات الّتي سجّلتموها في بَند ت تنتُج مِنَ المُعطيات الّتي سجلتموها؟).

ج. رسم **سامر** الرسمة التالية.

هل رسمة **سامر** هي مثال يُبيّن أنّ الادّعاء العكسيّ المسجّل في بَند أ غير صحيح؟ اِشرحوا.