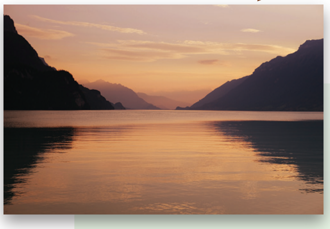
الوحدة الثامنة: انعكاس، توسيع وتضييق القطوع المكافِئة

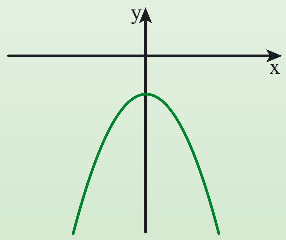


الدرس الأوّل: انعكاس بواسطة محور x

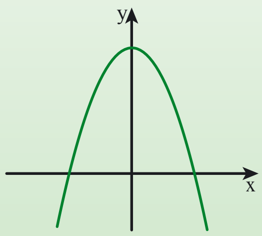
طُلب من التلاميذ أنْ يرسموا قَطعًا مكافئًا جميع قيَمه سالبة.

قال **سامر**: لا يمكن

رسم **أيوب** كالتالي:



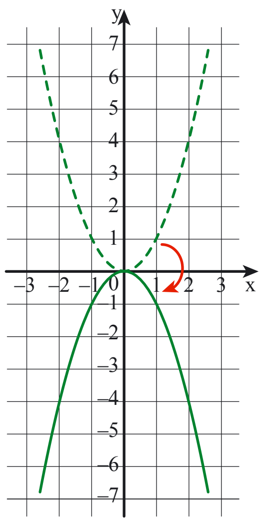
رسم **زياد** كالتالي:



مَنْ مِنْهم إجابته صحيحة؟

نعكس الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$ بواسطة محور x، ونتعلّم عن صفات الدالّة الناتجة.

انعكاس القطع المكافِئ $y = x^2$ بواسطة محور x



.1 ضعوا "القَطْع المكافِئ الشفّاف" على القَطْع المكافِئ $y = x^2$ واقلبوه.
نبحث القَطْع المكافِئ "المقلوب".

أ. أكملوا جدول الدالّة الناتجة بعد الانعكاس (القَطْع المكافِئ "المقلوب").

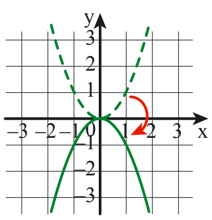
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

ب. ما هما إحداثيّا نقطة رأس القَطْع المكافِئ "المقلوب"؟

ت. أمامكم تمثيلات جَبْريّة، أيّ منها هو التمثيل الجَبريّ المناسب للقَطْع المكافِئ "المقلوب"؟ اِشرحوا.

$y = x^2$ $\qquad y = -x^2$ $\qquad y = x^2 - 1$ $\qquad y = 1 - x^2$

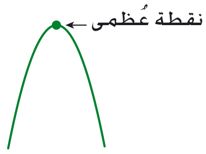
ينتُج القَطْع المكافِئ $y = -x^2$ بواسطة انعكاس القَطْع المكافِئ $y = x^2$ بمساعدة محور x.



نقطة رأس القَطْع المكافِئ هي **نقطة نهاية**.

- إذا كانت نقطة الرأس هي النقطة "الأكثر انخفاضًا"، فإنّنا نسمّيها "**نقطة صُغرى**".

- إذا كانت نقطة الرأس هي النقطة "الأكثر ارتفاعًا"، فإنّنا نسمّيها "**نقطة عُظمى**".



مثال: رأس القَطْع المكافِئ $y = x^2$ هو **نقطة صُغرى** للقَطْع المكافِئ.

رأس القَطْع المكافِئ $y = -x^2$ هو **نقطة عُظمى** للقَطْع المكافِئ.

.2 أكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدالّة $y = -x^2$.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -x^2$
الرسمة التقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x ($y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الموجب للدّالّة ($y > 0$)	
المجال السالب للدّالّة ($y < 0$)	

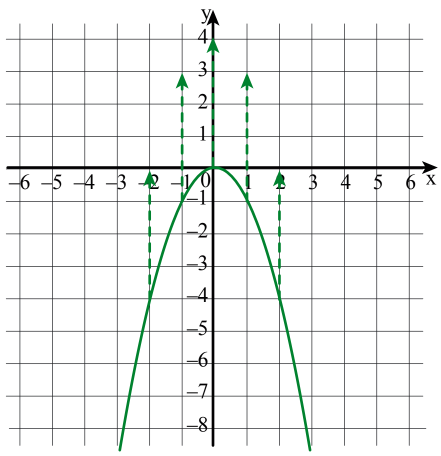
الإزاحة إلى أعلى وإلى أسفل

3. أ. ضعوا "القَطْع المكافِئ الشفّاف" على هيئة المحاور، بحيث يكون مناسب للدالة $y = -x^2$.
أزيحوا القَطْع المكافِئ 4 وحدات **إلى أعلى**.

ب. أكملوا جدول الدالّة الناتجة بعد الإزاحة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

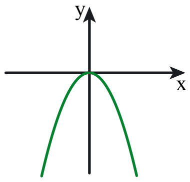
عيّنوا النقاط في هيئة المحاور.
صِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافِئ.



ت. سجّلوا تمثيلًا جَبريًّا مناسبًا للدالّة بعد الإزاحة.
افحصوا إجاباتكم.

ث. أكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدالّة الّتي سجّلتموها في بَند ت.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -x^2 + 4$
الرسمة التقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x ($y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الموجب للدّالّة ($y > 0$)	
المجال السالب للدّالّة ($y < 0$)	



رأس القَطْع المكافِئ $y = -x^2$ هو $(0, 0)$.

هذه النقطة هي **نقطة عُظمى** للقَطْع المكافِئ.

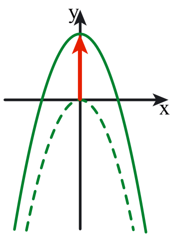
محور التماثل هو محور y.

المجال التصاعديّ للدالّة: الأعداد السالبة $(x < 0)$.

المجال التنازليّ للدالّة: الأعداد الموجبة $(x > 0)$.

المجال الّذي تكون فيه الدالّة سالبة: كلّ الأعداد باستثناء العدد 0 $(x \neq 0)$.

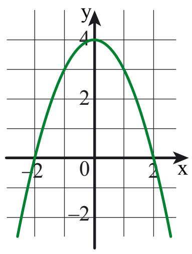
المجال الّذي تكون فيه الدالّة موجبة: لا يوجد أعداد.



إذا أزحنا القَطْع المكافِئ $y = -x^2$، c وحدات إلى **أعلى**، فنحصل على القَطْع المكافِئ الّذي تعبيره الجَبريّ هو $y = -x^2 + c$.

النقطة $(0, c)$ هي **نقطة عُظمى**.

يتقاطع هذا القَطْع المكافِئ مع محور x في نقطتين.



مثال: في المَهمّة 3 التمثيل الجَبريّ للقَطْع المكافِئ هو $y = -x^2 + 4$.

الرأس هو $(0, 4)$، وهو نقطة عُظمى.

المجال التصاعديّ للدالّة: الأعداد السالبة $(x < 0)$.

المجال التنازليّ للدالّة: الأعداد الموجبة $(x > 0)$.

المجال الّذي تكون فيه الدالّة موجبة: الأعداد بين (-2) إلى 2 $(-2 < x < 2)$.

المجال الّذي تكون فيه الدالّة سالبة: الأعداد على يسار (-2) هذا يعني أنّ $x < -2$ ، أو الأعداد على يمين 2 هذا يعني أنّ $x > 2$.

نفكّر بـ ...

4. قال **أيوب**: الدالّة التربيعيّة $y = -x^2 - 1$ سالبة في كلّ المجال.

لا توجد لهذه الدالّة نقطة تقاطع مع محور x ، وكلّ قيمها سالبة.

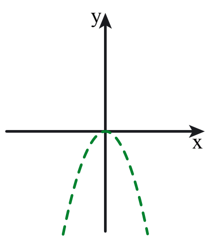
اشرحوا كيف عَرَف **أيوب** ذلك؟

مجموعة مهامّ

1. أكملوا.

التمثيل الجَبريّ للدالّة	إحداثيّا نقطة الرأس	نوع الرأس عُظمى/صُغرى	يوجد أو لا يوجد نقاط تقاطع مع محور x
$y = x^2 + 3$			
$y = x^2 - 3$			
$y = -x^2 + 3$			
$y = -x^2 - 3$			

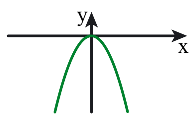
2. أمامكم رسمة **تقريبيّة** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = -x^2$.



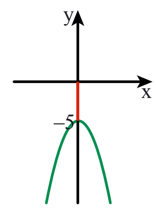
أ. ارسموا رسمة **تقريبيّة** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = -x^2 + 9$.

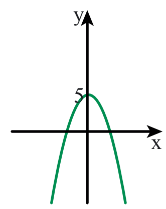
ب. هل يتقاطع **الخطّ البيانيّ للدالّة** مع محور x؟
إذا كانت الإجابة نعم، في كم نقطة؟

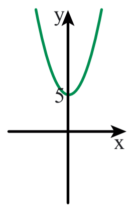
ت. أمامكم جدول يعرض "**بطاقة هُويّة**" الدالّة $y = -x^2$.
أكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدالّة $\mathbf{y = -x^2 + 9}$.

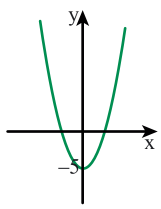
التمثيل الجبريّ للدّالّة	$\mathbf{y = -x^2}$	$\mathbf{y = -x^2 + 9}$
الرسمة التقريبيّة		
محور التماثل	$x = 0$	
إحداثيّا نقطة الرأس	$(0, 0)$	
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)	عظمى	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x ($y = 0$)	$(0, 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)	$(0, 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	أعداد سالبة ($x < 0$)	
مجال نزول الدّالّة	أعداد موجبة ($x > 0$)	
المجال الموجب للدّالّة ($y > 0$)	لا يوجد أعداد	
المجال السالب للدّالّة ($y < 0$)	$x \neq 0$	

3. لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.



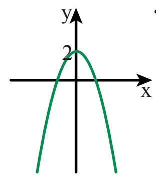


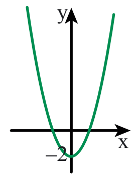


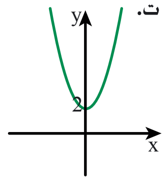


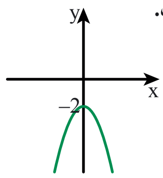
$y = x^2 - 5$ $y = -x^2 - 5$ $y = -x^2 + 5$ $y = x^2 + 5$

4. سجّلوا تمثيلًا جَبريًّا مناسبًا لكلّ قَطْع مكافِئ.

أ.


ب.


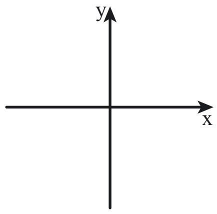
ت.


ث.


5. أ. سجّلوا تمثيلاً جبريًّا للقَطْع المكافِئ الّذي يحقّق الشروط التالية:
- إحداثيّا نقطة الرأس $(0, 4)$،
- الدالّة تصاعديّة في مجال الأعداد السالبة $(x < 0)$,
- الدالّة تنازليّة في مجال الأعداد الموجبة $(x > 0)$.

ب. أُرسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة الّتي سجلتموها.

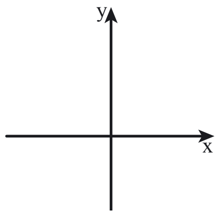
ت. هل الرأس نقطة عُظمى أم نقطة صُغرى؟



6. أ. أُرسموا خطّين بيانيّين لقَطْعين مكافِئَين في هيئة المحاور نفسها:
القَطْع المكافِئ I: الرأس $(0, 3)$، ويوجد له نقطتان تقاطع مع محور x.
القَطْع المكافِئ II: الرأس $(0, -3)$، ويوجد له نقطتان تقاطع مع محور x.

ب. سجّلوا تمثيلًا جَبريًّا لكلّ قَطْع مكافِئ.

ت. حدّدوا هل رأس كلّ قَطْع مكافِئ هو نقطة عُظمى أم نقطة صُغرى؟



7. أحيطوا، في كلّ بَند، الحرف المناسب. على ماذا حصلتم؟

	صحيح	غير صحيح
أ. الدالّة $y = -x^2 - 5$ لها نقطة عُظمى.	כ	מ
ب. الدالّة $y = -x^2 + 5$ لها نقطة صُغرى.	צ	ל
ت. الدالّة $y = x^2 + 3$ لها نقطة عُظمى.	פ	ה
ث. الدالّة $y = x^2 - 1$ لها نقطة عُظمى.	ב	כ
ج. الدالّة $y = -x^2$ لها نقطة صُغرى	ע	ב
ح. الدالّة $y = x^2 + 3$ لها نقطة صُغرى في $(3, 0)$.	נ	ו
خ. الدالّة $y = -x^2 - 1$ لها نقطة عُظمى في $(0, -1)$.	ד	ל

8. أُرسموا، في كلّ بَند، رسمة تقريبيّة مناسبة، وسجّلوا مثالًا للتّعبير الجَبريّ المناسب للدالّة.

أ. يوجد للدالّة نقطة صُغرى، وخطّها البيانيّ لا يتقاطع مع محور x.

ب. يوجد للدالّة نقطة عُظمى، وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في نقطة واحدة فقط.

ت. يوجد للدالّة نقطة عُظمى، وخطّها البيانيّ يتقاطع مع محور x في نقطتين.

ث. يوجد للدالّة نقطة عُظمى، وخطّها البيانيّ لا يتقاطع مع محور x.

ج. النقطة العُظمى للدالّة هي $(0, 3)$.

9. أ. يقع رأس القَطْع المكافِئ على محور y.
كم قَطْعًا مكافِئًا كهذا يمكن أنْ نرسم؟ سجّلوا مثالًا لهذه الدالّة.

ب. يقع رأس القَطْع المكافِئ في النقطة $(0, 2)$.
سجّلوا مثالين لهذه الدالّة.

ت. رأس القَطْع المكافِئ هو نقطة صُغرى في $(0, 2)$.
هل توجد نِقاط صفريّة للدالّة؟ اِشرحوا.

10. سجّلوا، في كلّ بَند، مثالًا لدالّة تربيعيّة.

أ. لا توجد نقطة صِفريّة للقَطْع المكافِئ (لا توجد نقاط تقاطع مع محور x).

ب. قَطْع مكافِئ له نقطة صِفريّة واحدة (توجد نقطة تقاطع واحدة مع محور x).

ت. قَطْع مكافِئ له نقطتان صفريّتان (توجد نقطتا تقاطع مع محور x).

الدرس الثاني: توسيع وتضييق قطوع مكافئة

أمامكم ثلاثة خطوط بيانيّة لدوال تربيعيّة.

$y = x^2$

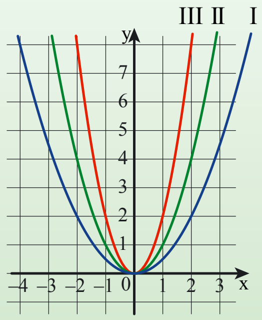
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$

أيّ خطّ بيانيّ هو الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$؟ اِشرحوا.

أيّ خطّ بيانيّ مناسب لـ $y = 2x^2$؟

أيّ خطّ بيانيّ مناسب لـ $y = \frac{1}{2}x^2$؟



سنتعلم عن صفات الدوالّ الّتي هي توسيع أو تضييق للدالّة $y = x^2$.

1. نتطرّق إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

أ. أكملوا جدول الدالّة $y = 2x^2$.

x	–2	–1	0	1	2
$y = 2x^2$					

سجّلوا التمثيل الجَبريّ المناسب إلى جانب القَطْع المكافِئ.

ب. أكملوا جدول الدالّة $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$							

سجّلوا التمثيل الجَبريّ المناسب إلى جانب القَطْع المكافِئ.

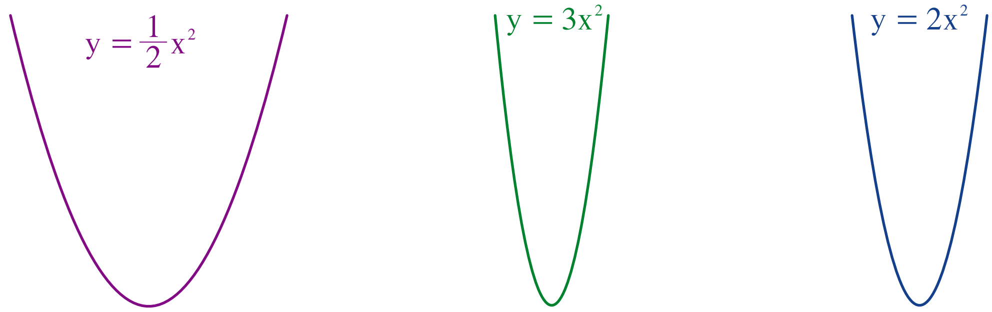
ت. أكملوا **الصفات** لكلّ قَطْع مكافِئ.

	$y = 2x^2$	$y = x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
محور التماثل		$x = 0$	
إحداثيّا نقطة الرأس		$(0, 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة		أعداد موجبة $(x > 0)$	
مجال نزول الدّالّة		أعداد سالبة $(x < 0)$	

نفكّر بـ ...

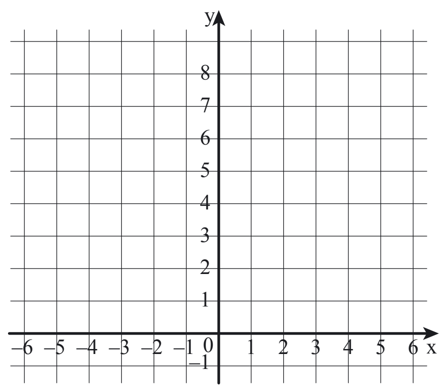
2. أ. أمامكم رسومات القطوع المكافِئة للدوالّ التربيعيّة التالية: $y = 2x^2$ $\quad y = 3x^2 \quad y = \frac{1}{2}x^2$

انسخوها على ورقة شفّافة.



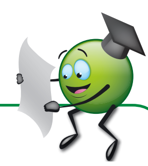
ب. استعينوا بالقَطْع المكافئ الشفّاف للدالّة $y = x^2$ وبالقطوع الثلاثة الّتي تظهر في بَند أ.

ضَعوا، في الرسم البيانيّ، القطوع الأربعة المكافِئة على بعضها (الرأس في نقطة الأصل).



ت. ما الصفات المشتركة للقطوع المكافِئة الأربعة؟

بماذا تختلف عن بعضها؟ ممّا ينبع هذا الاختلاف؟



تعرّفنا في المَهمّتين 1 وَ 2 على قطوع مكافِئة تمثيلها الجَبريّ صورته $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

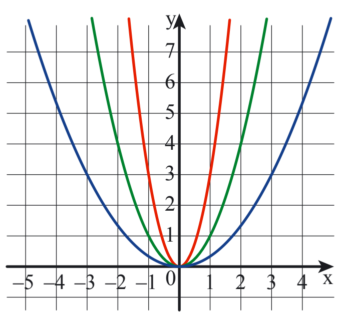
يمكن الحصول على القطوع المكافِئة، الواحدة منَ الأخرى، بواسطة التضييق أو التوسيع.

مثال: في رسمة الخطوط البيانيّة لهذه الدوالّ الثلاث.

القَطْع المكافِئ **الأحمر** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 3x^2$ $(a > 1)$.

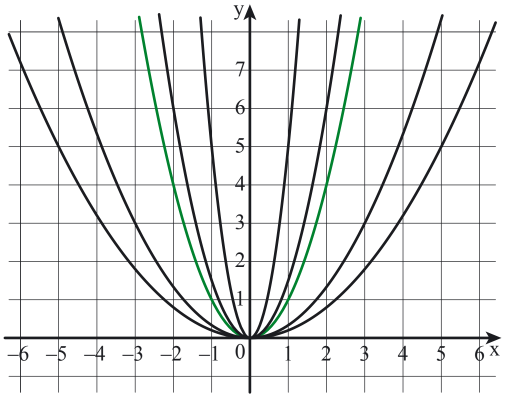
القَطْع المكافِئ **الأخضر** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$ $(a = 1)$.

القَطْع المكافِئ **الأزرق** للخطّ البيانيّ للدالّة $y = \frac{1}{3}x^2$ $(a < 1)$.

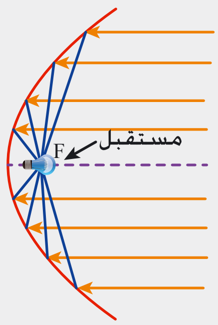


في أعقاب...

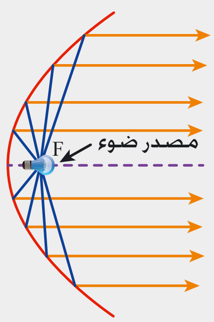
3. الخطّ البيانيّ **الأخضر** هو الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$.
وسعوا (أو ضيّقوا) الخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$ بحيث تحصلون على خطوط بيانيّة لدوالّ مِنَ العائلة $y = ax^2$.
أ. لوّنوا **بالأحمر** الخطوط البيانيّة الّتي فيها $a > 1$.
ب. لوّنوا **بالأزرق** الخطوط البيانيّة الّتي فيها $0 < a < 1$.



نسمّي السطح الّذي ينتُج بواسطة دوران قَطْع مكافِئ حول محور y **"سطح القَطْع المكافِئ"**. هنالك صفات هندسيّة وفيزيائيّة مُهمّة لسطح القَطْع المكافِئ. مثلًا: عندما تصطدم أشعّة الضوء أو الأمواج بسطح القَطْع المكافِئ بشكل عموديّ تنعكس جميعها إلى **البؤرة**. تُستخدم هذه الصفة لتركيز أشعّة الضوء في التلسكوب والرادار. عندما تصطدم، في هذه الحالة، أشعّة ضوء أو أمواج قصيرة نسبيًّا بالمرآة أو بسطح شكله كشكل القَطْع المكافِئ تنعكس إلى نقطة استقبال واحدة تقع في مركز القَطْع المكافِئ. هكذا تزداد شدّتها وتتحسّن جودة استقبالها.



تُستغلّ هذه الصفة للقَطْع المكافئ باتّجاه عكسيّ أيضًا. المصابيح والأضواء الكاشفة (مثلًا: مصابيح السيّارات) مكوّنة مِنْ مرآة سطحها قَطع مكافِئ حيث توجد لمبة في بؤرة القَطع المكافئ. تنعكس أشعّة الضوء الّتي مصدرها مِنَ اللمبة بواسطة المرآة باتّجاه واحد عموديّ لدليل القَطع المكافِئ. وهكذا تنتُج حزمة ضوء شدّتها قويّة جدًّا.



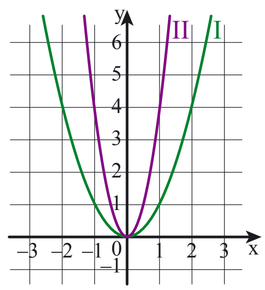
مجموعة مهامّ

1. رُسم، في هيئة المحاور، خطّان بيانيّان لدالّتين تربيعيّتين:

$y = x^2$ $\qquad$ $y = 4x^2$

لائموا كلّ تمثيل جَبريّ إلى القَطْع المكافئ المناسب.

اشرحوا كيف تمّت الملاءمة؟



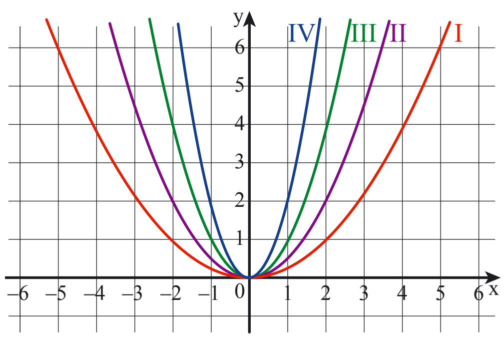
2. رُسمت، في هيئة المحاور، خطوط بيانيّة لأربع دوالّ تربيعيّة:

$y = 2x^2$ $\qquad$ $y = x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{4}x^2$

لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.

اشرحوا كيف تمّت الملاءمة؟

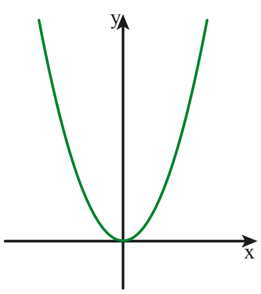


3. أمامكم رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = x^2$.

أ. ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = 3x^2$.

ب. ما هما إحداثيّا نقطة الرأس للدالّة الّتي رسمتموها؟

ت. ما هو محور التماثل للدالّة الّتي رسمتموها؟.



4. معطى خمس دوالّ تربيعيّة:

$y = 2x^2$ $\qquad$ $y = x^2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $y = 4x^2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{4}x^2$

أ. أيّ دالّة تصف القَطْع المكافِئ الأكثر "تضييقًا"؟

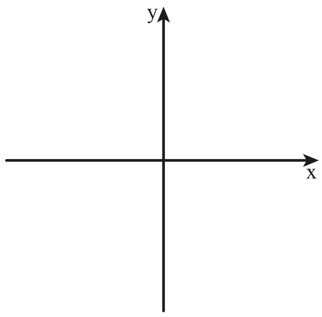
ب. أيّ دالّة تصف القَطْع المكافِئ الأكثر "توسّعًا"؟

5. أ. اُرسموا القَطْع المكافِئ الّذي يحقّق الشروط التالية:
- محور y هو محور التماثل للقَطْع المكافِئ.
- توجد له نقطة صفرية واحدة.

ب. سجّلوا مثالًا للتمثيل الجبريّ لهذه الدالّة.

ت. سجّلوا مثالًا إضافيًّا لدالّة تربيعيّة كهذه.

ث. كم قَطْعًا مكافِئًا كهذا يوجد؟

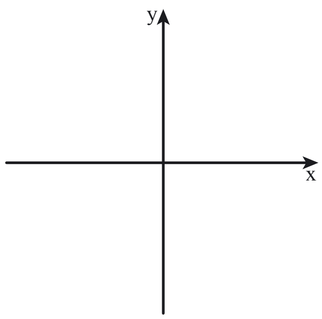


6. أ. اُرسموا القَطْع المكافِئ الّذي يحقّق الشروط التالية:
- محور y هو محور التماثل للقَطْع المكافِئ.
- توجد له نقطتان صفريتان.

ب. سجّلوا مثالًا للتمثيل الجَبريّ لهذه الدالّة.

ت. سجّلوا مثالًا إضافيًّا لدالّة تربيعيّة كهذه.

ث. كم قَطْعًا مكافِئًا كهذا يوجد؟



7. مُعطى، في كلّ بَند، تمثيل جَبريّ لقَطْع مكافِئ ولمستقيم.
حدّدوا هل يتقاطع القَطْع المكافِئ والمستقيم؟
إذا كانت الإجابة نعم، فجِدوا إحداثيّات نقاط التقاطع. إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا.

أ. $y = x^2$ $y = 4$

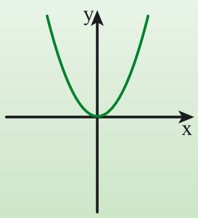
ب. $y = 4x^2$ $y = 4$

ت. $y = \frac{1}{4}x^2$ $y = 4$

ث. $y = 4x^2$ $y = -4$

الدرس الثالث: انعكاس بواسطة محور x (تكملة)

أمامكم رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة التربيعيّة $y = x^2$.
خمّنوا كيف يبدو الخطّ البيانيّ للدالّة $y = -3x^2$؟
ارسموا رسمة تقريبيّة حسب تخمينكم.



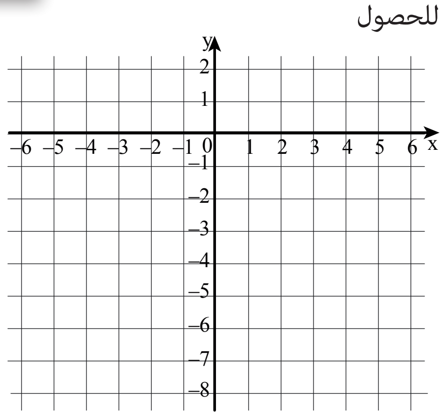
نبحث قطوع مكافِئة إضافيّة مِنَ العائلة $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

1. نتطرّق إلى الدوالّ الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

أ. أكملوا جدول الدالّة $y = -3x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = -3x^2$					

ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وصِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافِئ.



ت. أكملوا "**بطاقة هُويّة**" الدالّة الّتي رسمتموها.

التمثيل الجَبريّ للدّالّة	$y = -3x^2$
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الموجب للدّالّة $(y > 0)$	
المجال السالب للدّالّة $(y < 0)$	

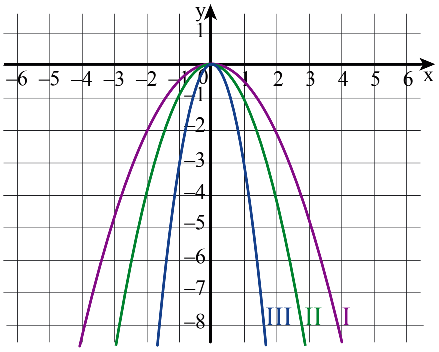
.2 أمامكم ثلاثة قطوع مكافئة:

$y = -x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2 \qquad y = -3x^2$

أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.

ب. أيّ دالّة تصف القَطْع المكافِئ الأكثر "تضييقًا"؟

ت. أيّ دالّة تصف القَطْع المكافِئ الأكثر "توسّعًا"؟



نفكّر بـ ...

.3 نتطرّق إلى الدوالّ الّتي وردت في المَهمّة 2.

أ. ما الصفات المشتركة لهذه الدوالّ؟

ب.بماذا تختلف عن بعضها؟ ممّا ينتج هذا الاختلاف؟

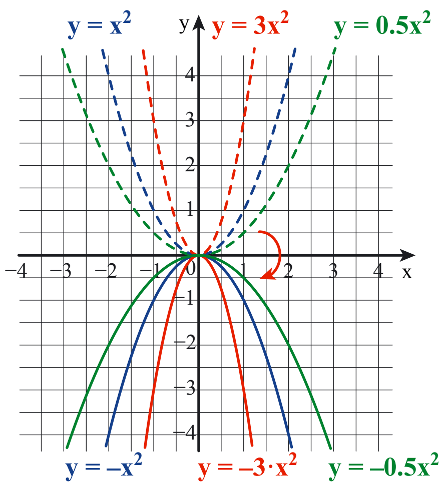
تعرّفنا على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

يمكن الحصول على هذه القطوع المكافئة بواسطة تضييق أو توسيع القَطْعين المكافِئين $y = x^2$ أو $y = -x^2$.

جميع القطوع المكافئة لهذه العائلة:

محور التماثل هو $x = 0$.

إحداثيّا نقطة رأس جميع الدوالّ هما $(0, 0)$.

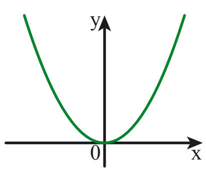


إذا كان a موجبًا $(a > 0)$،

يوجد للقَطْع المكافِئ نهاية صُغرى.

القَطْع المكافِئ تنازليّ في المجال $x < 0$ وتصاعديّ في المجال $x > 0$.

الدّالّة موجبة في كلّ مجال باستثناء العدد 0.

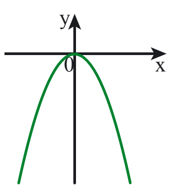


إذا كان a سالبًا $(a < 0)$،

يوجد للقَطْع المكافِئ نهاية عُظمى.

القَطْع المكافِئ تصاعديّ في المجال $x < 0$ وتنازليّ في المجال $x > 0$.

الدّالّة سالبة في كلّ مجال باستثناء العدد 0.



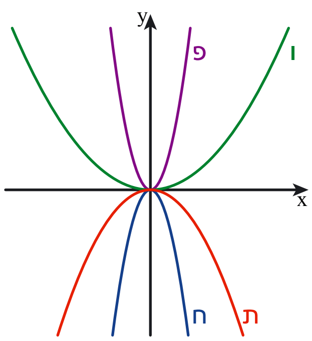
4. أكملوا "**بطاقة هُويّة**" كلّ دالّة: $y = -2x^2$ $\quad y = \frac{1}{2}x^2$

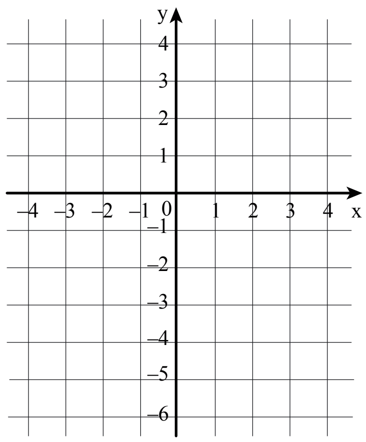
التمثيل الجَبريّ للدّالّة	$y = -2x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
الرسمة التقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x ($y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الموجب للدّالّة ($y > 0$)		
المجال السالب للدّالّة ($y < 0$)		

مجموعة مهامّ

1. أُكتبوا إلى جانب كلّ تمثيل جَبريّ للدالّة الحرف المسجّل على الخطّ البيانيّ المناسب.
أيّ ثمرة حصلتم عليها؟

تمثيل جَبريّ للدالة	الحرف
$y = -\frac{1}{2}x^2$	________
$y = 4x^2$	________
$y = \frac{1}{2}x^2$	________
$y = -4x^2$	________





.2 أ. أرسموا القَطْع المكافِئ الّذي يحقّق الشروط التالية:
- رأس القَطْع المكافِئ $(0, -4)$.
- يتقاطع القَطْع المكافِئ مع محور x في النقطتين:

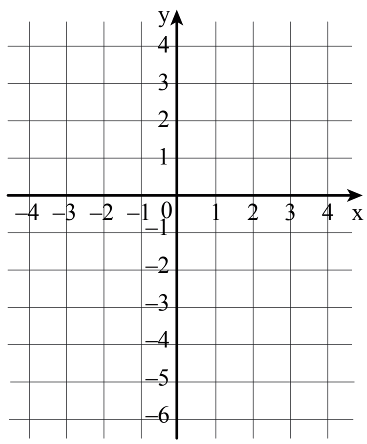
$(-2, 0)$ $(2, 0)$

ب. هل رأس القَطْع المكافِئ نقطة صُغرى أم عُظمى؟

ت. أمامكم تمثيلات جَبريّة، أيّ تمثيل جَبريّ هو التمثيل المناسب للدالّة؟ اشرحوا.

$y = x^2 + 4$ $y = -x^2 + 4$

$y = x^2 - 4$ $y = -x^2 - 4$



.3 أ. أرسموا القَطْع المكافِئ الّذي يحقّق الشروط التالية:
- رأس القَطْع المكافِئ $(0, 4)$.
- يتقاطع القَطْع المكافِئ مع محور x في النقطتين:

$(-2, 0)$ $(2, 0)$

ب. هل رأس القَطْع المكافِئ نقطة صُغرى أم عُظمى؟

ت. أمامكم تمثيلات جَبريّة، أيّ تمثيل جَبريّ هو التمثيل المناسب للدالّة؟ اشرحوا.

$y = x^2 + 4$ $y = -x^2 + 4$

$y = x^2 - 4$ $y = -x^2 - 4$

.4 حدّدوا، في كلّ بَند، هل الادّعاء صحيح؟ إذا كانت الإجابة نعم، فعلّلوا. إذا كانت الإجابة لا، فأعطوا مثالًا مضادًّا.

أ. كلّ قَطْع مكافِئ رأسه نقطة صُغرى يتقاطع مع محور x.

ب. كلّ قَطْع مكافِئ رأسه نقطة عُظمى يتقاطع مع محور x.

ت. كلّ قَطْع مكافِئ رأسه نقطة صُغرى في النقطة $(0, 2)$ هو موجب في كلّ المجال.

ث. كلّ قَطْع مكافِئ رأسه نقطة عُظمى في النقطة $(0, -2)$ هو سالب في كلّ المجال.

.5 يقع رأس القَطْع المكافِئ في النقطة $(0, -8)$.

يتقاطع القَطْع المكافِئ مع محور x في النقطتين: $(4, 0)$ وَ $(-4, 0)$.

أمامكم تمثيلات جَبريّة، أيّ تمثيل جَبريّ هو التمثيل المناسب للدالّة؟ اشرحوا.

$y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ $y = 2x^2 - 8$ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 8$ $y = 4x^2 - 8$

الدرس الرابع: إزاحة على طول محور y

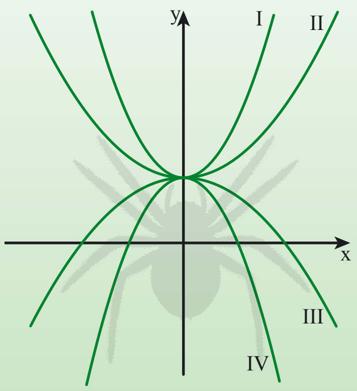
بدأ "العنكبوت" الّذي يظهر في الرسمة نزهته مِن نقطة الأصل في هيئة المحاور، وصعد على طول محور y.

"أرجل العنكبوت" مكوّنة من الخطوط البيانيّة للدوال التالية:

$y = x^2 + 3$ $\quad$ $y = 2x^2 + 3$

$y = -x^2 + 3$ $\quad$ $y = -2x^2 + 3$

لائموا كلّ دالّة للخطّ البيانيّ المناسب.



نبحث قطوع مكافِئة تمثيلها الجبريّ هو $y = ax^2 + k$ $(a \neq 0)$.

1. نتطرّق إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

أ. لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب. اشرحوا.

ب. بماذا تختلف وبماذا تتشابه هذه الدوالّ؟

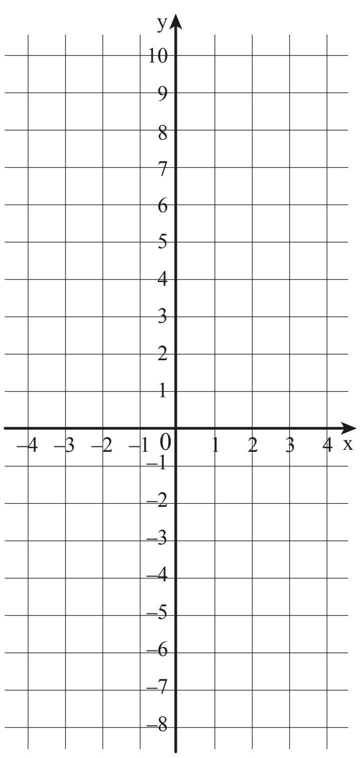
2. معطى القَطْع المكافِئ $y = 2x^2 - 8$.

أ. أكملوا جدول الدالّة.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x^2 - 8$							

ب. عيّنوا النقاط في هيئة المحاور، وصِلوا بينها للحصول على قَطْع مكافِئ.

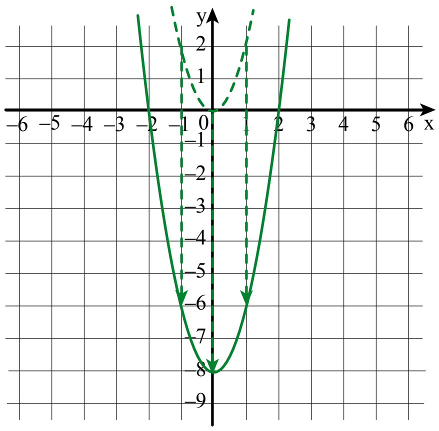
ت. أكملوا صفات الدالّة.



التمثيل الجبريّ للدّالّة	**$y = 2x^2 - 8$**
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة الرأس	
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x $(y = 0)$	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الموجب للدّالّة $(y > 0)$	
المجال السالب للدّالّة $(y < 0)$	

إذا أزحنا القَطْع المكافِئ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ بمقدار k وحدات على طول محور y فينتُج القَطْع المكافئ مِنَ العائلة $y = ax^2 + k$.

مثال: في رسمة القَطْع المكافئ $y = 2x^2 - 8$.



إذا أزحنا القَطْع المكافئ $y = 2x^2$,

8 وحدات إلى أسفل على طول محور y،

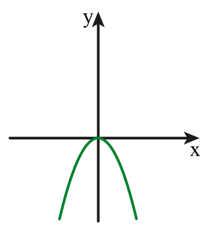
فنحصل على القَطْع المكافئ $y = 2x^2 - 8$.

محور التماثل هو $x = 0$.

رأس القَطْع المكافئ هو نقطة صُغرى إحداثيّاها هما $(0, -8)$.

يوجد للقَطْع المكافِئ نقطتان صفريتان $(2, 0)$ وَ $(-2, 0)$.

3. أمامكم رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = -2x^2$.



أ. ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالّة $y = -2x^2 + 4$.

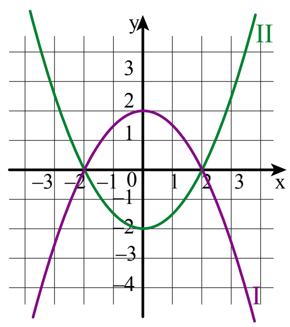
ب. هل يتقاطع الخطّ البيانيّ للدالّة الّذي رسمتموه مع محور x؟
إذا كانت الإجابة نعم، في كم نقطة؟

نفكّر بـ ...

4. أمامكم قَطْعان مكافِئان تمثيلهما الجَبريّ مِنَ الصورة $y=\frac{1}{2}x^2-\square$ أو $y=-\frac{1}{2}x^2+\square$.

سجّلوا لكلّ قَطْع مكافِئ:

- إحداثيّا نقطة الرأس.
- محور التماثل.
- إحداثيّات النقاط الصفريّة.
- تمثيل جَبريّ مناسب (أضيفوا عددًا مناسبًا).



نحلّ معادلات

5. حدّدوا، في كلّ بند، هل توجد نقاط صفريّة للقَطْع المكافِئ؟
إذا كانت الإجابة نعم، فجِدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة. إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا.

أ. $y = 3x^2 - 12$ ب. $y = 3x^2 + 12$ ت. $y = -3x^2 + 12$ ث. $y = -3x^2 - 12$

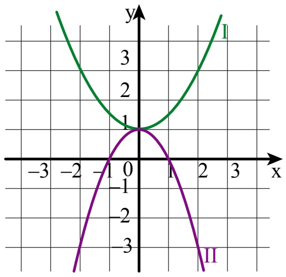
6. أمامكم تمثيلات جبريّة لقطوع مكافئة ولمستقيمات.
اُرسموا، في كلّ بَند، رسمة تقريبيّة للخطّين البيانيّين المناسبين.
حدّدوا هل يتقاطع القَطْع المكافِئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 3x^2 - 2$ $\quad y = 4$ ت. $y = -3x^2 + 4$ $\quad y = 1$

ب. $y = 3x^2$ $\quad y = -4$ ث. $y = -3x^2 + 4$ $\quad y = 4$

مجموعة مهامّ

1. أمامكم خطّان بيانيّان للدالّتين: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ $\quad y = -x^2 + 1$.



أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.
ب. سجّلوا بماذا تختلف وبماذا تتشابه هذه الدوالّ؟

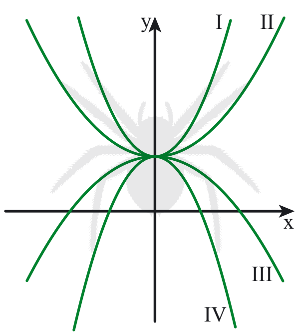
2. أكملوا.

تمثيل جَبريّ للدالّة	إحداثيّا نقطة الرأس	نوع الرأس صُغرى/عُظمى	يوجد أو لا يوجد نقاط صفرية
$y = 4x^2 + 1$			
$y = -4x^2 + 1$			
$y = 4x^2 - 1$			
$y = -4x^2 - 1$			

3. أمامكم خطوط بيانيّة للدوالّ:

$y = x^2 + 4$ $\quad y = 2x^2 + 4$

$y = -x^2 + 4$ $\quad y = -2x^2 + 4$



أ. لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.
ب. سجّلوا إحداثيَّي نقطة الرأس للقَطْع المكافِئ.

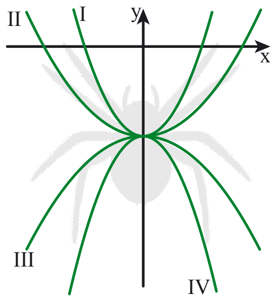
4. أمامكم خطوط بيانيّة للدوالّ:

$y = x^2 - 6$　　$y = 2x^2 - 6$

$y = -x^2 - 6$　　$y = -2x^2 - 6$

أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.

ب. سجّلوا إحداثيَيْ نقطة الرأس للقَطْع المكافِئ.



5. أكملوا "**بطاقة هُويّة**" كلّ دالّة: $y = 2x^2 + 1$　$y = -2x^2 + 1$

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 2x^2 + 1$	$y = -2x^2 + 1$
الرسمة التقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة الرأس		
نوع نقطة الرأس (صُغرى/عُظمى)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور x ($y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الموجب للدّالّة ($y > 0$)		
المجال السالب للدّالّة ($y < 0$)		

6. حدّدوا، في كلّ بَند، هل توجد نقاط صفريّة للقَطْع المكافِئ؟

إذا كانت الإجابة نعم فجدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

أ. $y = 2x^2 - 8$　　ب. $y = -x^2 + 4$　　ت. $y = -3x^2 + 27$　　ث. $y = 3x^2 + 3$

7. حدّدوا، في كلّ بَند، هل توجد نقاط صفريّة للقَطْع المكافِئ؟
إذا كانت الإجابة نعم فجِدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

أ. $y = 6x^2 - 6$ ب. $y = -x^2 + 36$ ت. $y = -4x^2 + 100$ ث. $y = 4x^2 + 100$

8. أمامكم تمثيلات جبريّة لقطوع مكافئة ولمستقيمات.
أُرسموا، في كلّ بَند، رسمة تقريبيّة للخطّين البيانيّين المناسبين.
حدّدوا هل يتقاطع القَطْع المكافِئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = x^2 - 9$ $y = 0$ ت. $y = -x^2 + 9$ $y = 5$

ب. $y = 3x^2 + 4$ $y = -1$ ث. $y = x^2 + 9$ $y = 9$

9. أمامكم تمثيلات جَبريّة لقطوع مكافئة ولمستقيمات.
أُرسموا، في كلّ بَند، رسمة تقريبيّة للخطّين البيانيّين المناسبين.
حدّدوا هل يتقاطع القَطْع المكافِئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y=\frac{1}{2}x^2-4$ $y = 0$ ت. $y=-\frac{1}{2}x^2-4$ $y = -4$

ب. $y=\frac{1}{2}x^2+1$ $y = -1$ ث. $y=-\frac{1}{2}x^2+4$ $y = 9$

10. أحيطوا، في كلّ بَند، الحرف المناسب. على ماذا حصلتم؟

			صحيح	غير صحيح
أ. الدالّة	$y = -2x^2 + 5$	لها نقطة عُظمى.	ק	א
ب. الدالّة	$y = -x^2 + 1$	لها نقطة صُغرى.	פ	ד
ت. الدالّة	$y = 3x^2 + 3$	لا توجد لها نقاط صفريّة.	ק	ר
ث. الدالّة	$y = 3x^2 - 3$	توجد لها نقطتان صفريّتان.	ו	ס
ج. الدالّة	$y = x^2 + 3$ والمستقيم $y = 4$	لا توجد لهما نقاط مشتركة.	ק	ד

11. حدّدوا، في كلّ بَند، هل يتقاطع القَطْعين المكافِئين في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 2x^2$ $y = 5x^2$ ت. $y = -2x^2 + 3$ $y = 3x^2 + 2$

ب. $y = 3x^2 + 1$ $y = -3x^2 + 3$ ث. $y = 4x^2 + 4$ $y = -x^2 + 1$

الدرس الخامس: مهامّ إضافيّة

سُجّلت على اللوح خمس دوالّ تربيعيّة.

$y = x^2 + 1$ $\quad$ $y = -x^2 + 1$ $\quad$ $y = (x - 1)^2$

$y = 4x^2 + 1$ $\quad$ $y = (x + 1)^2$

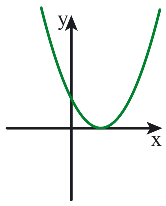
قال **سامر**: رأس جميع الدوالّ هو النقطة الصُغرى $(0\ ,\ 1)$.

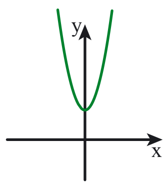
هل قول **سامر** صحيح؟

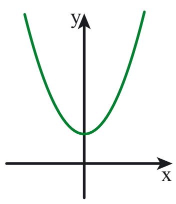
نحلّ تمارين مع القطوع المكافِئة الّتي تعرّفنا عليها، ونميّز قطوع مكافِئة حسب الصفات.

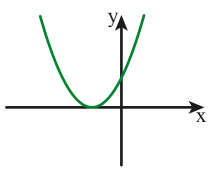
1. نتطرّق إلى المُعطيات الّتي وردت في مَهمّة الافتتاحيّة.

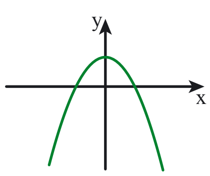
أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.

$y = x^2 + 1$ • •


$y = -x^2 + 1$ • •


$y = (x - 1)^2$ • •


$y = 4x^2 + 1$ • •


$y = (x + 1)^2$ • •


ب. هل قول **سامر** صحيح؟ اِشرحوا.

ت. ما هو محور تماثل كلّ قَطْع مكافِئ؟

2. بسّطوا وحدّدوا هل تنتُج دالّة تربيعيّة؟
إذا كانت الإجابة نعم، فسجّلوا إحداثيّ نقطة الرأس، وحدّدوا هل النقطة صُغرى أم عُظمى؟

أمثلة

$y = (x + 2)^2 - 4x$	$y = (x + 3)(x - 1) - x^2 + 8$
$y = x^2 + 4x + 4 - 4x$	$y = x^2 + 2x - 3 - x^2 + 8$
$y = x^2 + 4$	$y = 2x + 5$
دالّة تربيعيّة.	دالّة خطّيّة.
الرأس نقطة صُغرى في $(0, 4)$.	(ليست دالّة تربيعيّة).

أ. $y = x(x + 8) - 2(4x + 1)$

ب. $y = (x + 3)^2 - 6x - 9$

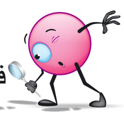
ت. $y = x(4 - 2x) - 4x + 1$

ث. $y = x(x + 3) - x^2 + 5$

ج. $y = (x + 1)(x + 2) - 2x^2 - 3x$

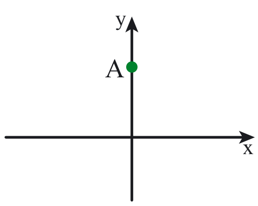
ح. $y = (x + 2)^2 + (x + 3)^2 - 2x^2$

إذا كان حلّكم صحيحًا، فحصلتم على أربع دوالّ تربيعيّة مناسبة.
دالّتان لهما نقطة رأس صُغرى، ودالّتان لهما نقطة رأس عُظمى.

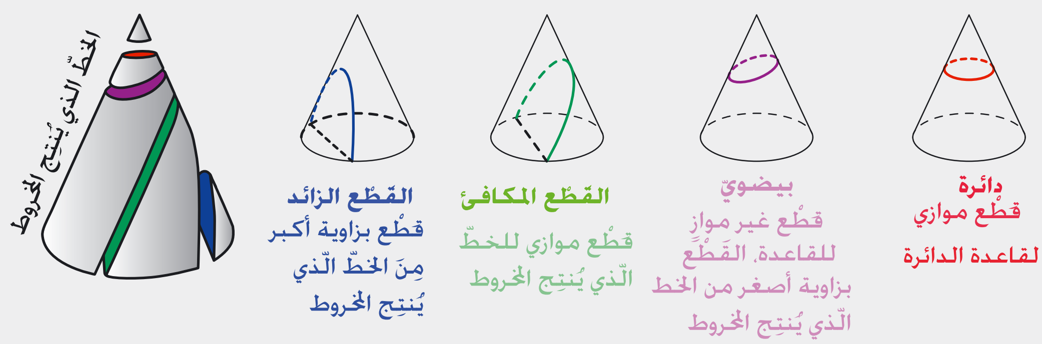


في أعقاب...

3. أُرسموا رسمة تقريبيّة، بحيث يكون رأسها في النقطة A وتتقاطع مع محور x في نقطتين.
أ. هل رأس القَطْع المكافِئ نقطة صُغرى أم نقطة عُظمى؟ اِشرحوا.
ب. كم قَطْعًا مكافِئًا يمكن أنْ يكون رأسه في النقطة A؟ اِشرحوا.



عالم الرياضيّات والفلك اليونانيّ أبلونيوس مِنْ فرجا الّذي عاش بين السنوات 262 إلى 190 قبل الميلاد بحث صفات الأشكال الناتجة مِن قطوع المخروط (اسم المخروط كونوس أيضًا وباللغة الإنجليزيّة cone). نُشرت نتائج أبحاثه في كتاب مِنْ ثمانية أجزاء اسمه "Conics" ("قطوع المخروط"). حُفظت سبعة أجزاء مِنْ ثمانية أجزاء حتّى يومنا هذا.
إذا قطعنا قطعة مِنْ مخروط فإنّ الشكل الهندسيّ للقَطْع متعلّق بالزاوية الّتي تمّ بواسطتها قَطْع المخروط.
يمكن أنْ نرى في الرسمة كيف تَنتُج: **الدائرة**، **الشكل البيضويّ**، **القَطْع المكافِئ** و**القَطْع الزائد**.



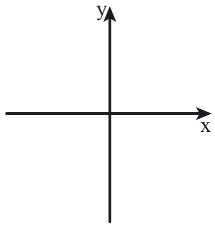
مجموعة مهامّ

1. بسّطوا، وارسموا، في هيئة المحاور نفسها، رسومات تقريبيّة للقطوع المكافِئة.

أ. $y = (x + 3)^2 - 6x - 5$

ب. $y = x(x - 6) + 6x + 2$

ت. $y = (x - 2)^2 + 4x - 6$



2. اختاروا، في كلّ مستطيل، التمثيل الجَبريّ المناسب للدالّة التربيعيّة. أحيطوا الحرف الموجود إلى جانبها.
سجّلوا الحروف الّتي أحطتموها (حسب الترتيب مِنَ المستطيل أ - ت). على ماذا حصلتم؟

أ. نقطة الرأس صُغرى $(0, -2)$		ت. نقطة الرأس صُغرى $(0, 2)$	
$y = x^2 - 2$	נ	$y = x^2 + 2$	ו
$y = -x^2 - 2$	א	$y = 2x^2$	י
$y = -2x^2$	ש	$y = -x^2 + 2$	נ
ب. نقطة الرأس عُظمى $(0, -2)$		ث. نقطة الرأس عُظمى $(0, 2)$	
$y = -2x^2$	נ	$y = -2x^2$	פ
$y = -x^2 - 2$	כ	$y = -x^2 - 2$	ס
$y = -x^2 + 2$	ז	$y = -x^2 + 2$	נ

3. بسّطوا، وسجّلوا إحداثيّ نقطة الرأس، وحدّدوا هل الرأس نقطة عُظمى أم صُغرى؟

أ. $y = x(x + 3) + x(x - 3)$

ب. $y = x(5 - x) - 5x + 1$

ت. $y = x(x + 4) - x(2x + 4)$

ث. $y = (x + 2)(x + 3) - 5x$

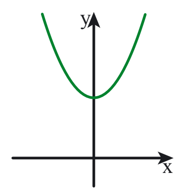
إذا كان حلّكم صحيحًا، فستحصلون على دالّتين لهما نقطة رأس صُغرى، ودالّتين لهما نقطة رأس عُظمى.
الرأس للدالّتين هو $(0, 0)$.

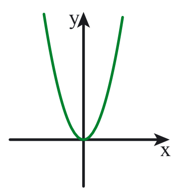
4. أحيطوا، في كلّ بَند، التمثيل الجَبريّ، للدالّة التربيعيّة، المناسب للصفة.

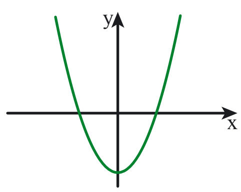
أ.	حتّى 0 الدالّة تنازليّة، ومنْ 0 وفيما بعد فهي تصاعديّة.	$y = -x^2 + 5$ ה	$y = -2x^2 + 1$ ק	$y = x^2 + 5$ נ
ب.	حتّى 0 الدالّة تصاعديّة، ومنْ 0 وفيما بعد فهي تنازليّة.	$y = -x^2 + 8$ י	$y = x^2 - 8$ ו	$y = 8x^2$ ס
ت.	الدالّة موجبة دائمًا.	$y = x^2 + 5$ ו	$y = x^2 - 5$ ר	$y = -x^2 + 10$ מ
ث.	الدالّة سالبة دائمًا.	$y = -x^2 + 10$ י	$y = -x^2 - 5$ צ	$y = -x^2$ פ
ج.	يوجد للدالّة نقطتا تقاطع مع محور x	$y = -x^2 - 4$ א	$y = 2x^2$ ר	$y = x^2 - 6$ מ

اقرأوا مِنْ أسفل إلى أعلى الحروف إلى جانب الدوالّ الّتي أحطتموها. على ماذا حصلتم؟

5. لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.

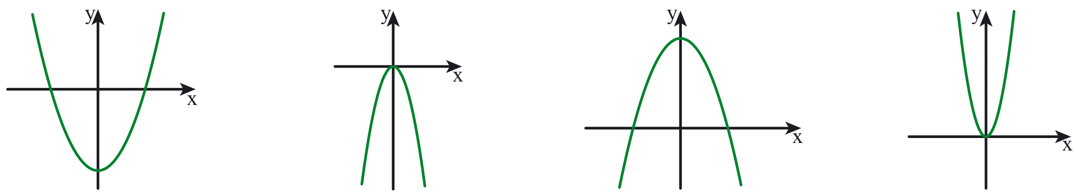






$y = x^2 - 2$ $\qquad$ $y = x^2 + 2$ $\qquad$ $y = 2x^2$

6. لائموا كلّ تمثيل جَبريّ للقَطْع المكافِئ المناسب.



$y = -x^2 + 3$ | $y = x^2 - 3$ | $y = 3x^2$ | $y = -3x^2$

7. سجّلوا، في كلّ بَند، التمثيل الجَبريّ المناسب للدالّة التربيعيّة.

أ. رأس القَطْع المكافِئ هو نقطة صُغرى في النقطة $(0, 1)$.

ب. رأس القَطْع المكافِئ هو نقطة عُظمى في النقطة $(1, 0)$.

ت. رأس القَطْع المكافِئ في النقطة $(0, -2)$، وللقَطْع المكافِئ يوجد نقطتا تقاطع مع محور x.

ث. رأس القَطْع المكافِئ في النقطة $(0, -2)$، وللقَطْع المكافِئ لا توجد نقاط تقاطع مع محور x.

8. أمامكم ستّ تمثيلات جبريّة لدوالّ تربيعيّة.

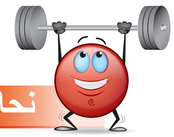
I. $y = x^2 - 1$ III. $y = -2x^2 + 1$ V. $y = -3x^2 - 1$

II $y = -x^2 + 1$ IV. $y = 3x^2 - 1$ VI. $y = 2x^2 + 1$

أ. أيّ دوالّ توجد لها نقطة الرأس نفسها؟ ما هما إحداثيّا الرأس؟

ب. في أيّ دوالّ الرأس نقطة صُغرى؟

ت. في أيّ دوالّ الرأس نقطة عُظمى؟



نحافظ على لياقة رياضيّة

النسبة

1. النسبة بين عدد البَنين إلى عدد البنات في الصفّ التاسع هي 5:3 (على كلّ 5 بنون يوجد 3 بنات).

أ. هل يمكن أنْ يكون في الصفّ التاسع 20 بنين وَ 12 بنتًا؟ اِشرحوا.

ب. هل يمكن أنْ يكون في الصفّ التاسع 25 بَنين وَ 30 بنتًا؟ اِشرحوا.

ت. ما عدد البنات إذا كان عدد البَنين في الصفّ التاسع 15؟

ث. ما عدد البَنين إذا كان عدد البنات في الصفّ التاسع 15؟

ج. ما عدد البَنين وما عدد البنات إذا كان في الصفّ 16 تلميذًا؟

2. أمامكم أزواج مِنَ النِّسَب، جِدوا مِنْ بينها أزواجًا مِنَ النِّسَب تساوي النسبة 3:4.

أ. 40:30   ت. 12:16   ج. 15:12

ب. 30:40   ث. 33:44   ح. 6:8

3. أكملوا الجداول حسب النسبة، وعبّروا بمساعدة x.

أ. النسبة 4:3

8	
	21
36	
	300
x	

ب. النسبة 1:7

2	
	35
10	
	140
x	

ت. النسبة 2:3

6	
30	
	60
	120
x	

4. يوجد في جرّة 16 كرة سوداء وَ 12 كرة زرقاء.

أ. ما النسبة بين عدد الكُرات السوداء إلى عدد الكُرات البيضاء في الجرّة؟

ب. نختار كرة دون أنْ ننظر في الجرّة:

ما احتمال أنْ نختار كرة بيضاء؟

ما احتمال أنْ نختار كرة سوداء؟

5. النسبة بين مقدار الزوايا في المثلّث هي 1:2:3. اِحسبوا مقدار كلّ زاوية في المثلّث.

6. مُعطى مثلّث قائم الزاوية متساوي الساقين.

أ. ما مقدار زاوية الرأس؟ ما مقدار زاويتِي القاعدتين؟

ب. ما هي النسبة بين مقدار زاوية الرأس ومقدار زاوية القاعدة؟