

## 5.2 ادعاءات في الجبر



لعب **حامد** و**حنان** باللعبة التالية:

- يختار أحدهما، من كل عمود، عددين طبيعيين مختلفين.
- يحسب لاعب أو لاعبة المعدل الحسابي لمربع العددين.
- يحسب لاعب آخر أو لاعبة أخرى مربع المعدل الحسابي للعددين.
- إذا حصلنا على نتيجة أكبر في العمود نفسه، فإننا نفوز بنقطة.

خمنوا هل اللعبة نزيهة؟

نستعمل الجبر كي نبرهن ادعاءات وقانونية.

1. أ. العبوا بأزواج اللعبة عدّة مرات.  
ب. قارنوا بين النتائج التي حصلتم عليها بنتائج أزواج أخرى.  
ت. استخلصوا استنتاجًا بالنسبة لنزاهة اللعبة.  
ث. برهنوا ادعاءكم.  
**إرشاد:** يمكن أن نمثل بواسطة  $a$  و  $b$  العددين، وأن نبين تساوي أو عدم تساوي بين التعابير المناسبة.

2. نظرية:  
إذا ضربنا في 2 مجموع مربعي عددين طبيعيين معينين، يمكن أن نكتب النتيجة كمجموع مربع عددين صحيحين. هذا يعني أنه: لكل عددين طبيعيين  $a$  و  $b$ ، يمكن أن نجد عددين طبيعيين  $c$  و  $d$ ، بحيث يكون  
$$2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$$
  
أ. افحصوا عدّة أمثلة.  
ب. ابحثوا عن علاقة بين العددين  $a$  و  $b$  (العددان المعطيان) والعددين  $c$  و  $d$  (المضافات في مجموع مربعات الأعداد المناسبة).  
ت. برهنوا النظرية.



كُتِبَ المسألة التي وردت في المهمة 2 الإنجليزي تشارلس دودجسون (Charles Dodgson, 1832-1898) الذي كان فيلسوفًا، مخترعًا، مصوِّرًا، عالِمًا في المنطق، رياضياً وكاتبًا مشهورًا، وهو معروف اليوم باسم لويس كارول (Lewis Carroll).

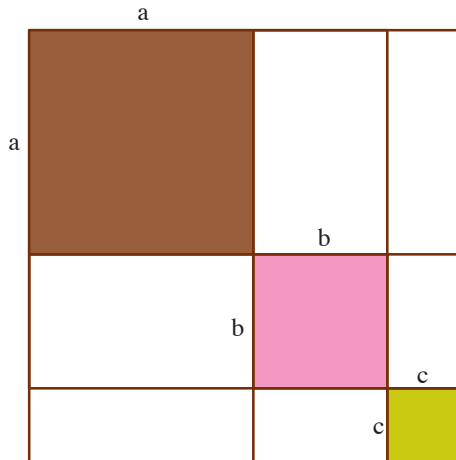
إبداعه المعروف جدًا ككاتب هو "إليس في بلاد العجائب". تعلّم كارول موضوع الرياضيات ومواضيع تقليدية، وفي سنة 1855 أصبح محاضرًا للرياضيات في جامعة أكسفورد. كان الشرط للقبول كمحاضر، في تلك الفترة، هو أن تتحوّل إلى كاهن أو تتزوج، وقد وافق كارول على هذا الشرط وأصبح كاهنًا في سن 23.

3. أطوال أضلاع المربّعات الملونة، في الرسم التالفة، هي  $a$ ,  $b$ , و  $c$  بالتناظر.

أ. استعملوا اعتبارات مرتبطة بالمساحات، وسجّلوا قاعدة

$$(a + b + c)^2$$

ب. افحصوا القاعدة التي وجدتموها بواسطة الضرب وفتح الأقواس.



4. إذا كان  $a + b + c = 4$

$$ab + bc + ca = 6$$

$$abc = 3$$

أ. ما قيمة التعبير الجبري  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ؟

ب. ما قيمة التعبير الجبري  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$ ؟

ت. ما قيمة التعبير الجبري  $a^2 + b^2 + c^2$ ؟

إرشاد: استعينوا بقاعدة التعبير الجبري  $(a + b + c)^2$ .

5. اختاروا عددًا فرديًا، ربّعوه، اطرحوا 1 من النتيجة واحسبوا.

اخترنا أعدادًا إضافية كهذه، ونفّذوا عليها العملية نفسها.

هل تلاحظون ظاهرة خاصّة؟

إذا كانت إجاباتكم نعم، فبرهنوا أنّها تتحقّق دائمًا.

6. أ. برهنوا التساوي  $(1 - x^4) = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$ .  
 ب. خمنوا كيف يمكن تحليل  $1 - x^5$  إلى عوامل، وبرهنوا أن نظريتكم صحيحة.



7. أ. انسخوا في برمجية إلكترونية إكسل (Excel) القواعد التالية:

	A	B	C	D	E	F
1	1	= A1 * A1	= B1 * A1	= C1 * A1	= 1 + A1 + B1 + C1	= E1 * (A1 - 1) + 1
2						

- ب. سجّلوا في العمود A أعدادًا طبيعية.  
 ت. جرّوا القواعد.  
 ث. هل تميّزون القانونيّة؟ إذا كانت الإجابة نعم، صوغوا القانونيّة وبرهنوها.



8. أ. بيّنوا أنّ المجموع (النتيجة لكلّ تمرين جمع) هو مربع عدد صحيح.

$$2^2 + 3^2 + 6^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2$$

$$4^2 + 5^2 + 20^2$$

- ب. جدوا العلاقة بين ثلاثة أعداد نجمع مربعاتها، والعلاقة بينها وبين العدد الصحيح الذي مربّعه هو النتيجة.

ت. عمّموا:  $n^2 + (\text{_____})^2 + (\text{_____})^2 = (\text{_____})^2$ .

- ث. برهنوا أنّ المساواة صحيحة.



### نحافظ على لياقة رياضية

1. انسخوا في دفاتركم، وأكملوا جدول الجمع. افتحوا الأقواس.

+	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$(a + b)(a - b)$
$(a + b)^2$			
$(a - b)^2$			
$(a + b)(a - b)$			

2. انسخوا في دفاتركم، وأكملوا جدول الضرب. افتحوا الأقواس.

•	$a + b$	$-a - b$	$a - b$	$b - a$
$a + b$				
$-a - b$				
$a - b$				
$b - a$				



اخترت عدداً ثنائي المنزلة.

- حسبت مربعه.
  - بدلت ترتيب الأرقام في العدد الذي اخترته، وحسبت مربع العدد الجديد.
  - تفاجأت، عندما وجدت أن الفرق بين مربع العدد وعكسه يساوي مربع العدد الصحيح.
- ما هو العدد الذي اخترته؟