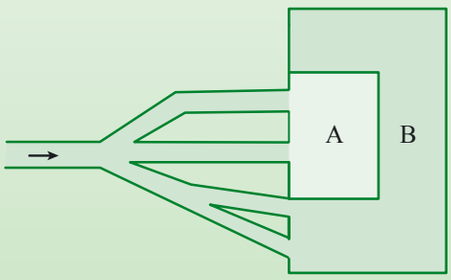
الوحدة العاشرة: رسم تخطيطيّ "شجرة"

الدرس الأوّل: رسم تخطيطيّ "شجرة"

عاش ملك قبل سنين كثيرة، وكانت عنده بنت جميلة.
أراد الملك أنْ يُزوّج ابنته إلى وزير مِن مملكة مجاورة، لكنّها أحبّت شابًا مِن بُسطاء الشعب.
قرّر الملك أنْ يكون القرار عن طريق الحظّ وابنته الحكيمة.
قال **الملك:** هنالك متاهة تحت القصر (اُنظروا الرسمة).
تختار الأميرة أنْ تقف في القاعة A أم في القاعة B.
يدخل الشاب الّذي يحبّ الأميرة في المتاهة، إذا وصل الأميرة فيستسلم الملك لرغبة ابنته.



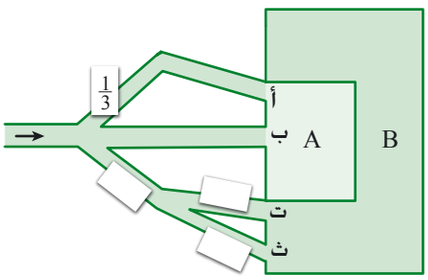
هل مِنَ الأفضل أنْ تقف الأميرة في القاعة A أم في القاعة B (في كلّ مفترق، احتمال اختيار كلّ واحد مِنَ المسارات متساوٍ)؟ اشرحوا.

نستعمل الرسم التخطيطيّ "شجرة" لحساب الاحتمالات.

نتطرّق في المَهامّ 1 - 3 إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. سجّلوا إلى جانب كلّ مَسار، في الرسمة، احتمال أنْ يختاره الشاب عندما يصل المفترق.

مثال: عندما يصل الشاب المفترق الأوّل هنالك تفرّع إلى ثلاثة مسارات.
لذا احتمال أنْ يختار الشاب المسار الأيسر هو $\frac{1}{3}$



ب. أكملوا لكلّ مسار احتمال السير على طوله.

مسار أ _____ مسار ب _____

ت. خمّنوا: ما احتمال أنْ يصل الشاب القاعة A؟

ث. قالت **انتهال:** احتمال أنْ يصل الشاب القاعة A هو احتمال أنْ يختار مسار أ و**أيضًا** احتمال أنْ يختار مسار ب، هذا يعني أنّ الاحتمال $\frac{2}{3}$.

هل قول **انتهال** صحيح؟

2. أ. خمّنوا: ما احتمال أنْ يختار الشاب المسار ت؟

ب. قال **راني:** إذا اختار الشاب المسار ت، فهو اختار المسار السفليّ في المفترق الأوّل، واختار المسار العلويّ في المفترق الثاني. الاحتمال هو $\frac{1}{3}$ في المسار الأوّل وَ $\frac{1}{2}$ في المسار الثاني. لذا الاحتمال هو $\frac{1}{2}$ مِنْ $\frac{1}{3}$ هذا يعني أنّ الاحتمال $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

هل قول **راني** صحيح؟

ت. ما احتمال أنْ يختار الشاب المسار ث؟

ث. ما احتمال أنْ يصل الشاب القاعة B؟

3. أين مِنَ الأفضل أنْ تقف الأميرة؟ اشرحوا.

تعرّفنا في المَهامّ 1 - 3 على رسم تخطيطيّ إضافيّ لحساب الاحتمالات. نسمّي هذا الرسم التخطيطيّ **رسم تخطيطيّ "شجرة"**.

في الرسم التخطيطيّ "شجرة":

- إذا كان أكثر مِنْ مسار واحد مناسب للحدث، **نجمع** احتمالات كلّ المسارات المناسبة للحدث.

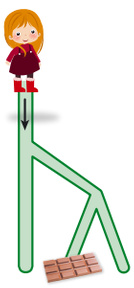
مثال: يستطيع الشاب، في المَهمّة 1، أنْ يصل القاعة A بطريقتين:

عبر المسار أ (الاحتمال $\frac{1}{3}$) **أو** عبر المسار ب (الاحتمال $\frac{1}{3}$)

لذا الاحتمال أنْ يصل الشاب القاعة A هو: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

- إذا تقدّمنا في المسار نفسه، ، **نضرب** الاحتمالات المسجّلة على كلّ فرع في المسار.

مثال: في المَهمّة 2، الاحتمال أنْ يذهب الشاب في المسار ت هو: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ، وذلك بعد أنْ اختار في المفترق الأوّل المسار السفليّ (الاحتمال $\frac{1}{3}$)، وفي المفترق الثاني اختار المسار العلويّ (الاحتمال $\frac{1}{2}$). هذا يعني أنّ الاحتمال هو $\frac{1}{2}$ من $\frac{1}{3}$ ؛ لذا الاحتمال المناسب هو حاصل ضرب الاحتمالات $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\right)$.



4. تقف **جميلة** في بداية الطريق، ويجب أنْ تختار مساراً كي تصل الشوكولاطة.

أ. قال **أسعد**: الاحتمال أنْ تجد **جميلة** الشوكولاطة هو $\frac{1}{3}$ ، لأنّه في الرسمة يوجد ثلاثة مسارات؟

هل قول **أسعد** صحيح؟ اشرحوا.

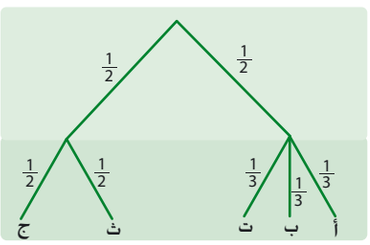
ب. سجّلوا إلى جانب كلّ طريق، في الرسمة، احتمال أنْ تسير **جميلة** على طوله.

ت. ما احتمال أنْ تختار **جميلة** المسار الصحيح؟ اشرحوا.

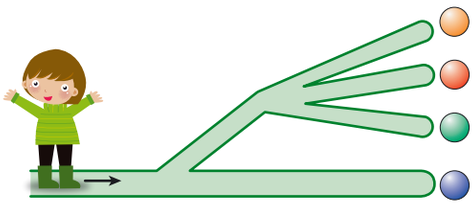
مجموعة مهامّ

1. سُجّل احتمال على كلّ فرع في الرسم التخطيطيّ "شجرة" التالي.

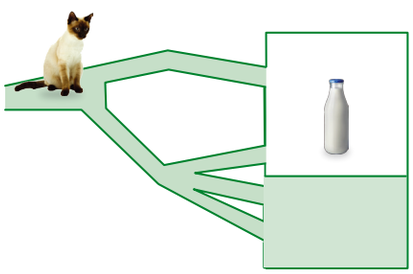
سجّلوا لكلّ مسار احتمال السير على طوله.



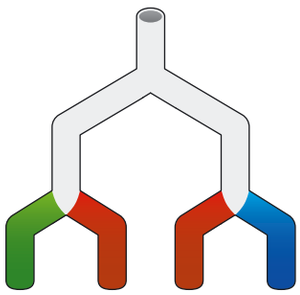
2. يقف **عماد** في بداية طريق يؤدّي إلى أربع كرات.
يختار طريقه في كلّ مفترق بطريقة عشوائيّة.
(في كلّ مفترق احتمال الاختيار متساو.)
أيّ كرة لها الاحتمال الأكبر أنْ تُختار؟
اِحسبوا الاحتمال المناسب للنّتيجة.



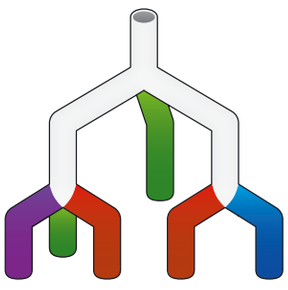
3. يقف قطّ في بداية الطريق.
يرغب القطّ في الوصول إلى قنّينة الحليب (اُنظروا الرسمة على الخلفيّة البيضاء).
في كلّ مفترق احتمال الاختيار متساو.
ما احتمال أنْ يختار القطّ المسار الّذي يصل فيه إلى قنّينة الحليب؟



4. أُدخلت كرة إلى الفتحة العلويّة لأنبوب متفرّع.
تستطيع الكرة أنْ تصل الأنبوب **الأحمر**، **الأزرق** أو **الأخضر**.
اِحتمال دخول الكرة في أيّ مسار، في كلّ مفترق، هو متساوٍ.
أ. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأزرق**؟
ب. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأخضر**؟
ت. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأحمر**؟



5. أُدخلت كرة إلى الفتحة العلويّة لأنبوب متفرّع.
تستطيع الكرة أنْ تصل الأنبوب **الأحمر**، **الأزرق** أو **البنفسجيّ**.
احتمال دخول الكرة في أيّ مسار، في كلّ مفترق، هو متساوٍ.
أ. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأزرق**؟
ب. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **البنفسجيّ**؟
ت. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأخضر**؟
ث. ما احتمال أنْ تصل الكرة الأنبوب **الأحمر**؟

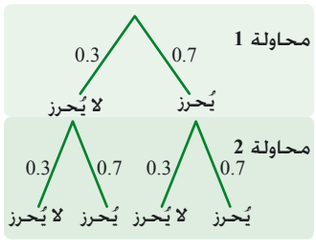


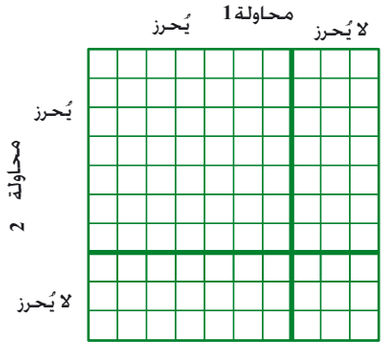
الدرس الثاني: رسم تخطيطيّ شجرة ورسم تخطيطيّ "مساحة"

يتمرّن **يوسف** على احراز الكرة في السلّة. يرمي الكرة نحو السلّة مرّتين.
احتمال أنْ يُحرز الكرة في محاولة منفردة هو 0.7
قال **سائد:** احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة مرّتين هو $0.7 + 0.7 = 1.4$
قال **عماد:** احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة مرّتين هو $0.7 \cdot 0.7 = 0.49$
مَنْ منهما قوله صحيح؟
نحسب احتمالات بمساعدة رسم تخطيطيّ "شجرة" ورسم تخطيطيّ "مساحة".

نتطرّق في المَهمّتين 1 وَ 2 إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

1. أمامكم رسم تخطيطيّ "شجرة" ورسم تخطيطيّ "مساحة"، وهما يصفان احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في السلّة.





أ. ما احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة، في السلة، في المحاولة الأولى فقط؟
لوّنوا المسار المناسب في الرسم التخطيطيّ "شجرة" والمساحة المناسبة في الرسم التخطيطيّ "مساحة".

ب. ما احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة، في السلة، في المحاولة الثانية فقط؟
لوّنوا المسار المناسب في الرسم التخطيطيّ "شجرة" والمساحة المناسبة في الرسم التخطيطيّ "مساحة".

ت. ما احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة، في السلّة، مرّة واحدة بالضبط؟

للتّذكير

- احتمال الحصول على جميع النتائج الممكنة هو 1 (مجموع احتمالات جميع النتائج).

مثال: في المَهمّة 1، احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في محاولة منفردة هو0.7، والاحتمال أنْ لا يُحرز **يوسف** الكرة في محاولة منفردة هو 0.3، هذا يعني أنّ مجموع الاحتمالات هو 1 $(0.3 + 0.7)$.

- **أحداث مكملة** هي أحداث غريبة تشمل جميع النتائج.

مثال: في المَهمّة 1، الحدث "أحرز **يوسف** في محاولة 1" وَ "لم يُحرز **يوسف** في محاولة 1" هما حدثان مكملان، لأنّهما غريبان الواحد للآخر، وهما يحتويان على جميع النتائج الممكنة.

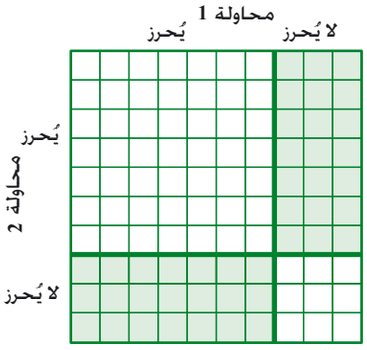
2. أ. يرمي **يوسف** الكرة نحو السلّة مرّتين. هل يمكن أنْ يكون قول سائد صحيح؟ أعطوا تعليلين.

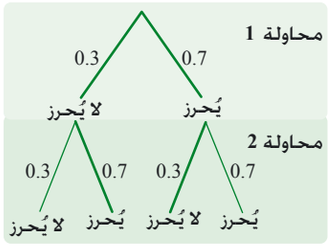
ب. ما احتمال أنْ لا يُحرز **يوسف** الكرة، في السلّة، في أيّ محاولة؟ اِشرحوا.

في المَهمّة 1 بَند ت، احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في السلّة **مرّة واحدة** مساوٍ للاحتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في المحاولة الأولى وليس في المحاولة الثانية (مسار **أحمر** $0.21 = 0.3 \cdot 0.7$)

أو أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في المحاولة الثانية وليس في المحاولة الأولى (مسار **بنفسجيّ** $0.21 = 0.7 \cdot 0.3$).

يمكن أنْ نحصل على النتيجة نفسها إذا جمعنا المساحات الملوّنة **بالأخضر** في الرسم التخطيطيّ "مساحة".





يشمل الحدث إمكانيّتان؛ لذا احتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في السلّة **مرّة واحدة** هو: $0.21 + 0.21 = 0.42$

انتبهوا!

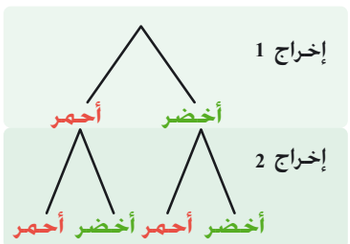
- إذا تقدّمنا في المسار نفسه، فإنّنا نضرب الاحتمالات المسجّلة على كلّ فرع في المسار.
  لذا الاحتمال أنْ يُحرز **يوسف** الكرة في المحاولة الأولى وليس في المحاولة الثانية هو $0.21 = 0.3 \cdot 0.7$
- أمّا إذا كان مساران مناسبين للحدث، فإنّنا **نجمع** احتمالات جميع المسارات المناسبة.

3. يوجد في جرّة 10 كرات: 7 **خضراء** وَ 3 **حمراء**.

يُخرج **سامي** كرة واحدة مِنَ الجرّة دون أنْ ينظر فيها.

يُسجّل لون الكرة، ويُعيدها إلى الجرّة.

بعد ذلك، يُخرج **سامي** كرة أخرى، ويُسجّل لونها.



أ. ما احتمال إخراج كرة **خضراء** في المرّة الأولى؟

ما احتمال إخراج كرة **حمراء** في المرّة الأولى؟

هل الحدث "إخراج كرة **خضراء**" والحدث "إخراج كرة **حمراء**" هما حدثان مكملان؟

ب. أكملوا الاحتمالات المناسبة على فروع الرسم التخطيطيّ "شجرة".

ت. احسبوا احتمال إخراج كرتين **خضراء** (في المرّتين).

ث. ما احتمال إخراج كرتين **حمراء** (في المرّتين)؟

ج. ما احتمال إخراج كرة **خضراء** واحدة بالضبط (في المرّتين).

ح. ما احتمال إخراج كرة **حمراء** واحدة بالضبط (في المرّتين)؟

4. يوجد في سلة 8 كرات: 3 **زرقاء** وَ 5 **زهرية**.
نُخرج كرة واحدة مِنَ السلة دون أنْ ننظر فيها، ونسجّل لون الكرة.
نُعيد الكرة إلى السلة. نُخرج كرة أخرى، ونُسجّل لونها.

أ. أُرسموا الرسم التخطيطيّ "شجرة".

ب. ما احتمال إخراج كرتين **زرقاء**؟

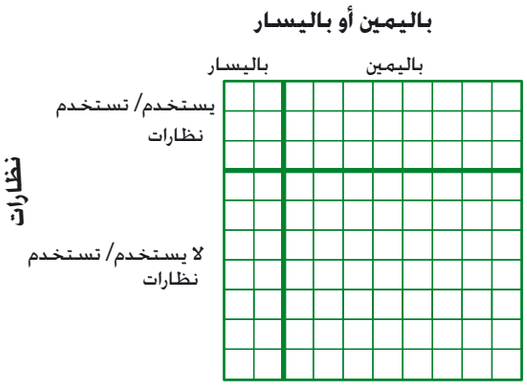
ت. ما احتمال إخراج كرتين **زهرية**؟

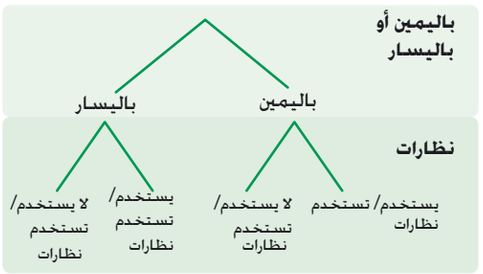
ث. ما احتمال إخراج كرتين لونهما مختلف؟

ج. ما مجموع الاحتمالات الّتي حصلتم عليها في البنود ب - ث؟ اشرحوا.

مجموعة مهامّ

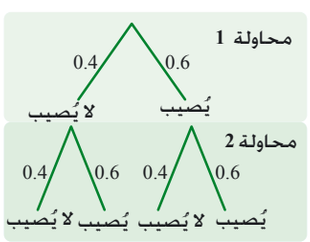
1. يكتب كلّ تلميذ/ة في الصفّ التاسع بيده اليمنى أو بيده اليسرى.
يكتب 0.8 مِنَ التلاميذ بيده اليمنى وَ 0.3 مِنَ التلاميذ يستخدمون النظارات.
أ. أكملوا الاحتمالات المناسبة في الرسم التخطيطيّ "مساحة" وفي الرسم التخطيطيّ " "شجرة".





ب. هل الحدث تلميذ/ة يكتب/تكتب باليد اليمنى والحدث تلميذ/ة يكتب/تكتب باليد اليسرى هما حدثان مكملان؟
ت. أُكتبوا أزواجًا مِنَ الأحداث المكملة الإضافيّة.
ث. هل الحدث تلميذ/ة يكتب/تكتب باليد اليمنى والحدث تلميذ/ة يستخدم النظارات هما حدثان مكملان؟ اشرحوا.
ج. تمّ اختيار تلميذ/ ة بطريقة عشوائيّة. ما احتمال أنّه/ها يكتب/تكتب باليد اليسرى ويستخدم/تستخدم النظارات؟

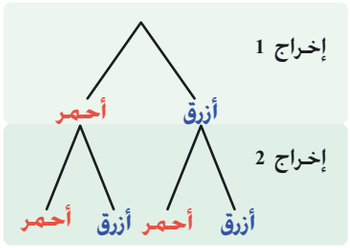
2. يُطلق **سمير** رصاصة نحو الهدف مرّتين.
احتمال أنْ يُصيب **سمير** الهدف، في كلّ محاولة، هو 0.6.
لوّنوا المسار المناسب، واحسبوا الاحتمال أنْ يُصيب **سمير** الهدف في المحاولة الثانية **فقط**.



3. يُطلق **سالم** سهمًا نحو الهدف مرّتين.
احتمال أن يُصيب الهدف، في محاولة منفردة، هو 0.35.

أ. ما احتمال أنْ لا يُصيب **سالم** الهدف في محاولة منفردة؟
ب. أُرسموا رسم تخطيطيّ "مساحة" أو رسم تخطيطيّ " "شجرة".
ت. ما احتمال أنْ يُصيب **سالم** الهدف في المحاولتين؟
ث. ما احتمال أنْ يُصيب **سالم** الهدف في مرّة واحدة فقط؟

4. يوجد في جرّة 20 كرة: 8 **زرقاء** وَ 12 **حمراء**.
يُخرج **سامر** كرة واحدة مِنَ الجرّة دون أنْ ينظر فيها،
ويُسجل لونها. يُعيد الكرة إلى الجرّة.
يُخرج كرة مرة أخرى، ويُسجّل لونها.



أ. ما احتمال إخراج كرة **زرقاء**؟
ما احتمال إخراج كرة **حمراء**؟
ب. أكملوا الاحتمالات المناسبة في الرسم التخطيطيّ "شجرة".
ت. ما احتمال إخراج كرتين **زرقاء**؟
ث. ما احتمال إخراج كرتين **حمراء**؟

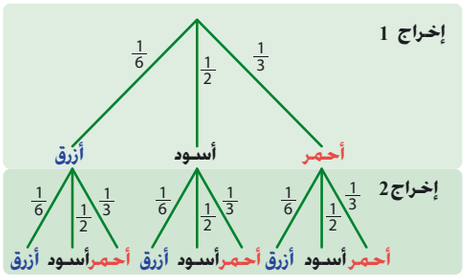
5. يوجد في جرّة 20 كرة: 6 **زرقاء** وَ 14 **بنفسجيّة**.
يُخرج **سامر** كرة واحدة مِنَ الجرّة دون أنْ ينظر فيها،
ويُسجّل لونها. يُعيد الكرة إلى الجرّة.
يُخرج كرة مرّة أخرى، ويُسجّل لونها.
أ. ارسموا رسم تخطيطيّ "شجرة".
ب. ما احتمال إخراج كرتين **زرقاء**؟
ت. ما احتمال إخراج كرتين **بنفسجيّتين**؟
ث. ما احتمال إخراج كرتين بلون مختلف؟

6. يوجد في كيس 32 كرة: 12 كرة سلة وَ 20 كرة قدم.
تُخرج **سامرة** كرة واحدة مِنَ الكيس دون أنْ تنظر فيه، وتُسجل نوعها، وتُعيد الكرة إلى الكيس.
تُخرج **سامرة** كرة أخرى، وتُسجل نوعها.
أ. ارسموا رسم تخطيطيّ "شجرة".
ب. ما احتمال إخراج كرتين مِنْ نوعين مختلفيْن؟

7. يوجد في كيس 10 كرات **حمراء** وَ 8 كرات **زرقاء**.
تُخرج **سامية** كرة واحدة مِنَ الكيس دون أنْ تنظر فيه، تُسجل لونها، وتُعيد الكرة إلى الكيس.
تُخرج **سامية** كرة أخرى، وتُسجّل لونها.
ما احتمال أنْ **لا تُخرج** كرة **زرقاء**؟

8. يوجد في كيس 48 كرة، قسم منها **برتقاليّ** والقسم الآخر **بنفسجيّ**.
احتمال إخراج كرة **برتقاليّة** مِنَ الكيس هو $\frac{3}{4}$.
أ. كم كرة **برتقاليّة** في الكيس؟
ب. تُخرج **سائدة** كرة واحدة مِنَ الكيس دون أنْ تنظر فيه، تُسجّل نوعها، وتُعيد الكرة إلى الكيس.
تُخرج **سائدة** كرة أخرى، وتُسجّل نوعها.
ما احتمال إخراج كرة **بنفسجيّة** واحدة وكرة **برتقاليّة** واحدة (الترتيب غير مهم)؟

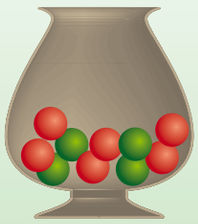
9. نخلط في كيس 60 خرزة بثلاثة ألوان مختلفة.
20 **حمراء**، 30 سوداء والباقي **زرقاء**.
يُخرج **يوسف** خرزة واحدة مِنَ الكيس بطريقة عشوائيّة، يُسجّل لونها، ويُعيد الخرزة إلى الكيس.
يُخرج **يوسف** خرزة أخرى بطريقة عشوائيّة، ويُسجّل لونها.
أ. ما احتمال إخراج خرزتين **حمراء**؟
ب. ما احتمال إخراج خرزتين سوداء؟
ت. ما احتمال إخراج خرزتين **زرقاء**؟
ث. ما احتمال إخراج خرزتين لهما اللّون نفسه؟



10. أُجري سَحْبان لليانصيب في حملة لتشجيع الشراء في مركز تجاري. يشترك/تشترك كلّ مشتري في كلاهما.
يتمّ اختيار مشتري واحد/ ة، في السحب الأوّل، مِنْ بين مائة المشترين الأوائل في اليوم نفسه، ويفوز/ تفوز بهاتف نقّال.
يتمّ اختيار ثلاثة مشترين، في السحب الثاني، مِنْ بين مائة المشترين الأوائل في اليوم نفسه، ويفوز/ تفوز كلّ واحد/ ة بحاسوب شخصيّ.
أ. ما احتمال أنْ يفوز مشترٍ بهاتف نقّال؟
ب. ما احتمال أنْ يفوز مشترٍ بحاسوب شخصيّ؟
ت. أُرسموا رسم تخطيطيّ "مساحة" أو رسم تخطيطيّ " "شجرة"، ما احتمال أنْ يفوز مشترٍ بحاسوب شخصيّ وبهاتف نقّال؟

الدرس الثالث: دون إعادة

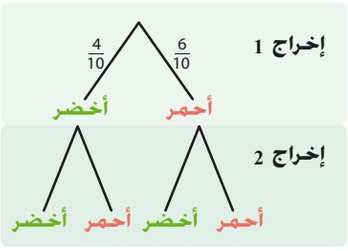
احتمال أحداث تتغيّر فيها الكمّيّات



يوجد في جرّة 10 كرات: **4 خضراء** وَ **6 حمراء**.
يُخرج **إيّاد** كرة واحدة مِنَ الجرّة، ثم يُخرج كرة أخرى (دون أنْ يُعيد الكرة الأولى).
ما احتمال إخراج كرة **خضراء** في المرّة الأولى؟
ما احتمال إخراج كرة **حمراء** في المرّة الأولى؟
خمّنوا ما احتمال إخراج كرتين **حمراء**؟

سنتعلّم كيفيّة حساب احتمال أحداث تتغيّر فيها الكمّيّة الكُلّيّة.

1. أ. قال **إيّاد**: إذا أخرجتُ في المرّة الأولى كرة **حمراء**، فإنذ احتمال إخراج كرة **حمراء** في المرّة الثانية أيضًا هو $\frac{5}{9}$.
هل قول **إيّاد** صحيح؟

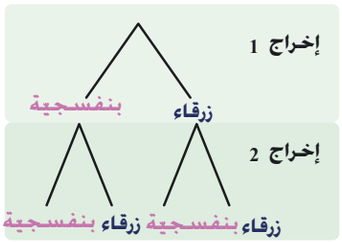


ب. أكملوا الاحتمالات على فروع "الشجرة" في الإخراج الثاني.
ت. ما احتمال أنْ يُخرج **إيّاد** كرتين **خضراء**؟
ث. ما احتمال أنْ يُخرج **إيّاد** كرتين **حمراء**؟

إذا أخرجنا في أحداث ثنائيّة المرحلة (بطريقة عشوائيّة) مِنْ كمّيّة معطاة **دون أنْ نُعيد**، فإنّ الكمّيّة الكُلّيّة **تتغيّر** بعد الإخراج الأول.

مثال: في المَهمّة 1، في الإخراج الأوّل بعد أنْ أخرج **إيّاد** كرة واحدة بقيت في الجرّة 9 كرات.
إذا أخرج **إيّاد** في المرّة الأولى كرة **خضراء**، فتبقى في الجرّة 3 كرات **خضراء** وَ 6 **حمراء** (احتمال إخراج الكرة **الخضراء** الثانية هو $\frac{3}{9}$، واحتمال إخراج الكرة **الحمراء** الثانية هو $\frac{6}{9}$).
إذا أخرج **إيّاد** في المرّة الأولى كرة **حمراء** ، فتبقى في الجرة 4 كرات**خضراء** وَ 5 **حمراء** (احتمال إخراج الكرة **الخضراء** الثانية هو $\frac{4}{9}$، واحتمال إخراج الكرة **الحمراء** الثانية هو $\frac{5}{9}$).
مثلًا: احتمال إخراج كرتين **حمراء** هو $\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$
($\frac{6}{10}$ في الإخراج الأول وَ $\frac{5}{9}$ في الإخراج الثاني).

2. يوجد في جرّة 12 كرة: 4 **زرقاء** وَ 8 **بنفسجيّة**.
تُخرج **جميلة** كرتين مِنَ الجرّة، دون أنْ تنظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.



أ. أكملوا الاحتمالات المناسبة على فروع "الشجرة" في **الإخراج 1.**
ب. أكملوا الاحتمالات على فروع "الشجرة" في **الإخراج 2.**
ت. ما احتمال أنْ تُخرج **جميلة** كرتين **بنفسجيّتين**؟
ث. ما احتمال أنْ تُخرج **جميلة** كرة **زرقاء** واحدة وكرة **بنفسجيّة** واحدة؟

3. يوجد في جرّة 20 كرة. 15 كرة **خضراء** وَ 5 كرات **زهرية**.

أ. ما احتمال أنْ تُخرج **عناية** مِنَ الجرّة: كرة **خضراء**؟ كرة **زهرية**؟ كرة **زرقاء**؟

ب. أخرجت **عناية** كرتين مِنَ الجرّة، دون أنْ تنظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.

ما احتمال أنْ تُخرج **عناية**، مِنَ الجرّة، كرتين **زهريّتين**؟ اشرحوا.

ما احتمال أنْ تُخرج **عناية**، مِنَ الجرّة، كرتين **زرقاوتين**؟ اشرحوا.

4. يوجد في كيس ملابس غسيل 4 قمصان بيضاء وَ 8 قمصان **زرقاء**.

أ. يُخرج **جواد**، مِنَ الكيس، قميصًا واحدًا بطريقة عشوائيّة. ما احتمال أنْ يُخرج **جواد** قميصًا لونه أبيض؟

ب. أخرج **جواد**، مِنَ الكيس، قميصًا لونه **أزرق**، وبعد ذلك أخرج قميصًا آخر بطريقة عشوائيّة.

ما احتمال أنْ يكون لون القميص، الإضافيّ الّذي أخرجه **جواد**، **أزرق**؟

ت. أخرج **جواد**، مِنَ الكيس، قميصًا لونه أبيض، بعد ذلك أخرج قميصًا آخر بطريقة عشوائيّة، وبعد ذلك أخرج قميص آخر. ما احتمال أنْ يكون لون جميع القمصان، الّتي أخرجها **جواد**، أبيض؟

5. يوجد في كيس ملابس غسيل 5 قمصان بيضاء، 4 قمصان **زرقاء** وَ 3 قمصان سوداء.

أ. تُخرج **كريمة**، مِنَ الكيس، قميصًا واحدًا بطريقة عشوائيّة. ما احتمال أنْ تُخرج **كريمة** قميصًا لونه أسود؟

ب. تُخرج **كريمة**، مِنَ الكيس، قميصًا لونه أسود، وبعد ذلك تُخرج قميصًا آخر بطريقة عشوائيّة.

ما احتمال أنْ تُخرج **كريمة** قميصًا آخر لونه أسود أيضًا؟

مجموعة مهامّ

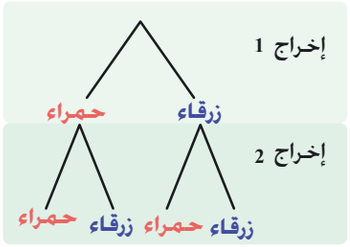
1. يوجد في جرّة 16 كرة: **4 زرقاء** وَ **12 حمراء**.

أخرجت **رهام** كرتين مِنَ الجرّة، دون أنْ تنظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.

أ. أكملوا الاحتمالات على فروع "الشجرة" في الإخراج الأوّل.

ب. أكملوا الاحتمالات على فروع "الشجرة" في الإخراج الثاني.

ت. ما احتمال إخراج كرتين **حمراء**؟



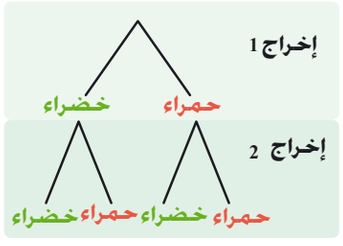
2. يوجد في جرّة 12 كرة: **7 خضراء** وَ **5 حمراء**.

أخرج **أيمن** كرتين من الجرّة، دون أنْ ينظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.

أ. أكملوا الاحتمالات على فروع "الشجرة".

ب. ما احتمال أنْ نُخرج كرة **حمراء** في الإخراج الأوّل، وأنْ نُخرج كرة **خضراء** في الإخراج الثاني؟

ت. ما احتمال إخراج كرتين لونهما مختلف؟



3. يوجد في سلّة 25 كرة: 10 **برتقاليّة** وَ 15 **رماديّة**.
يُخرج **رامي** كرتين مِنَ السلّة، دون أنْ ينظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.
أ. ما احتمال أنْ يُخرج كرة **برتقاليّة** في الإخراج الأوّل؟
ب. ما احتمال أنْ يُخرج كرتين **رماديّتين**؟

4. يوجد في كيس 30 قبعة: 20 سوداء وَ 10 **رماديّة**.
يُخرج **عدنان** قبعة دون أنْ ينظر في السلّة، ويُخرج بعده **زياد** قبّعة أخرى دون أنْ ينظر في السلّة.
أ. ما احتمال أنْ يُخرج **عدنان** قبّعة سوداء؟
ب. ما احتمال أنْ يُخرج **زياد** قبّعة **رماديّة**؟
ت. ما احتمال أنْ يُخرج كلاهما قبّعة لها اللّون نفسه؟

5. يوجد في كيس 10 كرات قدم وَ 6 كرات سلّة.
أ. تُخرج **رانية** كرة مِنَ الكيس دون أنْ تنظر فيه. ما احتمال أنْ تُخرج **رانية** كرة سلّة؟
ب. أخرجت **رانية** مِنَ الكيس كرة سلّة، وأخرجت بعد ذلك كرة أخرى دون أنْ تنظر في الكيس.
ما احتمال أنْ تكون الكرة الأخرى، الّتي أخرجتها **رانية**، كرة سلّة أيضًا؟

6. يوجد في كيس 5 حبّات حلوى **حمراء**، 8 حبّات حلوى **زرقاء** وَ 3 حبّات حلوى **خضراء**.
أ. تُخرج **سهى** حبّة حلوى واحدة مِنَ الكيس دون أنْ تنظر فيه. ما احتمال أنْ تُخرج **سهى** حبّة حلوى **حمراء**؟
ب. أخرجت **سهى** حبّة حلوى **حمراء** مِنَ الكيس، وأخرجت بعد ذلك حبّة حلوى أخرى دون أنْ تنظر في الكيس.
ما احتمال أنْ تكون حبّة الحلوى الأخرى، الّتي أخرجتها **سهى**، **حمراء** أيضًا؟

7. يوجد في جرّة 20 كرة: 10 **خضراء**، 5 **حمراء**، 5 **زرقاء**.
يُخرج **رافع** كرتين مِنَ الجرّة، دون أنْ ينظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.
أ. ما احتمال أنْ يُخرج **رافع** كرتين **خضراء**؟
ب. ما احتمال أنْ يُخرج **رافع** كرة **خضراء**؟

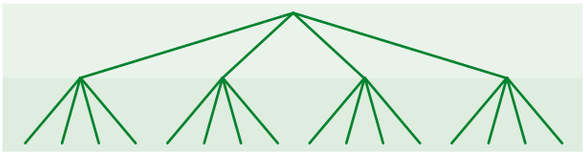
الدرس الرابع: مهامّ إضافيّة

تعلّمنا في الوحدتين الأخيرتين كيفيّة حساب احتمالات.

نستمرّ، في هذا الدرس، في حساب الاحتمالات.

1. توزيع السكان في إسرائيل حسب نوع الدمّ هو:

O – 35% AB – 5% B – 20% A – 40%



نختار شخصين بطريقة عشوائيّة*.

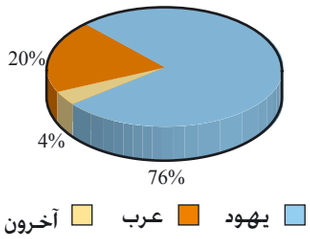
أ. أكملوا المُعطيات في الرسم التخطيطيّ "شجرة" .

ب. ما احتمال أنْ يكون نوع الدمّ O للشخصين اللّذين تمّ اختيارهما؟

ت. ما احتمال أنْ يكون نوع الدمّ نفسه للشخصين اللّذين تمّ اختيارهما؟

ث. ما احتمال أنْ يكون نوع دمّ أحدهما/إحداهما A والآخر/والأخرى نوع دمّه B؟

2. أمامكم رسم تخطيطيّ دائريّ يصف توزيع السكان في إسرائيل حسب القوميّة.
(أُخذت المُعطيات مِنْ موقع دائرة الإحصاء المركزيّة لسنة 2007)



نختار مواطنين بطريقة عشوائيّة*.

أ. ما احتمال أنْ يكون المواطنين، اللّذين تمّ اختيارهما، عربًا؟

ب. ما احتمال أنْ يكون المواطنين، اللّذين تمّ اختيارهما، يهودًا؟

دائرة الإحصاء المركزيّة هي وحدة حكوميّة مسؤولة عن جمع مُعطيات، معالجتها ونشر مُعطيات إحصائيّة عن السكّان، الاقتصاد والمجتمع في إسرائيل.

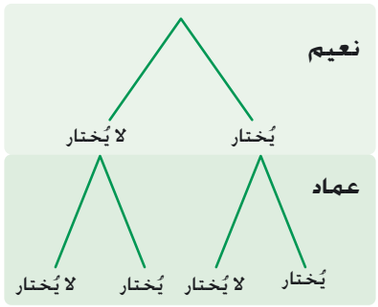
تستخدم وزارات الحكومة هذه المُعطيات لتحديد سياسات مناسبة ولتخطيط توجّهات مختلفة في مجالات متنوّعة. تنفّذ دائرة الإحصاء المركزيّة، كلّ عشر سنوات، "تعداد السكّان والسكن"، يُطلب مِنْ كلّ عائلة في إسرائيل أنْ تُجيب عن نموذج، حيث تُستخدم المُعطيات فيه بعد المعالجة لتقديم معلومات ديموغرافيّة عن سكّان الدولة.

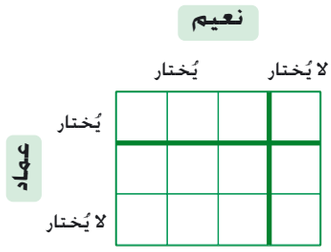
تُحفظ المُعطيات الشخصيّة الّتي تُجمع خلال تعداد السكّان بسريّة كاملة، وفقط المعلومات الإحصائيّة التي تُستخلص منها هي الّتي تُنشر للجمهور. هنالك استطلاعات أخرى تنفّذها دائرة الإحصاء، مثل: استطلاع حول النفقات المنزليّة، استطلاع حول رضا خرّيجو الجامعات وغير ذلك.

يمكنكم إيجاد معلومات إضافيّة في موقع دائرة الإحصاء المركزيّة.

* اختيار شخصين مكافئ لـ "إخراج دون إعادة" لشخص واحد (أو امرأة واحدة)، وبعد ذلك شخص إضافيّ (أو امرأة). في مجموعات كبيرة اختيار شخصين مكافِئ لـ "إخراج مع إعادة"، وهذا يعني أنّ اختيار شخص واحد (أو امرأة) لا يؤثّر على احتمال اختيار الآخر (أو الأخرى).

3. يرغب سكّان بناية معيّنة في اختيار شخصين للجنة سكّان البناية.
احتمال اختيار **نعيم** هو $\frac{3}{4}$، واحتمال اختيار **عماد** هو $\frac{1}{3}$.
أمامكم رسم تخطيطيّ "شجرة" ورسم تخطيطيّ "مساحة".





أ. أكملوا الاحتمالات المناسبة في الرسم التخطيطيّ "شجرة" وفي الرسم التخطيطيّ "مساحة".

ب. احسبوا احتمال أنْ يتمّ اختيار **نعيم** و**عماد** أيضًا.

ت. احسبوا احتمال أنْ يتمّ اختيار **نعيم** ولا يتمّ اختيار **عماد**.

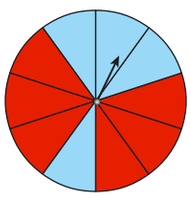
ث. احسبوا احتمال أنْ يتمّ اختيار **عماد** ولا يتمّ اختيار **نعيم**.

ج. احسبوا احتمال أنْ يتمّ اختيار واحد مِنْهما (أنْ يتمّ اختيار **نعيم** ولا يتمّ اختيار **عماد** أو أنْ يتمّ اختيار **عماد** ولا يتمّ اختيار **نعيم**).

ح. ما احتمال أنْ لا يتمّ اختيار أحدمِنْهما؟
اشرحوا بثلاث طرق مختلفة:
- بمساعدة رسم تخطيطيّ "مساحة".
- بمساعدة رسم تخطيطيّ "شجرة".
- بمساعدة حدث مُكمل.

(افحصوا هل الحدث "يتمّ اختيار اثناهما" هو حدث مُكمل.؟ إذا كانت الإجابة نعم فإلى أيّ حدث؟ ولأيّ أحداث؟).

4. أمامكم "ساعة" مقسّمة إلى 10 أقسام متساوية.



يُدير **لؤي** و**عمار** العقرب كلّ واحد في دوره.
إذا توقّف العقرب عند "**الأزرق**"، يفوز بنقطة واحدة.
إذا توقّف العقرب عند "**الأحمر**" يفوز بنقطتين.
إذا توقّف العقرب عند الخطّ الفاصل بين قسمين، نُدير العقرب مرّة أخرى.

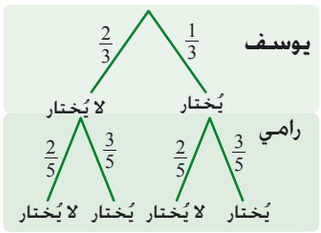
أ. يُدير كلّ واحد مِنْهما العقرب مرّة واحدة. ما احتمال الفوز بنقطتين؟

ب. يُدير كلّ واحد مِنْهما العقرب مرّة واحدة. ما احتمال الفوز بنقطة واحدة؟

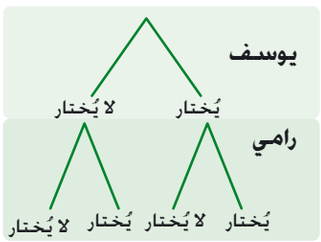
ت. يُدير **لؤي** العقرب مرّتين.
ما احتمال أنْ يتوقّف العقرب مرّة عند "**الأزرق**" ويتوقّف مرّة عند "**الأحمر**"؟

مجموعة مهامّ

1. يرغب تلاميذ الصفّ في اختيار تلميذين للجنة الصفّ.
احتمال اختيار **يوسف** هو $\frac{1}{3}$.
احتمال اختيار **رامي** هو $\frac{3}{5}$.
أ. لوّنوا المسار المناسب.
ب. ما احتمال أنْ لا يتمّ اختيار اثناهما؟

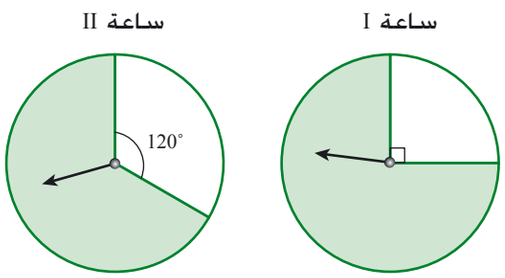


2. يرغب تلاميذ الصفّ في اختيار تلميذين للجنة الصفّ.
احتمال اختيار **يوسف** هو $\frac{1}{4}$.
احتمال اختيار **رامي** هو $\frac{2}{3}$.
أ. أكملوا الاحتمالات المناسبة في الرسم التخطيطيّ "شجرة".
ب. ما احتمال أنْ يتمّ اختيار واحد مِنْهما؟



3. يصوّب **عامر** و**أيمن** سهمًا نحو الهدف.
احتمال أنْ يُصيب **عامر** الهدف هو 0.35، احتمال أنْ يُصيب **أيمن** الهدف هو 0.4.
أ. اُرسموا رسم تخطيطيّ "شجرة" أو رسم تخطيطيّ "مساحة".
ب. ما احتمال أنْ يُصيب كلاهما الهدف؟
ت. ما احتمال أنْ يُصيب **عامر** الهدف وأنْ لا يُصيب **أيمن** الهدف؟

4. أمامكم "ساعتان".
نُدير عقربيّ "الساعتين".
أ. ما احتمال أنْ يقف العقرب في "الساعة" I عند اللّون **الأخضر**؟
ب. ما احتمال أنْ يقف العقرب في "الساعة" II عند اللّون **الأخضر**؟
ت. ما احتمال أنْ يقف عقربيّ "الساعتين" عند اللّون **الأخضر**؟
اِشرحوا.
ث. ما احتمال أنْ يقف عقربيّ "الساعتين" عند اللّون الأبيض؟ اِشرحوا.



5. يوجد في جرّة 24 كرة. 16 كرة **زرقاء** وَ 8 كرات **بنفسجيّة**.
أخرجت **سلوى** كرة واحدة مِنَ الجرّة بطريقة عشوائيّة، سجّلت لونها وأعادت الكرة الّتي أخرجتها إلى الجرّة، ثمّ أخرجت كرة أخرى بطريقة عشوائيّة.

أ. ما احتمال أنْ تُخرج **سلوى**، من الجرّة، كرتين **زرقاء**؟

ب. ما احتمال أنْ تُخرج **سلوى** كرتين، من الجرّة، لونهما مختلف؟

ت. ما احتمال أنْ تُخرج **سلوى**، مِنَ الجرّة، كرتين **حمراء**؟

6. يوجد في عُلبة 20 زرًّا **أزرق** وَ 10 أزرار **زهريّة**.

أ. يُخرج **رائد** زرًّا واحدًا مِنَ العُلبة بطريقة عشوائيّة.
ما احتمال أنْ يُخرج **رائد** زرّ **زهريّ**؟

ب. أخرج **رائد** زرًّا **زهريّ** مِنَ العُلبة، وأخرج بعد ذلك زرًّا إضافيًّا بطريقة عشوائيّة.
ما احتمال أنْ يكون لون الزرّ الزهريّ الّذي يُخرجه **رائد** **زهريّ** أيضًا؟

7. يوجد في جرّة 24 كرة. 16 كرة **زرقاء** وَ 8 كرات **بنفسجيّة**.
أخرجت **أمينة** كرتين مِنَ الجرّة، دون أنْ تنظر فيها، الواحدة تلو الأخرى.
ما احتمال أنْ تُخرج **أمينة**، مِنَ الجرّة، كرتين **زرقاء**؟

8. يوجد في كيس 12 كرة. قسم منها **زرقاء** وقسم منها **حمراء**.
نُخرج كرة واحدة مِنَ الكيس، دون أنْ ننظر فيه، ونسجّل لونه.
نُعيد الكرة إلى الكيس.
نُخرج كرة مرّة أخرى ونسجّل لونها.
احتمال إخراج كرتين **حمراء** هو $\frac{4}{9}$.

أ. كم كرة مِنْ كلّ لون يوجد في الجرّة؟

ب. ما احتمال إخراج كرتين **زرقاء**؟

9. يوجد في عُلبة 20 خرزة: **15 خضراء** وَ **5 حمراء**.
تُخرج **عبير** ثلاث خرزات مِنَ العُلبة دون أنْ تنظر فيها.

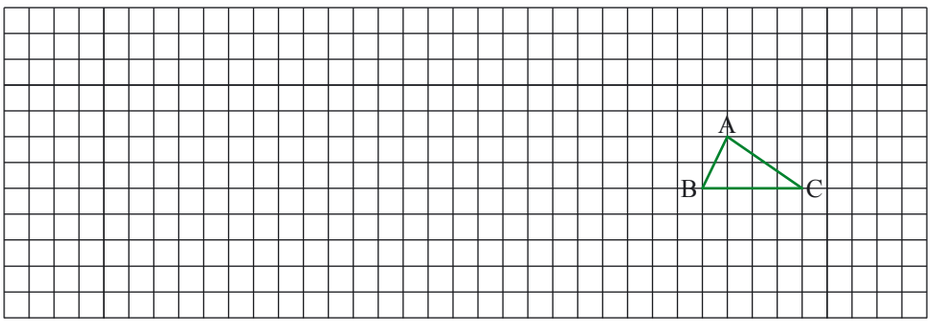
أ. ما احتمال أنْ تُخرج **عبير** ثلاث خرزات **خضراء**، إذا أعادت كلّ كرة، إلى العلبة، بعد أنْ تخرجها؟

ب. ما احتمال أنْ تُخرج **عبير** ثلاث خرزات **خضراء**، إذا أخرجت الخرزات الواحدة تلو الأخرى دون إعادة؟

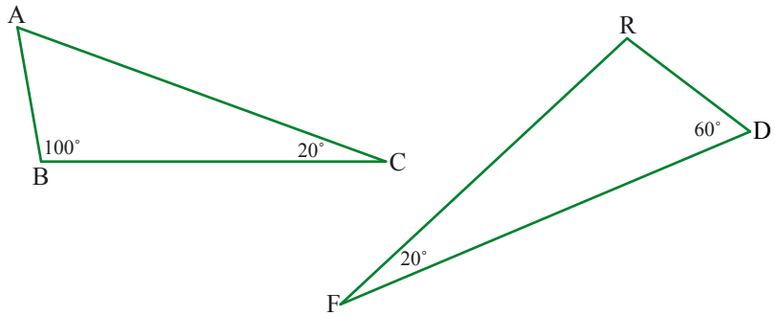
نحافظ على لياقة رياضيّة

تشابه مثلثات

1. أُرسموا مثلّثًا يشبه المثلّث ABC.
سجّلوا نسبة التشابه بين المثلّث الّذي رسمتوه والمثلّث ABC.



2. أمامكم مثلّثان.
أ. احسبوا مقدار الزوايا الأخرى.
ب. هل المثلّثان متشابهان؟ اشرحوا.



3. أمامكم مثلّثان، أشرنا فيهما بقوس إلى زوج مِنَ الزوايا المتساوية بالمقدار.
(أُعدّت الرسمة للتّوضيح، وقياسات الطول مُعطاة بالسم).
أ. اشرحوا لماذا المثلّثين متشابهين؟
ب. احسبوا نسبة التشابه.
ت. احسبوا طول الضلع MF.